ANALÝZA

1. Diferenciální počet reálné proměnné

Def: Zobrazení f, jehož definiční obor $\mathcal{D}_f$ i obor hodnot H_f je podmnožinou $\mathbb{R}$ se nazývá REÁLNÁ FCE REÁLNÉ PROMĚNNÉ.
GRAFEM f se rozumí množina $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f\} \subset \mathbb{R}^2$.

Příklady fcí: Dirichletova fce $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

Riemannova fce $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{když } x = \frac{p}{q}, \text{ kde } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{nsd}(p,q) = 1 \\ 0 & , x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

Signum $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

Fce f je:

rostoucí (ostře rostoucí) $(\forall x_1, x_2 \in D_f)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$ ($<$)

klesající (ostře) $(\forall x_1 x_2 \in D_f)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$ ($>$)

monotonní (ryze), když je rostoucí nebo klesající (ostře)

- Nechť f je reálná fce reálné proměnné, jejíž definiční obor $\mathcal{D}_f$ vyhovuje podmínce $(\forall x \in \mathcal{D}_f)(-x \in \mathcal{D}_f)$ řekneme, že fce f je
  SUDÁ, když $(\forall x \in D_f)\ (f(x) = f(-x))$
  LICHÁ, když $(\forall x \in D_f)\ (-f(x) = f(-x))$

DEF (Limita fce): Nechť f je reálná fce reálné proměnné a bod a je hromadným bodem $\mathcal{D}_f$. Řekneme, že funkce f má v bodě a limitu $c \in \overline{\mathbb{R}}$, když $(\forall H_c)(\exists H_a)(\forall x \in \mathcal{D}_f \cap H_a - \{a\})(f(x) \in H_c)$

$$: \lim_{x \to a} f(x) = c$$

VĚTA (BOLZANO-CAUCHY KRITERIUM): Nechť $a \in \mathcal{D}'_f$. Pak $\lim_a f$ $\exists$ a je konečná
$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists H_a)(\forall x, y \in \mathcal{D}_f \cap H_a - \{a\})(|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

DEF (SPOJITOST V BODĚ): Nechť f je reálná fce reálné proměnné a $a \in \mathcal{D}_f$.
Řekneme, že fce f je spojitá v bodě a, když
$(\forall H_{f(a)})(\exists H_a)\ (\forall x \in \mathcal{D}_f \cap H_a)(f(x) \in H_{f(a)})$

POZN: Každý izolovaný bod def. oboru f je bodem spojitosti f. Nechť $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_f'$. Pak f je spojitá v bodě $a \Leftrightarrow \lim_a f = f(a)$

DEF: (SPOJITOST NA INTERVALU) Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a interval $J \subset \mathcal{D}_f$. Řekneme, že funkce f je SPOJITÁ NA INTERVALU J, když zúžení $f|_J$ je funkce spojitá v každém bodě intervalu J.

DEF: (STEJNOMĚRNÁ SPOJITOST) Nechť f je def. na intervalu J. Řekneme, že f je STEJNOMĚRNĚ SPOJITÁ NA J, když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in J)(|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

DEF: (DERIVACE FCE) Nechť $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_f'$. Limitu (pokud existuje)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nazveme DERIVACÍ FCE f V BODĚ a, značíme $f'(a)$. Je-li $f'(a) \in \mathbb{R}$, říkáme, že f je DIFERENCOVATELNÁ v bodě a.

VĚTA: Nechť f je diferencovatelná v bodě a. Pak f je spojitá v bodě a.

DK: $$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

tedy $\lim_a f = f(a)$.

Integrabilita absolutní hodnoty

Nechť f je integrovatelná v $\langle a,b\rangle$. Pak $|f|$ je integrovatelná v $\langle a,b\rangle$ a $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

Integrál jako funkce horní meze: Nechť f je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$. Fce $F(x)=\int_a^x f$ je ~~na~~ spojitá na $\langle a,b\rangle$. Je-li f spojitá v $x_0\in\langle a,b\rangle$

$\Rightarrow$ F je diferencovatelná x_0 & $F'(x_0)=f(x_0)$.

Důsledek: fce spojitá na (a,b) a má na tomto intervalu primitivní fci

Newtonova formule: Nechť $\exists\int_a^b f$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $\exists F$ tak, že

1) F je spojitá na $\langle a,b\rangle$
2) $F'(x)=f(x) \quad \forall x\in(a,b)$

Pak $\int_a^b f = F(b)-F(a) \overset{\text{ozn}}{=:} [F(x)]_a^b$

> lze zeslabit $F'(x)=f(x)\ \forall x\in(a,b)$ až na konečný počet výjimek z aditivity v mezích

Per partes: Nechť f,g jsou spojité v $\langle a,b\rangle$ a diferencovatelné v (a,b) jako F,G
$\exists\int_a^b f'g$ & $\int_a^b fg' \Rightarrow \int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$.

Substituce: Nechť pro f a Φ platí: ϕ je spojitá na $\langle\alpha,\beta\rangle$ & diferencovatelná v (α,β)
f je spojitá na $\phi\langle\alpha,\beta\rangle$.
Pak $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,dx$ if LS $\exists$.

O střední hodnotě $\int$ I: Nechť f integrovatelná a nezáporná na $\langle a,b\rangle$ a fg integrovatelná na $\langle a,b\rangle$. Pak $\exists\mu\in\langle \inf_{\langle a,b\rangle} g, \sup_{\langle a,b\rangle} g\rangle$ t.ž. $\int_a^b fg = \mu\ \cancel{g(c)}\int_a^b f$

s předpokladem spojitosti g: $\exists c\in\langle a,b\rangle: \int_a^b f\cdot g = g(c)\int_a^b f$

*μ.. střední hodnota fce g vystihuje výšku obdélníku nad $\langle a,b\rangle$, aby jeho plocha byla totožná jako plocha mezi osou x a grafem g

O střední hodnotě II. Nechť f a fg integr. v $\langle a,b\rangle$, nechť g monotonní v $\langle a,b\rangle$. Pak $\exists\xi\in\langle a,b\rangle: \int_a^b f\cdot g = g(a)\int_a^\xi f + g(b)\int_\xi^b f$.

Pozn: $\exists\int_a^b fg \to \exists\int_a^b f, \int_a^b g$

II.

Rozdělení intervalu: Nechť je dán interval $\langle a,b\rangle$. Konečnou množinu $\sigma = \{x_0 = a, \dots x_n = b\}$, $a < b$ nazýváme rozdělením intervalu $\langle a,b\rangle$.
Bodům x_k pro $k \in \hat{n-1}$ $x_0 < x_1 .. < x_n$ říkáme dělící body intervalu $\langle a,b\rangle$, $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ nazýváme částečný interval. Při ozn. $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ $k \in \hat{n}$ def $\nu(\sigma) = \max_{k\in\hat{n}} \Delta_k$ normu rozdělení σ.

Zjemnění rozdělení: Nechť σ a σ' jsou rozdělení int. $\langle a,b\rangle$, přičemž $\sigma \subset \sigma'$! Pak σ' je zjemnění rozd. σ. $\nu(\sigma) \geq \nu(\sigma')$. σ_1, σ_2 rozdel. $\langle a,b\rangle$, $\sigma_1 \cup \sigma_2$ společné zjem.

Horní a dolní součet: Nechť f je omezená na $\langle a,b\rangle$, $\sigma = \{x_0 .. x_n\}$, $x_0 = a$, $x_n = b$ rozdel. int $\langle a,b\rangle$
Ozn: $M_i = \sup_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)$ $m_i = \inf_{x\in\langle x_{i-1},x_i\rangle} f(x)$ $\forall i = 1..n$. Pak $S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i$

nazveme horní a dolní ~~int~~ součet. $s(\sigma) = \sum m_i \Delta_i$
· množina horních & dolních součtů je omezená
· pro f omezenou na $\langle a,b\rangle$ a σ_1, σ_2 dvě rozdělení na $\langle a,b\rangle$ je $s(\sigma_1) \leq S(\sigma_2)$

Horní a dolní int. s.: Nechť f je omezená na $\langle a,b\rangle$. Infimum množiny horních a supremum dolních součtů nazveme horním a dolním int. součtem fce f a značíme

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_\sigma S(\sigma) \qquad \underline{\int_a^b} f = \sup_\sigma s(\sigma)$$

platí, že $\underline{\int_a^b} \leq \overline{\int_a^b} f$.

Riemannův int v R: Nechť f je fce omezená na $\langle a,b\rangle$. Je-li $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ říkáme, že f má v $\langle a,b\rangle$ RI. Společnou hodnotu hor. a dol. int. součtu znač. $\int_a^b f$ v $\int_a^b f(x)dx$.
O fci f říkáme, že je integrovatelná na $\langle a,b\rangle$.

Nutná & postačující podm. $\exists \int$
Nechť f je omezená na $\langle a,b\rangle$. $\int_a^b f \; \exists \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \sigma \text{ pro } \langle a,b\rangle)(S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon)$

Důsledek. Nechť $-\infty < a \leq c < d \leq b < +\infty$. Je-li f integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ pak je integrovatelná na $\langle c,d\rangle$.
Nechť $-\infty < a < c < b < +\infty$. Je-li f integr. v $\langle a,c\rangle$, $\langle c,b\rangle \Rightarrow$ int $\langle a,b\rangle$

spojitost v $\langle a,b\rangle \Rightarrow$ integrabilita v $\langle a,b\rangle$
monotonie –"– $\Rightarrow$ –"–
SPOJITOST a MONOTONIE nejsou nutnou podmínkou $\exists \int$
f má integrál v $\langle a,b\rangle \rightarrow f$ má v $\langle a,b\rangle$ ∞ mnoho bodů spojitosti.

Normální rozdělení intervalu: Nechť $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rozdělení intervalu $\langle a,b\rangle$ nazveme normální, když $\lim_{n\to\infty} V(\sigma_n)=0$

Horní & dolní int. součet jako limita
Nechť f je omezená na $\langle a,b\rangle$ a nechť $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je libovolná normální posloupnost rozdělení. Pak $\underline{\int_a^b} f=\lim_{n\to\infty} s(\sigma_n)$ $\overline{\int_a^b} f=\lim_{n\to\infty} S(\sigma_n)$

Poznámka: Změna hodnoty f v konečném množství bodů nezmění hodnotu horní/dolního IS.

Integrální součet J: Nechť f je omezená na $\langle a,b\rangle$, $\sigma=\{\ \}$ $x_0=a$, $x_n=b$ je rozdělení $\langle a,b\rangle$. Sumu $J(\sigma)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta i$ $\xi_i\in\langle x_{i-1},x_i\rangle\ \forall i\in\hat{n}$ nazýváme integr. součet f s rozděl. σ.

Základní věta int. počtu: Nechť je fce omezená na $\langle a,b\rangle$.
$\int_a^b f\ \exists \Leftrightarrow \forall$ normální posloupnost rozdělení $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost $(J(\sigma_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentní. V případě $\exists\int_a^b f$ je $\int_a^b=\lim_{n\to\infty} J(\sigma_n)$

Vlastnosti: Nechť f je integrovatelná v $\langle a,b\rangle$. Pak def: $\int_b^a f=-\int_a^b f$.
a říkáme, že f má integrál od b do a.
Nechť $a\in Dom(f)$. Pak def. $\int_a^a f:=0$ a říkáme, že f má $\int$ od a do a.

Linearita RI: Nechť $\alpha, a, b\in\mathbb{R}$ a f, g má $\int$ od a do b. Pak fce αf, $f+g$ mají $\int$ od a do b a platí $\int_a^b(\alpha f)=\alpha\int_a^b f$ i $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$.
Z $\exists\int_a^b(f+g)\ \cancel{\Rightarrow}\ \exists\int_a^b f+\int_a^b g$ (Dirichlet)

Aditivita v mezích: Nechť $a,b,c\in\mathbb{R}$ a nechť $\exists$ alespoň dva z integrálů $\int_a^b f$, $\int_a^c f$, $\int_c^b f$. Pak $\exists$ i třetí integrál a platí: $\int_a^b f=\int_a^c+\int_c^b f$.

· Nechť f omezená má kon. počet skoků v $c_1,\dots c_k$, $a\leq c_1<\dots<c_k\leq b$
if $\exists\int_{c_{i-1}}^{c_i} f\Rightarrow\exists\int_a^b f$ (dva body nezmění hodnotu integrálu + aditivita v mezích)

O nerovnostech v integrálu
Nechť funkce f,g jsou integrovatelné v $\langle a,b\rangle$. Je-li $f(x)\leq g(x)$ pro $\forall x\in\langle a,b\rangle$
$\Rightarrow\int_a^b f\leq\int_a^b g$ (platí i pro ostrou nerovnost)

III.

Číselná řada: Nechť $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je číselná posloupnost. Posloupnost jejích částečných součtů $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definujeme vztahem $s_n = a_1 + \dots + a_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$. Dvojici posloupností $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$ nazýváme číselnou řadou a značíme je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde a_n nazýváme n-tým členem číselné řady. Existuje-li konečná limita $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, říkáme, že řada konverguje a má součet s. V opačném případě řada diverguje (podstatně if $\lim s_n \exists$ nevlastní, osciluje if $\lim \nexists$)

Charakter řad: Řady $\sum a_n, \sum b_n$ mají stejný charakter, když obě současně konvergují, resp. podstatně divergují, resp. oscilují. Změna hodnot konečně mnoho (členů) indexů neovlivní charakter řady. Spec. při vynechání a konvergenci se změní součet.

Nutná podmínka konvergence: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Konverguje $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

① O aritmetice řad: Nechť $\sum a_n, \sum b_n$ jsou číselné řady.

$\sum a_n, \sum b_n$ K $\Rightarrow \sum (a_n + b_n)$ K

$\sum a_n$ K; $\sum b_n$ D $\Rightarrow \sum (a_n + b_n)$ D

$\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \Rightarrow \sum a_n$ & $\sum \alpha a_n$ mají stejný charakter

Bolzano-Cauchyho kritérium konvergence: $\sum a_n$ K $\Leftrightarrow$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n\in\mathbb{N}, n > n_0)(\forall p\in\mathbb{N})\left(\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_n\right| < \varepsilon\right)$

důsledek: BCP & $\Delta \neq$: $\sum |a_n|$ K $\Rightarrow \sum a_n$ K

Absolutní & neabsolutní konvergence: Nechť $\sum a_n$ K řada. Pokud $\sum |a_n|$ K také, pak $\sum a_n$ K absolutně, když $\sum |a_n|$ D $\Rightarrow \sum a_n$ K neabsolutně.

Kladné členy: $\forall \sum a_n$ s kladnými členy jsou buď konvergentní nebo podstatně divergentní.

Srovnávací kritérium:

- Nechť pro nezáporné posloupnosti $(a_n)_n, (b_n)_n$ platí, že $a_n \leq b_n$ od jistého n_0. Divergence $\sum a_n \Rightarrow$ Divergence $\sum b_n$. K $\sum b_n \Rightarrow$ K $\sum a_n$
- Nechť pro kladné posloupnosti platí $(a_n)_n, (b_n)_n$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ od jistého n_0. D $\sum a_n \Rightarrow$ D $\sum b_n$. K $\sum b_n \Rightarrow$ K $\sum a_n$
- Nechť $(a_n)_n, (b_n)_n$ jsou kladné posloupnosti takové, že $\exists L := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

- $L < +\infty$ $\sum b_n K \Rightarrow \sum a_n K$
- $L > 0$ $\sum b_n D \Rightarrow \sum a_n D$
- $0 < L < +\infty \Rightarrow \sum a_n, \sum b_n$ mají stejný charakter.

Konvergence geom. řady: Geom. řada $\sum_{n}^{\infty} q^n$ K $\Leftrightarrow |q| < 1$

Konvergence řady $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ Řada $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ K $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Konvergence řady $\sum \frac{1}{n \ln n}$! vždy DIVERGUJE!

Cauchyovo odmocninové krit. Nechť $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- jestliže $q < 1$, n_0 tak, že pro $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0$ $\sqrt[n]{a_n} \leq q \Rightarrow \sum a_n$ K
- jakmile pro ∞ indexů n platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ D

D'alambertovo kritérium Nechť $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- jestliže $\exists q < 1$, n_0 tak, že $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \Rightarrow \sum a_n$ K
- jakmile $\forall$ indexy od jistého n_0 platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ D

Raabeovo kritérium

Nechť $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Jestliže $\exists \alpha > 1$ a n_0 t. ž. pro $\forall n \in \mathbb{N}$:

$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq \alpha$ pro $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow$ řada $\sum a_n$ K.

Pokud $\exists n_0$, t. ž. $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0$ $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1 \Rightarrow \sum a_n$ D.

Cauchy - limitní tvar

Nechť $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$:
- $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1 \Rightarrow \sum a_n$ K.
- $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1 \Rightarrow \sum a_n$ D.

d'alambert - lim. tvar

Nechť $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \Rightarrow \sum a_n$ K
- $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1 \Rightarrow \sum a_n$ D

Raabe - lim. tvar

Nechť $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n \to \infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha > 1 \Rightarrow \sum a_n$ K
- $\lim_{n \to \infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha < 1 \Rightarrow \sum a_n$ D

Gaussovo kritérium Nechť $(a_n)_n$ je kladná posloupnost, pro niž $\exists q, \alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ a omezená posloupnost $(c_n)_n$ taková, že
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- $(q<1) \vee (q=1 \wedge \alpha > 1) \Rightarrow \sum a_n$ K
- $(q>1) \vee (q=1 \wedge \alpha \leq 1) \Rightarrow \sum a_n$ D
- $\beta \in \mathbb{R}$ $\quad \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\beta} n}$ K $\Leftrightarrow \beta > 1$

Řady s obecnými členy

Dirichletovo kritérium: Nechť $(a_n)_n$ reálná a $(b_n)_n$ je KOMPLEXNÍ posl. splňující
i) $(a_n)_n$ je monotonní posl. a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ řada $\sum b_n$ má omezenou posl. částečných součtů

$\Rightarrow \sum a_n b_n$ K

Abelovo kritérium: Nechť $(a_n)_n$ reálná a $(b_n)_n$ je komplexní posl. splňující:
i) (a_n) monotonní & ~~konvergentní~~ omezená
ii) $\sum b_n$ je konvergentní řada

Pak $\sum a_n b_n$ K

Řada se střídavými znaménky: Nechť $(a_n)_n$ je reálná posloupnost kladných čísel. Řadu $\sum (-1)^{n+1} a_n$ nazýváme řadou se střídavými znaménky.

Leibnizovo kritérium: Nechť $(a_n)_n$ je klesající posloupnost kladných čísel. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum (-1)^{n+1} a_n$ K

Modifikované Gauss. kritérium: Nechť $(a_n)_n$ je kladná posloupnost splňující pro nějaké $q, \alpha \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ a omezenou posloupnost $(c_n)_n$ vztah: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$

- je-li $q>1 \vee q=1$ a $\alpha \leq 0 \Rightarrow \sum (-1)^{n+1} a_n$ D
- je-li $q<1 \vee q=1$ & $\alpha > 1 \Rightarrow \sum (-1)^{n+1} a_n$ KA
- je-li $q=1$ & $\alpha \in (0,1\rangle \Rightarrow \sum (-1)^{n+1} a_n$ KN

Uzávorkování řady: Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost a nechť $(k_n)_{n=0}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel, $k_0 = 0$.

$\sum b_j$ vzniká z $\sum a_n$ $b_1 = \sum_{1}^{k_1} a_j$, $b_2 = \sum_{j=k_1+1}^{k_2} a_j$ ...

Řada $\sum_{1}^{\infty} A_n$, jejíž n-tý člen je definován jako $A_n = a_{k_{n-1}+1} + \dots + a_{k_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ nazýváme uzávorkováním řady $\sum a_n$ podle posl. $(k_n)_0^{+\infty}$.

s_n ... částečný součet $\sum a_n$, S_n ... částečný součet $\sum A_n$, $S_m = s_{k_m}$ $\forall m \in \mathbb{N}$

- $\sum a_n$ K $\Rightarrow$ $\forall$ její uzávorkování K

Uzávorkování řady & charakter (omezení # sčítanců): Nechť $\sum A_n$ je uzávorkování řady $\sum a_n$ podle posloupnosti (k_n). Nechť $\exists M \in \mathbb{N}$ t. ž. $\forall n \in \mathbb{N}$ $k_{n+1} - k_n \leq M$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pak $\sum A_n$ & $\sum a_n$ mají stejný charakter a v případě konvergence i stejný součet.

Přerovnání řady: Nechť $\sum a_n$ číselná řada a $\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce. Pak řadu $\sum a_{\phi(n)}$ nazýváme přerovnáním řady $\sum a_n$ podle ϕ.

- pro $\sum a_n$ reálnou řadu ozn. $a_n^+ := \frac{|a_n| + a_n}{2}$ $a_n^- := \frac{|a_n| - a_n}{2}$

  $\sum a_n$ KA $\Rightarrow$ $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ K a platí $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$

  $\sum a_n$ KN $\Rightarrow$ $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ podstatně divergují.

Vlastnosti přerovnání: Nechť $\sum a_n$ KA. Pak $\forall$ její přerovnání AK se stejným součtem.

Riemannova věta: Nechť $\sum a_n$ KN, reálná řada. Pak lze každému $s \in \overline{\mathbb{R}}$ $\exists$ přerovnání $\sum a_{\phi(n)}$, jež má součet s. Rovněž $\exists$ i oscilující přerovnání $\sum a_{\phi(n)}$.

Součin řad: Nechť $\sum a_n$ & $\sum b_n$ číselné řady a $\phi: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Pro $\forall m \in \mathbb{N}$ položme $c_m = a_i b_j$, $m = \phi(i,j)$. Pak $\sum c_m$ nazýváme součinem řad $\sum a_n$ a $\sum b_n$ a značíme $\sum_{i,j} a_i b_j$.

- pro $\sum a_n, \sum b_n$ AK je jejich libovolný součin AK a platí $\sum_{i,j} a_i b_j = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$

Součinová řada: Nechť $\sum_1^\infty a_n$ & $\sum_1^\infty b_n$ jsou číselné řady. Řadu $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}\right)$ nazýváme součinovou řadou řad $\sum a_n$, $\sum b_n$.

$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n$

- souč. řada je zobecnění jednoho konkrétního součinu dvou důsledek pro AK řady: $\sum a_n$ AK & $\sum b_n$ AK $\Rightarrow$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}\right)$$

pro indexaci od 0

$$\left(\sum_0^\infty a_n\right)\left(\sum_0^\infty b_n\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{k-1} b_{n-k-1}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-2} a_k b_{n-k-2}\right) = \underline{\sum_0^\infty \sum_0^n a_k b_{n-k}}$$

O součinu AK a K řad

$\sum a_n$ AK $\sum b_n$ K $\Rightarrow$ součinová řada K k $(\sum a_n)(\sum b_n)$

RADY FCÍ

DEF: Nechť je dána posloupnost fcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ def na na neprázdné množině $M \subset \mathbb{R}$. Potom $f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)+\dots$ nazýváme řadou fcí na M ozn. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

DEF: Nechť je dána $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na M. Fci $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ $\begin{matrix} n\in\mathbb{N} \\ x\in M \end{matrix}$ nazýváme n-tý částečný součet řady a $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů dané řady.

DEF: Nechť je dána řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na M. Nechť $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ je posl. č. s. Řekneme, že řada K v $c \in M$, jestliže K číselná posloupnost $(s_n(c))_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že řada K (bodově) na $N \subset M$, jestliže K v každém bodě množiny N. Vlastní limitu $s(x) := \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ posloupn. částečných součtů pak nazýváme součtem řady a píšeme $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. $Dom(s)$ množinu $\forall c \in M$, pro něž $(s_n(c))_{n=1}^{\infty}$ K, budeme dále nazývat obor konv. σ

VĚTA (B-C) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ K na M v $c \in M \iff \forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ m>n>n_0 \Rightarrow$

$$\left|\sum_{j=1}^{m} f_j(c) - \sum_{j=1}^{n} f_j(c)\right| < \varepsilon$$

$f_{n+1} + \quad f_m$

Ⓥ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je K mající na neprázdné množině M součet $s(x)$. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je K ~~na~~ -//- součet $\tilde{s}(x)$. Nechť $M \cap N \neq \emptyset$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x)+g_n(x))$ K na $M \cap N$ a jejím součtem na $M \cap N$ je fce $s(x)+\tilde{s}(x)$.

Ⓥ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ K na $\emptyset \neq M$ součet $s(x)$. Pak $\forall c \in \mathbb{R}$ K na M také $\sum_{n=1}^{\infty} c f_n(x)$ a součtem je $c\,s(x)$.

Ⓥ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ K na $\emptyset \neq M$ součet $s(x)$. Nechť je dále daná fce $g(x): M \to \mathbb{R}$, jež je omezená na M. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} g(x) f_n(x)$ K na M a jejím součtem na M je $g(x)s(x)$.

Ⓥ $k \in \mathbb{N}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)$ mají stejný charakter K, div., osc.
Součet $s(x)$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a $\delta(x)$ součet řady $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)$, pak platí $s(x) = f_1(x) + \ldots + f_k(x) + \delta(x)$ za předpokladu, že obě K.

Ⓥ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ K na M, jejímž součtem na M je $s(x)$. Nechť na M zadána konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, mající na M součet $\delta(x)$. Nechť $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in M$: $f_n(x) \leq g_n(x)$. $\Rightarrow \forall x \in M$: $s(x) \leq \delta(x)$.

Ⓥ nutná podmínka bodové K: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ K na M. $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ na M.

DEF: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na M. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ s nezápornými členy, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in M$ platí $f_n(x) \geq 0$.

Ⓥ Na M $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ s nezápornými členy. Nechť pro jakékoli $c \in M$ je číselná posloupnost jejích částečných součtů shora omezená. Pak je $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ K na M.

Ⓥ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ s nezáp. členy na M. $\exists k \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq k$ $\forall x \in M$ $f_n(x) \leq g_n(x)$
index
Pak je-li $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ K, je K i $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. $\sum f\ D \Rightarrow \sum g\ D$

Ⓥ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ s nezáp. členy na M. $\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, \forall x \in M$ $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \leq \frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)}$

$\sum g_n(x)$ K $\Rightarrow \sum f_n(x)$ K

DEF: $\sum f_n(x), \sum g_n(x)$ na M. $\exists$-li $n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $\forall x \in M$ $|f_n(x)| \leq g_n(x)$

$\sum g_n(x)$ majorantní řada k $\sum f_n(x)$

Ⓥ (srovnávací kritérium): Nechť $\sum f_n(x)$ major. k $\sum g_n(x)$ na M.

Pak $\sum g_n(x)$ K na $M \Rightarrow \sum f_n(x)$; $\sum |f_n(x)|$ K na M.

$\sum |f_n(x)|$ K na $M \Rightarrow \sum f_n(x)$ K na M

AK a NK

Ⓥ d'Alembert. kritérium: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na M. $\forall x \in M$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$

$f_n(x) \neq 0$. Jestliže pro vybrané $c \in M$ platí $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)}\right| < 1$ $c \in \mathcal{O}$.
>1 $\notin$

Ⓥ Cauchy: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na M. $\forall c \in M$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(c)|} < 1$ $c \in \mathcal{O}$.

Ⓥ Integrální: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na M nezáporné členy. nechť $c \in M$ a $(f_n(c))_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí

a nechť $\exists$ spojitá nerostoucí fce $h(x): \langle 1, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ tak, že

$h(n) = f_n(c)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak $c \in \mathcal{O} \Leftrightarrow \exists \int_1^{\infty} h(x)\,dx$ a je vlastní.

Ⓥ Raabeovo: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na M s nezápornými členy. $\forall x \in M$ $\exists n_0 \in M$ $\forall n \geq n_0$

$f_n(x) \neq 0$. Jestliže pro vybrané $c \in M$ platí nerovnost

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{f_{n+1}(c)}{f_n(c)}\right) > 1 \quad c \in \mathcal{O}.$$
$<$ $\notin$

Ⓥ Leibnizovo kritérium: Nechť je na M zadána $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. $c \in M$

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\operatorname{sgn}(f_n(c)) = -\operatorname{sgn}(f_{n+1}(c))$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_{n+1}(c)| \leq |f_n(c)|$
3. $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(c)$ a platí $\lim_{n\to\infty} f_n(c) = 0$

$\Rightarrow c \in \mathcal{O}$

V: Zob. Raabe: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $c \in M$ 1. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\operatorname{sgn}(f_n(c)) = -\operatorname{sgn}(f_{n+1}(c))$

2. $\exists$ vlastní $\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{f_n(c)}{f_{n+1}(c)}\right| - 1\right) = q$

$q > 1$ AK v c

$q \in (0,1)$ K v c relativní

$q < 0$ D v c

DEF: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows s(x)$ na $M \subset \mathbb{R}$, jestliže posloupnost jejích částeč. součtů konverguje stejnoměrně na M k fci $s(x)$.

$\rightrightarrows \Rightarrow$ K bodově

$\rightrightarrows \Rightarrow$ součet řady je fce spojitá na M.

B-C $\sum f_n(x) \overset{M \subset \mathbb{R}}{\rightrightarrows}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ m, n \in \mathbb{N}\ m \geq n \geq n_0\ \forall x \in M\ |f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_m(x)| < \varepsilon$

NUTNÁ P $\rightrightarrows$

$\sum f_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows}$ $(f_n(x))_{n=1}^{\infty} \rightrightarrows$ k nulové fci

Weier. krit.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K číselná řada, $f_n(x)$ jsou fce $\forall x \in M\ \forall n \in \mathbb{N}\ |f_n(x)| \leq a_n$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \rightrightarrows$ na M. ($\sum f_n(x)$ K regulérně)

V: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows$ pro $\delta > 0$ na $(c, c+\delta)$ ke svému součtu $s(x)$.

Nechť každá fce $f_n(x)$ má vlastní limitu $\lim_{x \to c+} f_n(x) = b_n$

$\sum b_n$ K, $\exists \lim_{x\to c+} s(x)$ a jsou si rovny

$$\sum \lim_{x \to c+} f_n(x) = \lim_{x\to c+} \sum f_n(x)$$

$\sum f_n(x) \overset{\langle a,b\rangle}{\rightrightarrows} s(x)$

$$\sum \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b s(x)\,dx = \int_a^b \sum f_n(x)\,dx$$

• **Mocninné řady**: Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $c \in \mathbb{R}$. Potom řadu funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ nazýváme mocn. řadou se středem v bodě c.

střed — n-tý koef. mocninné řady

$\mathcal{O}$ - obor konv., $s(x)$ - součet

Ⓥ (abel. lemma): Nechť $x_0 \in \mathcal{O}$ pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nechť $x_0 \neq 0$. Pak $(-|x_0|; |x_0|) \subset \mathcal{O}$.

Ⓥ Nechť $x_0 \notin \mathcal{O}$ pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Pak $((-\infty, -|x_0|) \cup (|x_0|, +\infty)) \cap \mathcal{O} = \emptyset$

Obor konv. nikdy není prázdný: $\mathcal{O} = \{0\}^{\nwarrow c}$; $\mathcal{O} = \mathbb{R}$, $\mathcal{O}$ = symetr. int. centrovaný kolem $x=c$

DEF: Nechť je dána řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$. Pak $\sup \mathcal{O} - c$ nazýváme poloměr konv. řady. Množinu $(c-R, c+R)$, kde R je symbol je poloměr konv., nazveme interval konvergence.

$(-R,R)$; $\langle -R,R \rangle$, $(-R,R\rangle$, $\langle -R,R)$

Ⓥ Existuje-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hodnoty $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$; $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, pak pro poloměr konverg. této řady platí:

$R = \frac{1}{L}$; $L = +\infty \Rightarrow R = 0$; $L = 0 \Rightarrow R = +\infty$

Ⓥ Mocninná řada konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu, který je podmnožinou jejího oboru konvergence.

$\langle -r, r \rangle \subset (-R, R) \subset \mathcal{O}$

Ⓥ Nechť $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ je mocninná řada s kladným poloměrem konv. R. Pak $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ je spojitou fcí na intervalu konvergence.

Konverguje-li řada $\sum a_n R^n$, pak je navíc $s(x)$ také spojitá v bodě $x = R$ zleva/zprava

Ⓥ Řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ mají stejný poloměr konverg.

Ⓥ Nechť $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ má kladný poloměr konvergence. Ozn. $s(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Pak $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ konverguje na $(-R,R)$ a označíme-li $S(x)$ její součet, pak $S(x)$ je primitivní fce k $s(x)$, tj. $S(x)=\int_0^x s(y)\,dy$.

Ⓥ Řadu $\sum a_n x^n$ s kladným polom. konv. lze vždy derivovat člen po členu (a to i opakovaně) na jejím intervalu konvergence

(obor nemusí)

$s'(x)$ - spojitá derivace

$s(x)$ na $(-R,R)$ spojité der. všech řádů

$\langle -R,R\rangle \to (-R,R)$

Tayl. řada: $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ $(x-c)^n$ - monom

↑ $U_\delta(c)$ analytická

DEF: Nechť $f(x): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je libovolná fce. Řekneme, že $f(x)$ je analytická v bodě $c\in\mathbb{R}$, pokud existují koeficienty $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ tak, že
$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ a tato rovnost platí alespoň na jistém $U_\delta(c)$.
Pro analytické fce říkáme, že řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ je Tayl. řadou fce $f(x)$ v bodě c. Pro $c=0$ užíváme rovněž pojmu Maclaurin. řada.

Ⓥ Taylorova věta: Nechť $f(x): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je analytická v $c\in\mathbb{R}$. Pak $f(x)$ je nekonečně diferencovatelná [ozn. $f(x)\in C^\infty(U_\delta(c))$] a navíc pro koef. Tayl. řady platí: $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)$.

Taylorův vzorec: Nechť $f(x)\in C^n(\langle a,b\rangle)$ a nechť na (a,b) (x,c) $\exists f^{(n+1)}(x)$.
Zvolme $c\neq x$ libovolně v $\langle a,b\rangle$, pak existuje $\xi\in$ ~~(a,b)~~ (c,x) tak, že

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n+R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

$f(x)=T_{f,n}(x)+R_{n+1}(x)$

polynom řádu n — Lagr. zbytek

n-tý část. součet z Tayl. řady

if $c=0 \to T_{f,n}(x)$ Maclaur. polynom

(V) Nechť $C^{\infty}(\langle a,b\rangle) \ni f(x)$. Nechť $c \neq x$ jsou zvoleny libovolně v $\langle a,b\rangle$ a nechť $\exists K \in \mathbb{R}_0^+$ tak, že $\forall t \in \left(\begin{smallmatrix} c,x \\ x,c \end{smallmatrix}\right)$ platí, že $|f^{(k)}(t)| \leq K \quad (\forall k \in \mathbb{N}_0)$

Pak $\lim_{n \to \infty} R_{n+1}(x) = 0$.

alternativum: (V): Nechť fce $f(x)$ má v bodě $c \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů. Potom mocninná řada $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ je konvergentní a má součet $f(x)$ právě pro taková $x \in \mathbb{R}$, pro která platí, že $\lim_{n \to +\infty} R_{n+1}(x) = 0$, kde R_{n+1} je Lagrangeův zbytek po n členech Tay. vzorce.

Základní rozvoje:

$e^x \Rightarrow T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \qquad \mathbb{R}$

$\sin x \Rightarrow T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \mathbb{R}$

$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \mathbb{R}$

$\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \qquad (-1, 1\rangle$

$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \qquad (-1, 1\rangle$

$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \begin{cases} \mathbb{R} & \alpha \in \mathbb{N}_0 \\ \langle -1, 1\rangle & \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N} \\ (-1, 1\rangle & \alpha \in (-1, 0) \\ (-1, 1) & \alpha \leq -1 \end{cases}$

$\ln(1-x) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \langle -1, 1)$

$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

V.

Parciální derivace ve směru $\vec{s}$:

$\vec{s} \neq \vec{0}$; $\vec{s} \in E^n$ $\vec{s}$ má rozměr def. oboru.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{a}) := \frac{1}{\|\vec{s}\|} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a}+h\vec{s}) - f(\vec{a})}{h}$$, pokud PS existuje a je vlastní

$f(\vec{x}): E^n \to \mathbb{R}$ def. na okolí bodu $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots a_n) \in E^n$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k}(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a}+h\vec{e}_k) - f(\vec{a})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots a_k+h, \dots a_n) - f(\vec{a})}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})$$

Totální derivace:

Nechť $f(\vec{x}): E^n \to \mathbb{R}$ je def. na jistém okolí $\vec{a} \in E^n$. Nechť $\forall k \in \mathbb{R}$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})$

Tot. der. $f(\vec{x})$ v $\vec{a}$ rozumíme

$$\frac{Df}{D\vec{x}}(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}), \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\right) \in \mathbb{R}^n$$ - VEKTOR VŠECH PARC. DERIVACÍ

jako

gradient $f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a})$ *

Parc. der.

$\Psi_k(s) = f(a_1, a_2, \dots a_{k-1}, s, a_{k+1}, \dots a_n)$ v bodě $s = a_k$. převod na der. fce jedné proměnné

$M_k = \{\vec{x} \in Dom(f). \ x_1 = a_1 \wedge x_2 = a_2, \dots \wedge x_{k-1} = a_{k-1} \wedge x_{k+1} = a_{k+1}, \dots x_n = a_n\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = \frac{\partial \Psi_k}{\partial s}(a_k)$$

$f(\vec{x}): E^n \to \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

* $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ nabla - operátor

- $\frac{\partial f}{\partial (c.\vec{e}_k)}(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})$

Ⓥ Vlastnosti parc. der.: Nechť $f(\vec{x}), g(\vec{x}): \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ jsou fce definované na jistém okolí $U(\vec{a})$ bodu $\vec{a} \in \mathbb{E}^n$. Nechť $f(\vec{x}), g(\vec{x})$ mají parc. derivace podle x_k a nechť $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_k}(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) + \frac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{a}) \quad ; \quad \frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_k}(\vec{a}) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})$$

$$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_k}(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) g(\vec{a}) + f(\vec{a}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{a}) \quad ; \quad \frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_k}(\vec{a}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) g(\vec{a}) - f(\vec{a}) \frac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{a})}{g^2(a)}$$

Ⓥ Má-li $f(\vec{x})$ v $\vec{a} \in \mathbb{E}^n$ parciální der. $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, pak je v tomto bodě spojitá vzhledem k množině $\quad$ if $g(\vec{a}) \neq 0$

$$M = \{(a_1, a_2, \dots a_{k-1}, \varepsilon, a_{k+1}, \dots a_n) \in \mathrm{Dom}(f) : \varepsilon \in \mathbb{R}\}$$

Ⓥ o derivaci složené fce

Nechť jsou dány fce $f_1(\vec{x}), \dots, f_s(\vec{x}): \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$, jež jsou spojité v bodě $\vec{a} \in \mathbb{E}^n$ a mají v bodě $\vec{a}$ derivaci (parc. der. podle všech proměnných)

Nechť je dána fce $g(\vec{y}): \mathbb{E}^s \mapsto \mathbb{R}$, jež je spojitá v bodě $\vec{b} = (f_1(\vec{a}), f_2(\vec{a}), \dots, f_s(\vec{a}))$ a má v bodě $\vec{b}$ derivaci. (parc. der podle všech prom)

Nechť fce $(g \circ \vec{f})(\vec{x}): \mathbb{E}^n \mapsto \mathbb{R}$ def. na jistém okolí bodu $\vec{a}$.

Pak pro libovolné $i \in \hat{n}$ platí: $\displaystyle \frac{\partial(g \circ \vec{f})}{\partial x_i}(\vec{a}) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial g}{\partial f_j}(\vec{b}) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{a})$ Jacobiho matice

DEF: Nechť je fce $f(\vec{x}): \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ def. na jistém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbb{E}^n$ a $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Pak k-tou parc. derivací $f(\vec{x})$ v $\vec{a}$ podle proměnných $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_k}$ rozumíme následující hodnotu

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(\vec{a}) := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \Bigg(\frac{\partial^{k-1} f}{\underbrace{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k-1}}}_{F}} \Bigg)(\vec{a})$$, kde je na F nahlíženo jako na fci $\vec{x}$.

(V) Nechť $\exists \frac{\partial f}{\partial x_k}$ i $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ všude na jistém okolí bodu $\vec{a} \in Dom(f)$.
Nechť $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{a})$ $\exists$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{x})$ je na okolí bodu $\vec{a}$ spojitou fcí,
pak $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{a}).$$

DEF: Nechť je dána $f(\vec{x}): E^n \to \mathbb{R}$ a nechť $\exists$ všechny její parc. derivace druhého řádu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{a})$ v $\vec{a} \in Dom(f)$. Pak matici

$$H|_{\vec{a}} := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{a})\right)_{j,k=1}^{n}$$ budeme nazývat Hessovou maticí fce $f(\vec{x})$ v $\vec{a}$.

Determinant matice - hessián.

(V) Jsou-li všechny parciální derivace druhého řádu spojitými fcemi, pak je Hess. matice symetrická.

DEF: Nechť $G \subset E^n$ je otevřenou množinou a $f(\vec{x}): E^n \to \mathbb{R}$ je fce n proměnných definovanou na množině G. Řekneme, že fce $f(\vec{x})$ je třídy $\mathcal{C}^m$ na množině G a ozn. $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}^m(G)$, jestliže pro libovolnou kombinaci indexů $i_1 .. i_m$ z množiny $\hat{n}$ je parciální derivace $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} .. \partial x_{i_m}}$ spojitá v každém bodě množiny G.
Řekneme, že fce $f(\vec{x})$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$ na množině M a označíme $f(\vec{x}) \in C^\infty(G)$ jestliže všechny parc. derivace (všech řádů) fce $f(\vec{x})$ jsou spojité v každém bodě množiny G. Fce třídy $C^\infty(G)$ nazýváme také hladkými fcemi na G.

$C^0(G)$ - spojité fce
$= C(G)$

$f(\vec{x}) \in C^m(G) \Rightarrow f(\vec{x}) \in C^{m-1}(G) \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Ⓥ - o přírůstku: Nechť $\mathbb{I}$ je libovolný otevřený interval v $\mathbb{E}^n$ a $f(\vec{x})$ má derivaci všude v I. Pak $\forall \vec{x}, \vec{y} \in I$ existují vektory $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots \vec{\xi}_n \in I$ tak, že $f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi}_i)(x_i - y_i)$

Ⓥ Nechť má fce $f(\vec{x})$ omezenou derivaci na jistém okolí bodu $\vec{a}$. Pak je $f(\vec{x})$ spojitá v $\vec{a}$.

$D \Rightarrow S \Rightarrow L$

$D\vec{a} \not\Rightarrow S\vec{a}$

$\exists D$ ale není S nemusí

Totální diferenciál: Řekneme, že $f(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a}$ totální diferenciál $df_{\vec{a}}(\vec{h}): E^n \mapsto \mathbb{R}$, pokud platí: lin. funkce

1) $f(\vec{x})$ je def. alespoň na $U_\Delta(\vec{a})$
2) $df_{\vec{a}}(\vec{h}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k \quad (\alpha_k \in \mathbb{R} \ldots$ koef. TD$)$ lineární
3) $\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\eta(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$, kde $f(\vec{a}+\vec{h}) - f(\vec{a}) = df_{\vec{a}}(\vec{h}) + \eta(\vec{h}) \quad \vec{h} \in U_\delta(\vec{0})$

kvalita definice — reálné chování — lineární odhad odchylky — malý vektor

DEF: tečná nadrovina: graf fce $df_{\vec{a}}(\vec{h})$ — lineární aproximace je tečna

Ⓥ $TD_{\vec{a}} \Rightarrow S_{\vec{a}}$ $\quad f(\vec{a}+\vec{h}) - f(\vec{a}) = \sum \alpha_k h_k + \underbrace{\eta(\vec{h})}_{\substack{\vec{h}\to\vec{0} \\ \eta \to \vec{0}}}$ $\quad \eta \to \vec{0}$ etc. $\quad \vec{h} \to \vec{0} \Rightarrow f(\vec{a}+\vec{h}) \to f(\vec{a})$

Ⓥ **koef. TD**: $f(\vec{x}): E^n \to \mathbb{R}$ má TD v $\vec{a}$ tak koef. $\alpha_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) \quad k \in \hat{n}$

Ⓥ $\exists \Delta > 0: f(\vec{x}) \in C^1(U_\Delta(\vec{a})) \Rightarrow f(\vec{x})$ má TD v $\vec{a} \Rightarrow f(\vec{x})$ je spojitá v $\vec{a}$

Ⓥ Má-li fce $f(\vec{x}): E^n \to \mathbb{R}$ TD v $\vec{a}$, pak pro lib. (nenul) směr $\vec{s}$ platí
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{a}) = \frac{1}{\|\vec{s}\|} \langle \operatorname{grad} f(\vec{a}) | \vec{s} \rangle$$

rekurence TD: $g(x_1, x_2) \overset{ozn}{=} df_{\vec{x}}(h_1, h_2) \quad \exists$-li $dg_{\vec{a}}(h_1, h_2) \Rightarrow$ ozn $d^2 f_{\vec{a}}(h_1, h_2)$

kvadratická forma v $\mathbb{R}^n$

Ⓥ Je-li $f(\vec{x}) \in C^m(U_\Delta(\vec{a}))$, pak jsou všechny derivace řádů $k \le m$ vypočtené v bodě $\vec{a}$ nezávislé na pořadí, v němž bylo derivováno.

Funkc. vektory / vektor. analýza

$f_1(\vec{x}), \dots, f_s(\vec{x}) : E^r \to \mathbb{R}$ def. alespoň na $M \subset E^r$. Funkcionálním vektorem $\vec{F}(\vec{x}) : M \subset E^r \mapsto E^s$ rozumíme vektor definovaný předpisem $\vec{F}(\vec{x}) := (f_1(\vec{x}), \dots, f_s(\vec{x})) \quad \forall \vec{x} \in M$

Ⓥ Nechť mají všechny složky $f_1(\vec{x}), \dots, f_s(\vec{x})$ gradient v $\vec{a} \in M$. Pak Jacobiho maticí funkcionálního vektoru $\vec{F}(\vec{x})$ rozumíme matici

$$\frac{D\vec{F}}{D\vec{x}}(\vec{a}) := \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(\vec{a}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_s(\vec{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_s}{\partial x_r}(\vec{a}) \end{pmatrix} \qquad [s \times r]$$

$\vec{F}(\vec{x}) \in C^3(G) \Leftrightarrow \forall k \in \hat{s} : f_k(\vec{x}) \in C^3(G)$

$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$

I. divergence (vekt. pole)

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \overset{= f_k(\vec{x})}{F_k}}{\partial x_k}(\vec{x})$$

– skalární fce

pouze if $s = r$

$\dim(\mathcal{D}om(\vec{F})) = \dim(Ran(\vec{F}))$

II. rotace

$(\dim(\mathcal{D}om\,\vec{F}) = 3 = \dim(Ran(F)))$

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}) := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(\vec{x}),\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\vec{x}) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\vec{x}),\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\vec{x}) \right)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$\sum \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}$

III. Laplaceův operátor

$$\Delta \vec{F} = \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_k^2}}_{\Delta f_1} ; \underbrace{\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_k^2}}_{\Delta f_2} ; \dots ; \underbrace{\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_r}{\partial x_r^2}}_{\Delta f_r} \Big)$$

~~III~~ ~~III~~ IV gradient (ze skal. fce n-proměnných generuje funkcionální vektor n-proměnných)

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\right)$$

VAZBY:

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \frac{Df}{D\vec{x}}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f(\vec{x}) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f(\vec{x}) = \Delta f(\vec{x})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) - \Delta \vec{F}(\vec{x})$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}(\vec{x}) \times \vec{G}(\vec{x})) = \langle \vec{G}(\vec{x}) | \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}) \rangle - \langle \vec{F}(\vec{x}) | \operatorname{rot} \vec{G}(\vec{x}) \rangle$$

$$\operatorname{div}(\vec{f}\vec{F}) = \vec{f} \operatorname{div} \vec{F} + \langle \vec{F} | \operatorname{grad} f \rangle$$

V: Jsou-li všechny vnitřní fce spojité v $\vec{a}$ a je-li vnější fce spojitá v $\vec{b} = \vec{f}(\vec{a})$, tak je fce složená spojitá v $\vec{a}$

EXTRÉMY FCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

V o kompaktní množině: Je-li $K \subset E^n$ kompaktní množina a $f(\vec{x}): E^n \to R$ spojitá fce na K, pak $f(K)$ je rovněž kompaktní.

Lokální extrémy: $f(\vec{x}): E^n \to R$ $M \subset Dom(f), \emptyset \neq M \subset E^n$ pevně zvolená
Řekneme, že $f(\vec{x})$ má v bodě $\vec{a} \in M$ ostré/neostré lokální minimum (maxima), pokud $\exists \delta > 0$ tak, že $\vec{x} \in U_\delta^*(\vec{a}) \cap M \Rightarrow f(\vec{x}) > f(\vec{a})$ / $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$

Globální extrémy: Řekneme, že "redukovaná" $f(\vec{x})$ má v $\vec{a}$ ostré/neostré globální min (max), pokud platí $\vec{x} \in M \setminus \{\vec{a}\} \Rightarrow f(\vec{x}) > f(\vec{a})$ / $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$
Je-li bod $\vec{a} \in M$ bodem (neostrého) glob. minima/maxima zapisujeme tento fakt takto $\vec{a} = \underset{\vec{x} \in M}{\operatorname{argmin}} f(\vec{x})$ / $\vec{a} = \underset{\vec{x} \in M}{\operatorname{argmax}} f(\vec{x})$

(V) Je-li $\vec{a} = \underset{\vec{x} \in M}{\operatorname{argmin}} f(\vec{x})$, pak $\vec{a}$ je jistě neostrým lokálním minimem fce $f(\vec{x})$ na M.

(V) Je-li $\vec{a}$ ostrým / neostrým minimem / maximem $f(\vec{x})$ na množině M a jestliže $N \subset M \wedge \vec{a} \in N$, pak $\vec{a}$ je -||- $f(\vec{x})$ na N. (dědičnost)

(V) - o ∃ lok. extrém: Je-li K neprázdná kompaktní množina z $\mathbb{E}^r$ a jestliže $K \subset Dom(f)$ ($\wedge f(x)$ spojitá na K), pak $f(\vec{x})$ nabývá na K globálního maxima i minima

(V) nutná podmínka pro lokální extrém: Nechť má $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ lokální extrém vzhledem k množině $M \subset \mathbb{E}^r$. Nechť $\exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})$. Pak $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = 0$.

grad $f(\vec{a}) = \vec{0}$

DEF: Je-li pro nějaké $\vec{a} \in Dom(\vec{f})$ derivace $\frac{D f}{D \vec{x}}(\vec{a}) = 0$, pak $\vec{a}$ nazveme stacionárním bodem fce $f(\vec{x})$.
Nenastává-li ve stacion. bodě žádný lok. extrém, tak takový bod nazveme sedlový bod.

Extrém: stacionární body nebo tam, kde některá parc. der. neexistuje (hranice

(V) postačující podmínka lok. extrému: Nechť $\vec{a}$ je stacionárním bodem fce $f(\vec{x})$. Nechť $\exists \Delta > 0$ tak, že $f(\vec{x}) \in C^3(U_\Delta(\vec{a}))$.

1) $d^2 f_{\vec{a}}(d\vec{x}) \triangleright 0 \Rightarrow$ v $\vec{a}$ je ostré lokální minimum

2) $d^2 f_{\vec{a}}(d\vec{x}) \triangleleft 0 \Rightarrow$ -||- ostré lok. maximum

3) $d^2 f_{\vec{a}}(d\vec{x}) \triangleleft\triangleright 0 \Rightarrow \vec{a}$ sedlový bod

REFORMULACE: $d^2 f_{\vec{a}}(d\vec{x}) = (d\vec{x})^T \cdot \mathbb{H}(d\vec{x})$

1) ∀ vlastní čísla Hes. matice jsou kladná $\Rightarrow \vec{a}$ je OL_{min}

2) -||- záporná OL_{max}

3) ∃-li čísla $\lambda, \mu \in \sigma(\mathbb{H}) \wedge \mu > 0 \wedge \lambda < 0$ $\Rightarrow \vec{a}$ je sedlový bod

sylvest. taky ale nezjistím 3) universální převod na □

Vázané extrémy:

V Nechť $A \subset \mathbb{E}^{n+p}$ a je otevřená. Nechť ~~jsou~~ dány $f(\vec{x}), G_1(\vec{x}),$

vazby

$G_2(\vec{x}), \dots, G_p(\vec{x}) : A \to \mathbb{R}$, které jsou spojitě diferencovatelné na A.

vazbové fce

Označme $M := \{\vec{x} \in A \subset \mathbb{E}^{n+p} : G_1(\vec{x}) = 0 \wedge G_2(\vec{x}) = 0 \wedge \dots \wedge G_p(\vec{x}) = 0\}$.

Nechť jacobiho matice $\frac{D\vec{G}}{D\vec{x}} = \frac{D(G_1, G_2, \dots G_p)}{D(x_1, x_2, \dots x_{n+p})}$ má všude na M hodnost rovnou číslu $p \in \mathbb{N}$. Pak pokud $f(\vec{x})$ má lokální extrém vzhledem k M, v bodě $\vec{a} \in \mathbb{E}^{n+p}$, pak existují čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p \in \mathbb{R}$ tak, že

platí $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial x_k}(\vec{a}) = 0 \quad (k \in \widehat{n+p}) \quad \frac{DL}{D\vec{x}}(\vec{a}) = \vec{0}$

Lagr. multiplikátory

tzn. že funkce $L(\vec{x}, \vec{\lambda}) := f(\vec{x}) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j G_j(\vec{x})$ má v $\vec{a}$ stacionární bod.

Lagrangeova rovnice

- Měřitelný prostor jako východisko k zavedení LI
- měř. fce a zákl. věty o měřitelnosti
- 3 etapy LI
- Fub., Leb. věta + a substituce
- param.

VLASTNOSTI SOUSTAV

DEF: Nechť $\mathcal{A} \neq \emptyset$ soustava množin

1. $\mathcal{A}$ aditivní 5) $\forall X, Y \in \mathcal{A} : X \cup Y \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ konečně aditivní $\forall X_1, \dots X_m \in \mathcal{A}$ platí $\bigcup_{k=1}^{m} X_k \in \mathcal{A}$

Ⓥ Soustava množin je aditivní $\Leftrightarrow$ konečně aditivní

DEF: $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je množinový okruh 1), jestliže $\mathcal{A}$ je aditivní a $\forall A, B \in \mathcal{A}$ platí $A \setminus B \in \mathcal{A}$. (ADITIVNÍ + UZAV. NA ROZDÍLY)

DEF: $\mathcal{A} \neq \emptyset$ soustava množin. $\exists E \in \mathcal{A} : \forall X \in \mathcal{A} \quad X \subset E \Rightarrow E$ prezident

DEF: $\mathcal{A} \neq \emptyset$. $\mathcal{A}$ množinová algebra 2), if $\mathcal{A}$ je okruh a $\exists E$.
(ADIT + UZ. NA ROZDÍLY)

Ⓥ $\mathcal{A}$ okruh $\forall X, Y \in \mathcal{A} : X \cap Y \in \mathcal{A}$

DEF: Potence X, všechny podmnožiny X ... $2^X = \{Y : Y \subset X\}$

DEF: $\mathcal{A} \neq \emptyset$. $\mathcal{A}$ σ-aditivní 3) (spočetně), jestliže $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

σ-adit. je adit.

DEF: σ-okruh if je σ-aditivní soustavou. if algebra je σ-adit. $\Rightarrow$ σ-algebra 4)

DEF: $\mathcal{A}$ je soustava množin. Okruh $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, pro který je-li $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$ také okruh, pak $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, nazveme minimálním okruhem gener. soustavou $\mathcal{A}$.

Ⓥ minim. okruh: Pro každou $\mathcal{A}$, $\exists^1$ minimální okruh gener. $\mathcal{A}$.

DEF: $\mathcal{A}$ je soustava množin. σ-okruh $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, pro který platí, že je-li $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$ také σ-okruh, pak $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ minimální σ-okruh – borel. uzávěr $\mathcal{A}$.

DEF: (polookruh) $\mathcal{A} \neq \emptyset$ polookruh if: uzavřený na průniky
separabilita množinového rozdílu

DEF: Borel. množinami z metrického prostoru (P, ρ) nazýváme množiny z borel. uzávěru všech množin otevřených v P.

MÍRA DEF: Řekneme, že $F(X): \mathcal{A} \to \mathbb{R}^*$ je **mírou** na $\mathcal{A}$, splňuje-li axiomy

1) $\emptyset \subset \mathcal{A}$ 2) $F(\emptyset)=0$ 3) $\forall X \in \mathcal{A}: F(X) \geq 0$ 4) $\forall X, Y \in \mathcal{A}\ (X \cap Y = \emptyset \wedge X \cup Y \in \mathcal{A}) \Rightarrow F(X \cup Y) = F(X) + F(Y)$ 5) $\forall X, Y \in \mathcal{A}: X \subset Y \Rightarrow F(X) \leq F(Y)$

~~MĚŘIT.FCE: Nechť~~

VLASTNOSTI MĚŘIT.FCÍ/MĚR:

REÁLNÁ σ-aditivní míra

1. $F(X)$ je σ-aditivní na $\mathcal{A}$: $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A} \wedge \biguplus_{k=1}^{m} A_k = A \in \mathcal{A} \Rightarrow F(A) = \sum_{k=1}^{\infty} F(A_k)$
2. $F(X)$ je úplná na $\mathcal{A}$: $A \subset \mathcal{A} \wedge F(A) = 0 \wedge B \subset A \Rightarrow F(B)\ \exists$

   $F(B)=0$, $B \in \mathcal{A}$
3. $F(X)$ je ideální na $\mathcal{A}$:
   a) $F(X)$ je míra na $\mathcal{A}$
   b) $\mathcal{A}$ je σ-aditivní
   c) $F(X)$ je σ-aditivní na $\mathcal{A}$
   d) $F(X)$ je úplná na $\mathcal{A}$

Měřitelný prostor: (množ. fce $F(X): \mathcal{A} \to \mathbb{R}^*$)
soustava množin

~~Nechť E je prostor~~

Nechť $X \neq \emptyset$ množina a $\mathcal{A}$ je σ-algebra na X. Pak $(X, \mathcal{A})$ nazýváme měřitelný prostor.

JORDÁN:

- k-tá vytvořující fce: $\varphi_k(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  1) $Dom(\varphi_k) = \mathbb{R}$
  2) $\varphi_k(x)$ neklesající na $\mathbb{R}$
- def. obor pro míru:

$$\mathcal{H}_r = \{\emptyset, \bigtimes_{k=1}^{r} \langle \alpha_k, \beta_k) : -\infty < \alpha_k < \beta_k < +\infty\}$$

I. def. míry na $\mathcal{H}_r$
$$F(X) = \begin{cases} 0 & X = \emptyset \\ \varphi(\beta) - \varphi(\beta) & X = \langle \alpha, \beta) \end{cases}$$

II přechod k míře $m(X): \mathcal{K}_r \to \mathbb{R}^*$ $\mathcal{H}_r \subset \mathcal{K}_r$

$\mathcal{K}_r$ minimální okruh nad $\mathcal{H}_r$ (vezmu úplně všechna konečná disj. sjednocení množin k polookruhu)

$\forall K \in \mathcal{K}_r: \exists H_1, \ldots H_m \in \mathcal{H}_r: K = \biguplus_{k=1}^{m} H_k$

$$m(K) = \sum_{k=1}^{m} F(H_k)$$

III. $X \in \mathcal{S}ub(\mathcal{K}_r) := \{A \subset \mathbb{E}^r : \exists K \in \mathcal{K}_r : A \subset K\}$

pro toto X def: $m_i(X) = \sup\{m(K) : K \subset X \wedge K \in \mathcal{K}_r\}$

$m_e(X) = \inf\{m(K) : K \supset X \wedge K \in \mathcal{K}_r\}$

$m_i = m_e \Rightarrow \tilde{m}(X) = m_i$

$\{A \subset \mathbb{E}^r \, \exists K \in \mathcal{K}_r \; A \subset K\}$

LEBEG:

$\mathcal{H}_r$

I. $F(X) = \begin{cases} 0 \\ \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) \end{cases}$ $\quad X = \langle \alpha, \beta)$

II. $\mathcal{S}_r = \{S \subset \mathbb{E}^r : \exists H_1, H_2, \ldots \in \mathcal{H}_r : S = \biguplus_{k=1}^{\infty} H_k\}$ prezíde. $\mathbb{E}^r$

$\mu_\sigma(X) : \mathcal{S}_r \to \mathbb{R}^*$

$X \in \mathcal{S}_r \Rightarrow X = \biguplus_{k=1}^{\infty} H_k \qquad \mu_\sigma(X) := \sum_{k=1}^{\infty} F(H_k) \qquad \mathcal{K}_r \subset \mathcal{S}_r \Rightarrow$

$m(X) = \mu_\sigma(X)$
$X \in \mathcal{K}_r$

$X \in \mathbb{E}^r \wedge X = X^0 \Rightarrow X \in \mathcal{S}_r$

III. $\mu_\sigma^{(EX)}(X) = \inf\{\mu_\sigma(S) : S \in \mathcal{S}_r \wedge S \supset X\}$ – σ-adit. míra na $\mathcal{M}_\mu$

Nechť $\mu_\sigma(X)$ je σ-aditivní míra na $\mathcal{S}_r$ a $\mu_\sigma^{EX}(X)$ je vnější míra ~~gener.~~ mírou $\mu_\sigma(X)$. Řekneme, že množina $X \in \mathbb{E}^r$ je μ-měřitelná, pokud $\forall \varepsilon > 0 \; \exists S \in \mathcal{S}_r : X \subset S : \mu_\sigma^{EX}(S \setminus X) < \varepsilon$.

Soustava všech μ-měřitelných množin ozn. $\mathcal{M}_\mu$.

$\mathcal{M}_\mu$ ∀ otevřené, uzavřené podmnožiny z $\mathbb{E}^r$ a platí $\mathcal{S}_r \subset \mathcal{M}_\mu$
intervaly z $\mathbb{E}^r$

Každá borel. mn. je μ-měřitelná

IV. $\mu_\sigma^{(EX)}(X)$ ideální míra vystavěnou na soustavě $\mathcal{M}_\mu$
σ-algebra

↳ splňuju axiomy míry
σ-aditivní, úplná

Lebeg. integrál: $\{\mathbb{1}(x), \mathcal{M}_\lambda, E\}$ - prostor s ideální klasickou mírou

$\forall k \in \mathbb{R}: \varphi_k(x) = x$

$$(\mathcal{L})\int_E 1 \cdot d\mu(\vec{x}) = \mu(E)$$

$= \mu_{n+1}$

I. $\mathcal{Z}_\mu$ - množina $\forall$ jednoduchých finitních fcí $f(x): E \to \mathbb{R}_0^+$ 6-měřitelné

a) $\mu(supp(f)) < \infty$ finitní

$\llcorner = \{\vec{x} \in E^n : f(\vec{x}) \neq 0\}$

b) $f(E) \subset \mathbb{R}_0^+ \Leftrightarrow Ran(f) \subset \langle 0, +\infty)$

c) $f(E)$ - má konečný počet prvků

d) $f(\vec{x}): E \to \mathbb{R}$ je μ-měřit. fce $\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}: X_c = \{x \in E: f(x) > c\} \in \mathcal{M}_\mu$

Množina μ-měř. fcí $\mathbb{L}_\mu(E)$

Integrál jedn. fce: Nechť $f(E) \setminus \{0\} = \{\underbrace{d_1, .., d_m}_{\text{navzájem různá čísla}}\}$ $m \in \mathbb{N}, d_k \in \mathbb{R}^+$ $k \in \hat{m}$

$A_k = f^{-1}(d_k)$

Pak $$\int_E f(x) d\mu(x) \overset{def}{:=} \sum_{k=1}^{m} d_k \mu(A_k)$$

vždy konečná nezáporná

$= 0$ $f(\vec{x}) = 0$ všude v E

μ je 6-konečná $\Leftrightarrow E = \bigcup_1^\infty A_n$

$\mu(A_n) < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

II.

DEF: Nechť $(E, \mathcal{M}_\mu, \mu)$ je měřitelný prostor. Pak

$$\mathcal{Z}_\mu^+ = \{f: E \to \mathbb{R} \mid (\exists f_m \in \mathcal{Z}_\mu)(\forall x \in E)(f_m(x) \nearrow f(x)\}$$

a definujeme $\forall f \in \mathcal{Z}_\mu^+$ $$\int_E f(x) d\mu(x) = \lim_{m \to \infty} \int_E f_m(x) d\mu(x)$$

III

DEF: Nechť $f: E \to \mathbb{R}^*$. Potom def. $\underset{\in \mathcal{Z}_\mu^+}{f^+(x)} = f(x)\theta(f(x))$, $f^-(x) = -f(x)\theta(-f(x))$

na prostoru $(E, \mathcal{M}_\mu, \mu)$ s úplnou mírou

$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ $\in \mathcal{Z}_\mu^+$

má-li PS smysl $$(\mathcal{L})\int_E f(x) d\mu(x) := \int_E f^+(x) d\mu(x) - \int_E f^-(x) d\mu(x).$$

$\mathcal{L}^*(E, \mu)$ $\exists$

$\mathcal{L}(E, \mu)$ konečný

Ⓥ **vztah $\int$ a míry**: Nechť je dán prostor s úplnou mírou $\{E, M_\mu \subset 2^E, \mu\}$ která je σ-konečná. Nechť $A \in M_\mu$ je zvolena libovolně.

Def: $\mathcal{X}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in E \setminus A \end{cases}$. Pak $\mathcal{X}(x) \in \mathcal{L}^*(E,\mu)$ a $\mu(A) = \int_E \mathcal{X}(x)\,d\mu(x)$.

Leb. věta o int. majorantě:

Nechť $f_n(x) \in \Lambda_\mu$ (množina měř. fcí) $\forall n \in \mathbb{N}$; $f_n(x) \to f(x)$ s.v.
Nechť $\exists g(x) \in \mathcal{L}(E,\mu)$: $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ s.v. v E.
Pak $f(x) \in \mathcal{L}(E,\mu)$: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x) = \int_E f(x)\,d\mu(x)$.

Klasický LI:

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\lambda(x)$ klasická Leb. míra na $\mathbb{E}^n$ $(\varphi(x) = x)$. Pak pro libovolnou $A \in M_\mu$, $A \subset \mathbb{E}^n$ $\underbrace{(\mathcal{L})\int_A f(\vec{x})\,d\lambda(\vec{x})}_{\mathcal{L}\int_A f(\vec{x})d\vec{x}}$ - klasický LI

$a < b$: $(\mathcal{L})\int_a^b f(x)\,dx = -(\mathcal{L})\int_b^a f(x)\,dx$.

Ⓥ Nechť J je kompl. interval v $\mathbb{E}^n$, $\exists\, (R)\int_J f(\vec{x})\,d\vec{x} \Rightarrow \exists\, (\mathcal{L})\int_J f(\vec{x})\,d\vec{x}$ a jsou si $=$.

Klasický Leb. int.:

$\varphi_k(x) = x \quad \forall k \in A \Rightarrow \mu(x) =: \lambda(x)$, klasická L-míra

prostor s ideální a σ-kon. mírou: $\{E, \lambda(x), m_\lambda\}$; $m_\lambda \subset 2^E \wedge E \subset E^r$

$$(\mathcal{L})\int_E f(x)\,d\mu(x) := (\mathcal{L})\int_E f(x)\,d\lambda(x) \equiv (\mathcal{L})\int_E f(x)\,dx = \int_E f(x)\,d\lambda$$

$E \subset \mathbb{R}$; $E = \langle a,b)\,/\,\langle a,b\rangle\,/\,(a,b)\,/\,(a,b\rangle \quad (\mathcal{L})\int_E f(x)\,d\lambda x = (\mathcal{L})\int_E^{\mathbb{R}} f(x)\,dx$

$\mathcal{L}^*(E, \mu(x)) =: \mathcal{L}^*(E) \quad \& \quad \mathcal{L}(E, \mu(x)) =: \mathcal{L}(E)$ - integrab. fce

Ⓥ **Vztah $\mathcal{L}$ a R**: ~~Nechť~~ Je-li $J \subset E^r$ kompaktní a $\exists$-li $(R)\int_J f(\vec{x})\,d\vec{x}$, tak $f(x) \in \mathcal{L}(J)$ a platí $(\mathcal{L})\int_J f(\vec{x})\,d\vec{x} = (R)\int_J f(\vec{x})\,d\vec{x}$.

Ⓥ **Vztah $\mathcal{L}$ a Newton**: v 1D

Nechť $f(x) \in C((a,b))$, kde $(a,b) \subset \mathbb{R}$ i $(-\infty, +\infty)$. Označme $F(x)$ primitivní fci sestrojenou k $f(x)$ na (a,b). Nechť $f(x) \in \mathcal{L}((a,b))$ je integrabilní na (a,b), pak platí, že

$$(\mathcal{L})\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x),$$

přičemž obě limity vždy $\exists$ a uvedený rozdíl je dobře definován.

Ⓥ **- o substituci**

Nechť je dáno prosté a regul. zobrazení $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{\xi}) : E^r \to E^r$ (měřitelné) zobrazující z $P \subset E^r$ do $Q \subset E^r$. Nechť $A \subset Q$ a $A \in m_\lambda$. Nechť $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}_\lambda$ (měřitelná). Pak

$$(\mathcal{L})\int_A f(\vec{x})\,d\vec{x} = (\mathcal{L})\int_{\varphi^{-1}(A)} f(\vec{\varphi}(\vec{\xi}))\left|\det\left(\frac{D\vec{x}}{D\vec{\xi}}\right)\right| d\vec{\xi}.$$ [ve smyslu existence i hodnoty]

$\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{\xi})$

$d\vec{x} = \left|\det\left(\frac{D\vec{x}}{D\vec{\xi}}\right)\right| d\vec{\xi}$

Ⓥ Fubini

* Nechť $A \in M_r$, $B \in M_s$. Ozn $C = A \times B$. Nechť $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}^*(C)$.

Pak platí
1) pro s.v. $\vec{x} \in A$ platí $\int_B f(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{y} = g(\vec{x}) \in \mathcal{L}^*(A)$
2) $g(\vec{x}) \in \mathcal{L}^*(A)$ $\exists$
3) $\int_C f(\vec{z})\,d\vec{z} = \int_{A\times B} f(\vec{x},\vec{y})\,d(\vec{x},\vec{y}) = \int_A g(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_A \left(\int_B f(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{y}\right) d\vec{x}$

Ⓥ o separabilitě

Nechť $I_1, \dots, I_r$ jsou libovolné 1D intervaly. Ozn $I = \bigtimes_{k=1}^{r} I_k$. Nechť $f(\vec{x}) \in \mathcal{L}^*(I)$ a splňuje: $\forall$ s.v. $\vec{x} \in I$: $f(\vec{x}) = g_1(x_1) \cdot g_2(x_2) \dots g_r(x_r)$. Pak platí

$$(\mathcal{L}) \int_I f(\vec{x})\,d\vec{x} = \prod_{k=1}^{r} \int_{I_k} g_k(\tau)\,d\tau$$

Ⓥ integr. formule (o převodu abs. míry na kles. int)

Nechť $\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)$ jsou vytvořující fce, které jsou ze třídy $C^1(\mathbb{R})$. Nechť $A \in M_\mu$. Pak platí $\mu(A) = \int_A \Omega(\vec{x})\,d\vec{x}$, kde $\Omega(\vec{x}) = \prod_{k=1}^{r} \frac{d\varphi_k}{dx_k}$

O substituci pro Leb. int. Nechť $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{\xi}) : E^n \to E^n$ je prosté, regulární zob. otevřené množiny $P^\circ \subset E^n$ na množinu $Q \subset E^n$. Pak pro libovolné $A \subset M_\lambda$; $A \subset Q$ a lib. $f(\vec{x}) : E^n \to R$, $f \in \Lambda_\lambda$ platí:

$$\int_A f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_{\varphi^{-1}(A)} (f \circ \vec{\varphi})(\vec{\xi})\,|\Delta\vec{\varphi}(\vec{\xi})|\,d\vec{\xi},\ \text{kde}$$

$$\Delta\vec{\varphi}(\vec{\xi}) = \det\left(\frac{\partial(x_1 \dots x_n)}{\partial(\xi_1 \dots \xi_n)}\right)(\vec{\xi}).$$

Fubiniova věta: Nechť $A_n \subset E^n$, $A_s \subset E^s$, A_n, A_s λ měřitelné. $A :\overset{\text{ozn}}{=} A_1 \times A_2$. Nechť $f(\vec{z}) \in \mathcal{L}^*(A, \lambda)$. Potom pro s.v. $\vec{x} \in A_1$ je $g(\vec{y}) := f(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{L}^*(A_2)$

$$H(\vec{x}) = \int_{A_2} g(\vec{y})\,d\vec{y} \in \mathcal{L}^*(A_1)$$

$$\int_A f(\vec{x}, \vec{y})\,d(\vec{x}, \vec{y}) = \int_{A_1}\left(\int_{A_2} f(\vec{x}, \vec{y})\,d\vec{y}\right)d\vec{x}.$$

$\{E, M_\mu, \mu(x)\}$ σ-konečná, úplná

Limita int. s parametrem: Nechť $P \subset R$ a $\beta \in P'$ (hrom. bod). Nechť $f(x, \alpha)$ je definovaná na $E \times P$ a:
- pro s.v. $x \in E$ $\exists \lim\limits_{\substack{\alpha \to \beta \\ \alpha \in P}} f(x, \alpha) =: \varphi(x)$
- pro $\forall \alpha \in P \setminus \{\beta\}$ je fce $x \mapsto f(x, \alpha)$ měřitelná.
- $\exists g(x) \in \mathcal{L}(E, \mu) : \forall \alpha \in P \setminus \{\beta\} : |f(x, \alpha)| \leq g(x)$ s.v. E.

Pak $\lim\limits_{\substack{\alpha \to \beta \\ \alpha \in P}} \int_E f(x, \alpha)\,d\mu(x) = \int_E \varphi(x)\,d\mu(x)$

Spojitost integrálu s parametrem:

Nechť $P \subset R$, $f(x, \alpha)$ def. na $E \times P$ a
- pro s.v. $x \in E$ je $\alpha \mapsto f(x, \alpha)$ spojitá na P
- pro $\forall \alpha \in P$ je fce $x \mapsto f(x, \alpha)$ měřitelná
- $\exists g(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$ tak, že $\forall \alpha \in P$ $|f(x, \alpha)| \leq g(x)$ s.v. E

pak $\alpha \mapsto \int_E f(x, \alpha)\,d\mu(x)$ spojitá na P.

Derivace integrálu podle param.

Nechť $I^\circ \subset R$, $f(x, \alpha)$ def. na $E \times I^\circ$ splňuje
- $F(\alpha) := \int_E f(x, \alpha)\,d\mu(x)$ konverguje alespoň pro jedno $\alpha \in I^\circ$
- $\forall \alpha \in I^\circ$ je $x \mapsto f(x, \alpha)$ měřitelná
- $\exists g(x) \in \mathcal{L}(E, \mu)$ tak, že pro s.v. $x \in E$ $\forall \alpha \in I^\circ : \left|\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right| \leq g(x)$.

Pak pro $\forall \alpha \in I^\circ$ integrál $F(\alpha)$ konverguje a platí $\frac{dF}{d\alpha} = \int_E \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\,d\mu(x)$

• k-tá vytvořující fce: $\varphi_k(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) $Dom(\varphi_k) = \mathbb{R}$
2) $\varphi_k(x)$ neklesající na $\mathbb{R}$

• prvotní definiční obor pro míru: $\mathcal{H}_n$

$$\mathcal{H}_n := \left\{ \emptyset ; \bigtimes_{k=1}^{n} \langle \alpha_k, \beta_k) : -\infty < \alpha_k < \beta_k < +\infty \right\}$$

I. def. míry na $\mathcal{H}_n$ $\quad$ • $F(X) = \begin{cases} 0 & X = \emptyset \\ \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) & \dots X = \langle \alpha, \beta) \end{cases}$ $\quad$ splňuje axiomy míry na $\mathcal{H}_1$

II. (Jordan)

• od míry $F(X)$ na $\mathcal{H}_n$ přejdeme k míře $m(X): \mathcal{K}_n \mapsto \mathbb{R}^{\oplus}$ $\quad$ $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{K}_n$ (rozšiřování míry)

$\mathcal{K}_n$ je minimální okruh vystavený nad $\mathcal{H}_n$:

• vezmu úplně všechna konečná disjunktní sjednocení množin z polookruhu

$$\Rightarrow \forall K \in \mathcal{K}_n : \exists H_1 \dots H_m \in \mathcal{H}_n : K = \biguplus_{k=1}^{m} H_k$$

$$m(K) = \sum_{k=1}^{m} F(H_k) \qquad \text{osnova soustavy } \mathcal{K}_n$$

$\in \mathcal{H}_n$

III. (Finalizace J. míry) $\quad X \in Sub(\mathcal{K}_n) := \{ A \subset \mathbb{E}^n : \exists K \in \mathcal{K}_n : A \subset K \}$

pro tuto X def: $m_i(X) = \sup\{ m(K) : K \subset X \wedge K \in \mathcal{K}_n \}$ (vnitřní)

$$m_e(X) = \inf\{ m(K) : K \supset X \wedge K \in \mathcal{K}_n \}$$

$m_i(X) = m_e(X)$ $\Rightarrow \tilde{m}(X) := m_i(X)$

Lebeg. míra: $\mathcal{S}_n := \{ S \subset \mathbb{E}^n : \exists H_1, H_2, \dots \in \mathcal{H}_n : S = \biguplus_{k=1}^{\infty} H_k \}$

$\mu_6(X): \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}^{\oplus}$ $\quad X \in \mathcal{S}_n \Rightarrow X = \biguplus_{k=1}^{\infty} H_k$ $\quad \mu_6(X) := \sum_{k=1}^{\infty} F(H_k)$

$\mathcal{K}_n \subset \mathcal{S}_n \Rightarrow m(X) = \mu_6(X)$, $X \in \mathcal{K}_n$

1) $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{S}_n$ 2) $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{S}_n$ 3) $E^n \subset \mathcal{S}_n$ $\quad \langle 0, +\infty) = \biguplus_{k=1}^{\infty} \langle k-1, k)$

4) $\mathcal{S}_n$ patří $\forall$ otevřené intervaly $\quad (0,1) = \biguplus_{k=1}^{\infty} \langle \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$

5) do $\mathcal{S}_n$ patří úplně všechny otevřené množiny (Kallmünzerovo Lemma)

6) není okruhem (i když je aditivní) $\quad (0,1) \in \mathcal{S}_1$

$\Leftarrow$ není uzavřena na rozdíl $\Leftarrow \langle 0,1), (0,1) \in \mathcal{S}_1 \wedge \langle 0,1) \setminus (0,1) = \{0\} \notin \mathcal{S}_1$ $\quad (\alpha, \beta) \subset \mathcal{S}_1$

7) není ani polookruh $\left(\{0\} \neq \biguplus_{k=1}^{m} H_k \right)$

8) má prvek E^n

Limita v $\mathbb{C}^*$: Nechť $z_0 \in \mathbb{C}^*$ je hrom. bod $Dom(f)$. Řekneme, že $f(z)$ má lim v $z_0 = \omega \in \mathbb{C}^* \iff \forall H(\omega)\ \exists H(z_0)\ \forall z \in H(z_0) \cap Dom(f) \setminus \{z_0\}\ f(z_0) \in$ $f(z) \in H(\omega)$

Spojitost: $f(z)$ spojitá v z_0, $\in Dom(f)$ pokud $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

$f(z)$ spojitá v $z_0 \in \mathbb{C} \iff$ pro u, v: $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$ platí, že jsou spojité v z_0

Derivace: Nechť $f(z)$ je fce komplexní proměnné a je def. na $M \subset \mathbb{C}$. Nechť $z_0 \in M$ je vnitřní bod $Dom(f)$. Existuje-li $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ konečná, pak $f(z)$ je diferencovatelná v z_0: $f'(z_0)$.

Cauchy-Riemann: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má derivaci v $z_0 = x_0 + i y_0$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, mají-li

$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$

$v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$

v x_0, y_0 TD a platí-li

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Derivace inv. fce:
Nechť f je holomorfní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$. $f'(z) \neq 0\ \forall z \in \Omega$. Nechť $f^{-1}(z)$ je definovaná a spojitá na oblasti $\Omega' \subset f(\Omega)$, potom je $f^{-1}(z)$ na oblasti Ω' holomorfní a $(f^{-1})'(z) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(z))}$ $\forall z \in \Omega$.

Křivka: Křivka v $\mathbb{C}$ je libovolné zobr. $\varphi: \langle a, b \rangle \to \mathbb{C}$ spojitá.
φ je uzavřená: $\varphi(a) = \varphi(b)$, jednoduchá: prosté zobr. $\langle a, b \rangle$
Jordanova: prostá na $\langle a, b)$; $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Křivkový integrál: $\varphi: \langle a, b \rangle \to \mathbb{C}$ p.č. hladká (rozložit na konečně hladkých křivek → spojitá derivace) v $\mathbb{C}$. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na $\langle \varphi \rangle$ $(Dom(\varphi))$
Potom $\int_\varphi f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$.

Primitivní fce: Nechť F, f jsou fce komplexní proměnné a $F'(z)=f(z)$ $\forall z \in \Omega$: otevřená $\subset \mathbb{C}$. Pak F je primitivní fce k f na Ω.

$$\int_\varphi f(z)dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi(t)dt = \int_a^b F'(\varphi(t))dt = \left[F(\varphi(t))\right]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

Cauchyho věta: Nechť f je holomorfní na otevřené $\Omega \subset \mathbb{C}$. Nechť φ je p.č. C^1 Jordanova křivka $\overline{Int\varphi} \subset \Omega$.

$\Rightarrow$ $\int_\varphi f(z)dz = 0$.

Index bodu: Nechť φ je p.č. C^1 uzavřená a $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$.

Index z_0 vzhledem k φ. $ind_\varphi z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z-z_0}$.

Vlastnosti: Nechť φ je Jordanova křivka, $f(z)=\frac{1}{z-z_0}$ holomorfní v $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$.

$z_0 \in Ext\varphi \Rightarrow ind_\varphi z_0 = 0$

$z_0 \in Int\varphi \Rightarrow ind_\varphi z_0 = \int \frac{dz}{z-z_0}\frac{1}{2\pi i} = 1$, kde ψ malá kladně orient. kružnice se středem v z_0 a poloměrem r $\langle\psi\rangle \subset Int\varphi$. $z_0 \in Int\varphi$, ψ záporně orientovaná $ind_\varphi z_0 = -1$

φ uzavřená, ale ne Jordanova $ind_\varphi z_0 \in \mathbb{Z}$ # oběhů daného bodu křivkou

Cauchyho int. vzorec: Nechť φ je p.č. C^1 Jordanova křivka a f je holomorfní na $\Omega \supset \overline{Int\varphi}$.

$\Rightarrow$ $\forall z_0 \in Int\varphi$: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i \, ind_\varphi z_0}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-z_0}dz$.

Rozvoj holom. fce do mocninné řady: Nechť f je holomorfní v $B(z_0, R)$ $R > 0$. Pak $\forall z \in B(z_0,R)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$: $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi$.

φ kladně orient. p.č. C^1 Jordanova

$\langle\varphi\rangle \subset B(z_0,R)$, $z_0 \in Int\varphi$.

Cauch. int. vzorec pro derivace: Nechť f je holomorfní na obl. $\Omega \subset \mathbb{C}$. a nechť φ je p.č. C^1 Jordanova $\overline{\operatorname{Int}\varphi} \subset \Omega$. Pak f má v $\forall z_0 \subset \Omega$ derivace všech řádů a platí $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i \operatorname{ind}_\varphi z_0} \int_\varphi \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$. $\forall n \in \mathbb{N}$.

Laurent řada: $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ libovolná posl. komplexních čísel. Pak řada

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\text{regulární}} + \underbrace{\sum_{-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n}_{\text{hlavní}}.$$

Konverguje-li regulární část pro $|z-z_0| < R$ a hl. č. $\left|\frac{1}{z-z_0}\right| < r$ $\Rightarrow$ řada konv. $\frac{1}{r} < |z - z_0| < R$

Mezikruží $P(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} < |z - z_0| < R\}$

Laur. věta: Nechť f je holomorfní na $P(z_0, r, R)$. Pak $\forall z \in P: f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ (Laur. řada)

kde $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$ pro $\forall$ kladně orient. p.č. C^1 Jordanovu φ.

$\langle\varphi\rangle \subset P(z_0, r, R) \wedge z_0 \in \operatorname{Int}\varphi$. Koef. jsou dány jednozn.

Klasifikace singularit: Řekneme, že $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita f, je-li f holomorfní na nějakém prstencovém okolí z_0.

Pokud je z_0 izolovaná singularita, tak je

odstranitelná – pokud LR f na $P(z_0, r, R)$ s nulovou hl. částí

pól st. m – má-li LR konečně mnoho nenulových členů hl. č.

a $a_{-m} \neq 0 \wedge a_k = 0 \; \forall k < -m$

podstatná sing: – má-li LR hl. část ∞ mnoho členů

Ⓥ $z_0 \in \mathbb{C}$ izolovaná singularita f.

odstranitelná $\Leftrightarrow$ $\exists \lim_{z\to z_0} f(z)$ konečná

pól st. k $\Leftrightarrow$ $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$ – na okolí z_0, kde g je holom v z_0 a $g(z_0) \neq 0$

$\exists \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) \neq 0$

Reziduum: Nechť z_0 je singulární bod f a řada ♡ je Laurentův rozvoj f na mezikruží $P(z_0, r, R)$; $R > 0$.

Koeficient a_{-1} v tomto rozvoji nazveme reziduum f v z_0.

Metody výpočtu: z_0 je podstatná singularita $\Rightarrow$ nutno sestrojit Laur. ř.

z_0 odstranitelná $\to$ f je holomorfní v $z_0 \Rightarrow \operatorname{rez}_{z_0} f = 0$

pól st. 1 $\to$ $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = a_{-1}$

pól st. $m > 1$ $\to$ $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] = a_{-1}$

Cauch.-Rez. věta:

Nechť f je holomorfní na oblasti (otevřená, souvislá) $\Omega \subset \mathbb{C}$

s výjimkou konečného # bodů. tj $\exists M \subset \Omega$ konečná. neex A, B ood $A \cup B$

f je holom na $\Omega \setminus M$. Nechť φ je uzavřená pč. C^1. $\langle \varphi \rangle \subset \Omega$.

Pak $\int_\varphi f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{w \in M} \operatorname{ind}_\varphi z_0 \operatorname{rez}_w f$

kladně orien.

Rez. v ∞:

Nechť f je holomorfní $\forall z, |z| > R$. Reziduum v ∞ fce f

nazveme $\operatorname{rez}_\infty f = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi f(z)\,dz$, kde $\varphi(t) = \rho e^{-it}$ je záporně orient.

kružnice $0 \le t \le 2\pi$, $\rho > R$

Ⓥ Zob. rez:

Má-li f v C^* konečně mnoho singularit, jejich součet roven 0

VIII

Vektorový prostor matic: $T^{m,n}$ je v.p. matic s prvky z tělesa T o m řádcích, n sloupcích, sčítání a násobení prvkem z tělesa je def. po prvcích.

Lineární zobrazení: Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T. Zobrazení $A: P \to Q$ nazveme lineárním neboli homomorfním i.f.: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in P: A(\vec{x}+\vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y})$ aditivita

$\forall \alpha \in T \ \forall \vec{x} \in P: A(\alpha \vec{x}) = \alpha A(\vec{x})$ homogenita

Pozn: $\forall A: P \to Q: A\vec{O}_P = \vec{O}_Q$ $\quad A\vec{O}_P = A(0 \cdot \vec{O}_P) = 0 \cdot A\vec{O}_P = \vec{O}_Q$

Př: Zrcadlení kolem osy jdoucí počátkem, středová souměrnost, rotace o úhel φ, prodloužení, zkrácení

Alternativní def A: Nechť P, Q jsou VP nad stejným T. Nechť $A: P \to Q$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní $\underbrace{A \text{ je lin. zob}}_{*}$

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)(A(\alpha\vec{x}+\vec{y}) = \alpha A(\vec{x}) + A(\vec{y})) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall m \in N)(\forall \alpha_1, .. \alpha_m \in T)(\forall x_1, .. x_m \in P)\left(A\left(\sum_1^m \alpha_i \vec{x_i}\right) = \sum_1^m \alpha_i A(\vec{x_i})\right)$$

Množina lin. zobrazení: Nechť P, Q jsou VP nad stejným T. množinu lin. zobrazí z $P \to Q$ značíme $\mathcal{L}(P,Q)$. Nechť $A, B \in \mathcal{L}(P,Q)$, $\alpha \in T$. Pak definujeme sčítání zobrazení $A+B$ pro $\forall \vec{x} \in P: (A+B)(\vec{x}) = A\vec{x} + B\vec{x}$ a násobení zobrazení A číslem $\alpha \in T$ $(\alpha A)(\vec{x}) = \alpha A\vec{x}$. S těmito operacemi je $\mathcal{L}(P,Q)$ vektorovým prostorem

Operátory & funkcionály: Nechť V je VP nad T. Je-li $A \in \mathcal{L}(V,V) \overset{\text{ozn}}{:=} \mathcal{L}(V)$ a A nazveme lineárním operátorem. Je-li $\varphi \in \mathcal{L}(V,T) := V\#$ a φ nazveme lineárním funkcionálem, $V\#$ duálním prostorem k V. identita, souč. funkcionále

Vlastnosti lin. zob.: Nechť P, Q jsou VP nad stejným T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$

- A prosté $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)((A\vec{x} = A\vec{y}) \Rightarrow (\vec{x} = \vec{y}))$ A je monomorfní
- A „na" Q $(\forall \vec{y} \in Q)(\exists \vec{x} \in P)(A\vec{x} = \vec{y})$ A je epimorfní
- A prosté & surjektivní A je izomorfní
- A je izomorfní a A je operátor A je regulární operátor

Linearita inverzního zobrazení: Nechť P, Q jsou VP nad stejným T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, A je izomorfní. Pak $A^{-1} \in \mathcal{L}(P,Q)$ a také je izomorfní

Linearita složeného zobrazení: Nechť P, Q, V jsou VP nad stejným T, $B \in \mathcal{L}(P,Q)$, $A \in \mathcal{L}(Q,V)$. Pak $AB \in \mathcal{L}(P,V)$.

Obraz & vzor: Nechť P, Q jsou VP nad stejným T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$. Nechť $M \subset P$, $N \subset Q$. Obraz M při zobrazení A: množina $A(M) = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in M\}$

Vzor N při zobrazení A: množina $A^{-1}(N) = \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} \in N\}$

Obraz & vzor podprostoru: -II- $M \subset\subset P$, $N \subset\subset Q \Rightarrow A(M) \subset\subset Q$, $A^{-1}(N) \subset\subset P$

Hodnost, jádro, defekt: Nechť P, Q jsou VP nad stejným T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$.

hodnost A: $\dim A(P)$ $h(A)$

jádro A: $A^{-1}(\vec{o}_Q) = \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} = \vec{o}_Q\}$ $\ker A$

defekt A: $\dim(\ker A)$

Obraz lin. obalu: Nechť P, Q VP nad stejným T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$. Nechť $\vec{x}_1, \dots \vec{x}_m \in P$. Pak $A([x_1 \dots x_m]_\lambda) = [Ax_1, \dots Ax_m]_\lambda$

Dimenze obrazu podprostoru: Nechť P, Q VP nad stejným T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ a $P_1 \subset\subset P$. Pak $\dim A(P_1) \leq \dim P_1$ $(h(A) \leq \dim P)$

Prostor & dimenze obrazu podprostoru: Nechť P, Q VP nad stejným T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$. Nechť A je monomorfní:

- I. $\vec{x}_1, \dots \vec{x}_m$ LN v $P \Rightarrow A\vec{x}_1, \dots A\vec{x}_m$ LN v Q
- II. pro $P_1 \subset\subset P \Rightarrow \dim A(P_1) = \dim P_1$ $h(A) = \dim P$?

Hodnost izomorfismus: Nechť P, Q VP nad stej. T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ izom. Pak $h(A) = \dim P = \dim Q$.

Hodnost složeného zob.: Nechť P, Q, V nad stejným T. $B \in \mathcal{L}(P,Q)$, $A \in \mathcal{L}(Q,V)$

I. $h(AB) \leq h(A)$ rovnost při B epimorfní

II. $h(AB) \leq h(B)$ rovnost při A monomorfní

~~Hodnost~~ Zadání lin. zobrazení: Nechť P,Q jsou VP nad stejným T. Nechť $X=(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ je báze P a $\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_n$ jsou libovolné vektory z Q. Potom $\exists^1 A\in\mathcal{L}(P,Q): \forall i\in\hat{n}\ \ A\vec{x}_i=\vec{y}_i$. Lin. zob. je jednoznačně určeno bazickými vektory.

Řešení rovnice $A\vec{x}=\vec{b}$: Nechť P,Q jsou VP nad stejným T, $A\in\mathcal{L}(P,Q)$, $\vec{b}\in A(P)$. Pak množina $\forall$ řešení $A\vec{x}=\vec{b}$, tedy $A^{-1}(\vec{b})$ má tvar:

$$A^{-1}(\vec{b})=\vec{a}+\ker A,\ \text{kde } \vec{a}\in P \text{ splňuje } A\vec{a}=\vec{b}$$

↑ part. řešení

Druhá věta o dimenzi: Nechť P,Q jsou VP nad T, $A\in\mathcal{L}(P,Q)$ a $\dim P<+\infty$. Pak $\boxed{h(A)+d(A)=\dim P}$

Izomorfní prostory P,Q jsou izomorfní prostory $P\cong Q$, existuje-li izomorfismus $A\in\mathcal{L}(P,Q)$. Pro „alespoň jeden z P,Q má konečnou dimenzi" platí $P\cong Q \iff \dim P=\dim Q$.

Součin matic: Nechť T je těleso, $A\in T^{m,n}$ & $B\in T^{n,p}$. Pak součinem A,B nazveme matici typu $m\times p$, značenou AB a definovanou

$$[AB]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}\quad i\in\hat{m},\ j\in\hat{p}.$$

Vlastnosti násobení matic:

- asociativita $A\in T^{m,n}, B\in T^{n,h}, C\in T^{h,s}$ $(AB)C=A(BC)$
- distributivita vůči $+$ $A(B+C)=AB+AC$
- obecně není komutativní
- $I_{ij}=\delta_{ij} \Rightarrow AI=IA=A$

soustavu m lin. algebraických rovnic po n neznámých $x_1,\dots,x_n$ lze přepsat:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=b_m$$

do maticového zápisu $A\vec{x}=\vec{b}$

Matice zobrazení: Nechť P_n, Q_m jsou VP nad stejným T, $n,m\in\mathbb{N}$. Nechť $A\in\mathcal{L}(P_n,Q_m)$; $X=(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ je báze P_n, Y je báze Q_m. Pak matici ${}^X\!A^Y$ typu $m\times n$ def. jako $[{}^X\!A^Y]_{\bullet j}:=(A\vec{x}_j)_Y$ nazýváme maticí zobrazení A v bázích X,Y. Pro bázi $Y=(\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_m)$, pak pro $\forall i\in\hat{m}, \forall j\in\hat{n}$ platí $[{}^X\!A^Y]_{ij}=y_i^{\#}(A\vec{x}_j)$

Vlastnosti matice zobrazení: Nechť P_n, Q_m jsou VP nad stejným T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze P_n, $\mathcal{Y}$ je báze Q_m. Nechť $\alpha \in T$, $A, B \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$. Pak ${}^{\mathcal{X}}(A+B)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} + {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$ & ${}^{\mathcal{X}}(\alpha A)^{\mathcal{Y}} = \alpha\, {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$

Výpočet obrazu vektoru: Nechť P_n, Q_m jsou VP nad stejným T. Nechť $\mathcal{X}$ je báze P_n, $\mathcal{Y}$ báze Q_m. Potom $\forall \vec{x} \in P_n$ platí $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} (\vec{x})_{\mathcal{X}}$

Reformulace $A\vec{x} = \vec{b}$ na řešení LAR na prostorech konečné dimenze. Nechť P_n, Q_m jsou VP nad T, $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$, $\mathcal{X}$ je báze P_n, $\mathcal{Y}$ Q_m. Nechť $\vec{b} \in A(P_n)$. Nechť je zadaná matice zobrazení ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$. Víme, že řešení $A\vec{x} = \vec{b}$ má tvar $\ker A + \vec{a}$

Výpočet $\ker \vec{a}$ z $h(A)$ kterou určíme z ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ stočí tam $d(A)$ a najdeme bázi jádra $A\vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow (A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = (\vec{o})_{\mathcal{Y}}$, což je řešení soustavy $\left({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \middle| \begin{smallmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{smallmatrix}\right)$. Jelikož $(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$ stačí najít $d(A)$ lin. nez. řešení hom. soustavy s maticí ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$
→ získáme souř. báz. vektorů z jádra v bázi $\mathcal{X}$.

$\vec{a}$ $A\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow (A\vec{a})_{\mathcal{Y}} = (\vec{b})_{\mathcal{Y}}$ a $(A\vec{a})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{a})_{\mathcal{X}}$ najdeme $(\vec{a})_{\mathcal{X}}$ tak, že určíme jedno řešení soustavy LAR s maticí ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ a pravou stranou $(\vec{b})_{\mathcal{Y}}$

Matice složeného zobrazení: Nechť P_n, Q_m, V_s nad T, $A \in \mathcal{L}(Q_m, V_s)$ $B \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$. Nechť $\mathcal{X}$ báze P_n, $\mathcal{Y}$ báze Q_m, $\mathcal{Z}$ V_s. Potom platí ${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}}\, {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$

Matice přechodu: Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ báze VP nad T. Pak maticí přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$ nazveme matici ~~h(A) je def~~ ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}$. $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$

Hodnost matice: Nechť $A \in T^{m,n}$. Hodnost matice $h(A)$ je definována jako $h(A) := \dim[A_{\cdot 1}, \dots, A_{\cdot n}]_\lambda$

Hodnost zobrazení & hodnost matice: Nechť P_n & Q_m VP nad T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$, $\mathcal{X}$... P_n, $\mathcal{Y}$.. Q_m. Pak $h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$
$A \in T^{n,n} \wedge h(A) = n \Rightarrow A$ regulární, jinak singulární!

Izomorfismus & regulární matice: Nechť P_n, Q_n nad stejným T, $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_n)$, X báze P_n, Y báze Q_n. A izomorfismus $\Leftrightarrow$ ${}^{X}A^{Y}$ regulární matice
$\Rightarrow$ lze reformulovat i pro operátor

Frobeniova věta: Nechť $A \in T^{m,n}$, $\vec{b} \in T^m$. Potom pro soustavu LAR $A\vec{x} = \vec{b}$ platí:
- soustava má řešení $\Leftrightarrow h(A) = h(A|\vec{b})$
- ozn. S_0 množinu řešení hom. soustavy s maticí A, tj $S_0 = \{\vec{x} \in T^n \mid A\vec{x} = \vec{o}\}$. Pak $S_0 \subset\subset T^n$ a $\dim S_0 = n - h(A)$
- Nechť $h(A) = h(A|\vec{b})$. Potom množina $\forall$ řešení soustavy $S = \{\vec{x} \in T^n \mid A\vec{x} = \vec{b}\}$. ~~Pak~~ má tvar $S = \vec{a} + S_0$; $A\vec{a} = \vec{b}$ (part. řešení)

Důsledek: hom. soustava s maticí $A \in T^{n,n}$ má pouze triv. řešení když A je regulární.
Nechť $\vec{b} \in T^n$. Soustava $A\vec{x} = \vec{b}$ s maticí $A \in T^{n,n}$ má právě 1 řešení $\Leftrightarrow$ A regulární matice

Hodnost součinu matic: Nechť $A \in T^{m,n}$, $B \in T^{n,p}$
- $h(AB) \leq h(A)$ pro $n = p$ a B regulární platí rovnost
- $h(AB) \leq h(B)$ pro $m = n$ a A regulární platí rovnost

KVADRIKA: IX

DEF: □ matice $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Hlavním minorem řádu $k \in \hat{n}$ matice A nazveme determ. Δ_k matice $(a_{ij})_{i,j=1}^{k}$

DEF: (Symetr.) bil. formou ve $\mathbb{R}^n$ nazýváme zobrazení $qq(\vec{x},\vec{y}): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ def. předpisem $qq(\vec{x},\vec{y}) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, kde $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ $(i,j \in \hat{n})$

DEF: Nechť je dána komplexní matice $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Hermit. bilineární formou v $\mathbb{C}^n$ nazýváme zobrazení $qq(\vec{x},\vec{y}): \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ def. $qq(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^T A \vec{y}$ *

DEF: Kvadratickou formou rozumíme zobr. $q(\vec{x}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ k němuž $\exists$ symetr. bil. forma $qq(\vec{x},\vec{y})$ tak, že $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ platí $q(\vec{x}) = qq(\vec{x},\vec{x})$

DEF: VP V_n. Zobrazení z V_n do V_n zavedené $y_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j$ $\quad i \in \hat{n}$ nazýváme lineárním zob. ve V_n.
$\mathbb{R} = (r_{ij})_{i,j=1}^{n}$ matice lin. zobrazení (regising if matice je)

DEF: lin. zob. $\vec{y} = \mathbb{R}\vec{x}$ OG, pokud $\forall i,j \in \hat{n}$ $(i \neq j)$ platí $\sum_{k=1}^{n} r_{ki} r_{kj} = 0$

ON $\quad \sum_{k=1}^{n} r_{ki} r_{kj} = \delta_{ij}$

POZN:
Je-li zob. o reg. pak $\exists$ inv. matice $x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} y_j$ jehož matice $\mathbb{P}$ je inv. k $\mathbb{R}$; $\mathbb{P} = \mathbb{R}^{-1}$

(V) Lin. subst. $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y}$ přejde kvadr. forma $q(\vec{x}) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ s maticí A ve formu $q(\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} y_i y_j$ se symetr. maticí $B = \mathbb{R}^T A \mathbb{R}$

(V) (Zákon setrvačnosti kv. f.)
Ke každé kvadr. formě $q(x_1, x_2, \dots x_n)$ s mat. A $\exists$ regul. zob. $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y}$, jež tuto formu převede na tvar $q(y_1, y_2, \dots y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ *
kde λ_i $(i \in \hat{n})$ jsou vlastní čísla matice A.
Uvedené zobr. je ON (sloupci matice tvoří ON soubor)
(vlastní vek. $A\vec{x}_1 = \lambda \vec{x}_1$)

(V) (normalizovatelnost) Kvadr. formu $q(x_1, x_2, \dots x_n)$ hodnosti h lze vždy převést regul. substitucí $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y}$ ve formu
$q(y_1, y_2, \dots y_n) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{s_1}^2 - y_{s_1+1}^2 - \dots - y_{s_1+s_2}^2$ * kde $h = s_1 + s_2$

* kanonický / normální tvar kvadr. form

DEF: Nechť je zadaná kvadr. forma $q(\vec{x})$. Uspořádanou trojici $(s_1, s_2, n-h)$ z nichž * nazýváme signaturou kvadr. formy a značíme $sg(q)$.

DEF: $q(\vec{x})$ kvadr. forma PD v $\mathbb{R}^n$ $q(\vec{x}) \rhd 0$ if $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n (\vec{x} \neq \vec{0})$ platí $q(\vec{x}) > 0$.

ND $q(\vec{x}) \lhd 0$

$<$

PSD $q(\vec{x}) \unrhd 0$ $q \geq 0$ $\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n (\vec{x} \neq 0): q(\vec{x}) = 0$

NSD $\unlhd 0$ $q \leq 0$ $-\shortparallel-$

Indefinitní v $\mathbb{R}^n$ if $q(\vec{x}) \lhd\rhd 0$ $\exists \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ $q(\vec{x}) < 0$ a $q(\vec{y}) > 0$

V $q(\vec{x})$ PD $\Leftrightarrow \forall \lambda > 0$ matice kvadr. formy

PSD $\forall \lambda \geq 0 \wedge \exists \lambda = 0$

ND $\forall \lambda < 0$

V Nechť $q(\vec{x})$ je kvadr. forma v $\mathbb{R}^n$ hodnosti h a signatury $sg(q) = (s_1, s_2, n-h)$

1. $q(\vec{x})$ PD / ND v $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow h = n = s_1$ / $h = n = s_2$
2. PSD / NSD $\Leftrightarrow h < n$; $s_1 = h$ / $h < n$, $s_2 = h$
3. indef. v $\mathbb{R}^n$, je-li $s_1 s_2 \neq 0$

DEF: $q(\vec{x})$ v $\mathbb{R}^n$, $sg(q) = (s_1, s_2, s_3)$ signatura.

$q(\vec{x})$ eliptická / hyp / parab.

$s_1 = n$ $\vee$ $s_2 = n$ $\quad$ $s_1 s_2 \neq 0$, $s_3 = 0$ $\quad$ $s_3 \neq 0$

Sylvestr: $q(\vec{x})$ kvadr. f. v $\mathbb{R}^n$ s A a hlavními minory Δ_i, $i \in \hat{n}$

Pak $q(\vec{x})$ PD $\Leftrightarrow \forall i \in \hat{n}$ $\Delta_i > 0$

ND $\Leftrightarrow \forall i \in \hat{n}$ $(-1)^i \Delta_i > 0$

DEF: Nechť $\vec{u}, \vec{v}$ z VP $\mathbb{R}^n$ a kvadr. f. $q(\vec{x})$ v $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\vec{u}, \vec{v}$ jsou q-ortogonální, if $qq(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, kde $qq(\vec{x}, \vec{y})$ je bil. f. přidružená k $q(\vec{x})$

DEF: Bázi $\mathcal{B}_P = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ VP $\mathbb{R}^n$ nazýváme polární bází odvozenou od $q(\vec{x})$.

jestliže $\forall i,j \in \hat{n}$ současně platí

1. $qq(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = 0 \quad i \neq j$
2. $q(\vec{u}_i) \in \{0, 1, -1\}$, kde $qq(\vec{x}, \vec{y})$ je bil. forma přidr. k $q(\vec{x})$.

V $q(\vec{x})$ v $\mathbb{R}^n$ a pol. b. $\mathcal{B}_P = (\vec{u}_1, \dots \vec{u}_n)$. Regul. lin. zob. $\vec{x} = \mathbb{B}\vec{y}$ zadané $x_k = u_{1k} y_1 + u_{2k} y_2 + \dots + u_{nk} y_n$ převádí $q(\vec{x})$ na norm. tvar.

KVADR. PLOCHY

DEF: Nenul. □ sym. matice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$

x Fci $Q(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} - 2\vec{b}^T \vec{x} + c$ - kvad. fce v $\mathbb{R}^n$.

Množina $Q^{-1}(0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : Q(\vec{x}) = 0\}$ kv. plocha určená rovnicí $Q(\vec{x}) = 0$

$q(\vec{x}) - \vec{x}^T A \vec{x}$ kvadr. forma přidružená k $Q(\vec{x})$

DEF: Rozšířená kv. forma příslušná ke kvadrice. Matici ozn. $A_{(ex)}$

$q_0(x_0, \vec{x}) := \vec{x}^T A \vec{x} - 2\vec{b}^T \vec{x} x_0 + c x_0^2$

- kvadr. reg/sing if rozš. k. f. je reg/sing.

hl. signatura kv. $Sg(Q)$ - sig. rozš. kv. f.

vedlejší $\quad sg(Q)$ - kv. formy

DEF: Kvadr. fce a kvadrika centrální if $\exists \vec{s} \in \mathbb{R}^n : \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$Q(\vec{s} + \vec{x}) = Q(\vec{s} - \vec{x})$

↓ střed kvadriky

V kv. fce x. Nechť A je její matice a $\vec{b}$ vektor. Pak $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$ je střed $\Leftrightarrow \vec{b} = A\vec{s}$ tj. $\Leftrightarrow$ rovnají se $h(A) = h(A | \vec{b})$

V Zákon. setr. kv. ploch

Ke každé $Q(\vec{x})$ v $\mathbb{R}^n$ s A $\exists$ ON transformace $\vec{x} = \mathbb{R}\vec{y}$, jež převádí $Q(\vec{x}) = 0$ do tvaru $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i + \gamma = 0 \quad \lambda_i$ vl. č. A.

(V) Ke každé $Q(\vec{x})$ v $\mathbb{R}^n$ s vedlejší $sg(q) = (s_1, s_2, n - s_1 - s_2)$

$\exists$ regul. lin. transf. $\vec{x} = R\vec{y} + \vec{s}$, jež převádí $Q(\vec{x}) = 0$

na* $Q(\vec{y}) = y_1^2 + y_2^2 + .. + y_{s_1}^2 - y_{s_1+1}^2 - .. - y_{s_1+s_2}^2 - 2\beta y_{s_1+s_2+1} + \gamma = 0$

nejvýš jedno β, γ nenulové. $\beta \in \{0, 1\}$

$\gamma \in \{0, 1, -1\}$

* kanonický /normální

Def: Nechť V VP nad T. Zob. $V \times V \to T$, které dvojici vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in V$ přiřadí číslo $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in T$ nazýváme skal. souč., pokud splňuje

1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}$ — if $T = \mathbb{R}$ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

2) $\forall \vec{x} \in V \quad \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$, $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{o}$

3) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V \ \forall \alpha \in T \quad \langle \alpha \vec{x} + \vec{y} | \vec{z} \rangle = \alpha \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{z} \rangle$

v $\mathbb{C}^n$ standardní $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ unitár. $\mathbb{R}^n$: $= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ Eukl

Pozn: $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$; $\langle z | x + y \rangle = \langle z | x \rangle + \langle z | y \rangle$

- Je-li V VP nad T se SS a $\vec{x} \in V$: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ - norma $\vec{x}$

  + $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{o}$ a $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|$

(V) Cauchy-Schwarz: Nechť V je VP se SS nad T. Pak $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$

$\boxed{|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| . \|\vec{y}\|}$ $= \Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}$ LZ

Δ≠: Nechť V je VP se SS nad T. Pak $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$: $\boxed{\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|}$

$= \Leftrightarrow \alpha \in T, \alpha \geq 0$: $\vec{y} = \alpha \vec{x} \vee \vec{x} = \alpha \vec{y}$

DEF: Nechť V je VP se SS nad T. Řekneme, že $\vec{x}, \vec{y} \in V$ jsou OG ($\perp$), jestliže $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$. ($\vec{x} \perp \vec{y}$)

Řekneme, že soubor $(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(m)})$ je OG $\Leftrightarrow \vec{x}^{(i)} \perp \vec{x}^{(j)}$ $\forall i, j \in \hat{m}, i \neq j$

Splňuje-li soubor navíc $\|\vec{x}^{(i)}\| = 1$ $\forall i \in \hat{m}$ říkáme, že je ON

(tj. platí $\langle x^{(i)}, x^{(j)} \rangle = \delta_{ij}$ $\forall i, j \in \hat{m}$)

(V) OG soubor nenulových vektorů je LN.

(V) Nechť $(\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(m)})$ je LN soubor z VP V se SS. Potom $\exists$ ON soubor $(\vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(m)})$ tak, že $\forall k \in \hat{m}$: $[\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(k)}]_\lambda = [\vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(k)}]_\lambda$

řekneme, že jsme ORTONORMALIZOVALI $(\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(m)})$

Důsledek: Nenulový VP konečné dimenze má ON bázi

GS OG proces: $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$ a) $\vec{y}^{(\ell+1)} \perp \vec{y}^{(k)}$ $k \in \hat{\ell}$

b) $\vec{y}^{(\ell+1)} \in [\vec{x}^{(1)}, \dots \vec{x}^{(\ell+1)}]_\lambda$

$$\vec{y}^{(\ell+1)} = \vec{x}^{(\ell+1)} - \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \vec{y}^{(i)} \qquad \alpha_i = \langle \vec{x}^{(\ell+1)}, \vec{y}^{(i)} \rangle$$

V Nechť V je VP se SS nad T, $X = (\vec{x}^{(1)}, \dots \vec{x}^{(n)})$ je jeho ON báze.
Nechť $\vec{x} \in V$. Potom $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}^{(i)} \rangle \vec{x}^{(i)}$

$= \sum \alpha_i \vec{x}^{(i)}$

DEF: Nechť V je VP se SS nad T a $P \subset\subset V$. Množinu $P^\perp = \{\vec{y} \in V | \vec{y} \perp \vec{x} \;\; \forall \vec{x} \in P\}$ nazýváme OG doplněk podprostoru P do ve V.

V Nechť V je VP se SS nad T a $P \subset\subset V$. ($\dim V < +\infty$)
Pak také $P^\perp \subset\subset V$ a platí $V = P \oplus P^\perp$
každý $\vec{x} \in V$: $(P^\perp)^\perp = P$
$\Rightarrow \vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_{P^\perp}$

Konstrukce: (OG průmětu) je-li daná ON báze $(\vec{x}^{(1)}, \dots \vec{x}^{(k)})$ podprostoru P, platí: $\vec{x}_P = \sum_{j=1}^{k} \langle \vec{x}, \vec{x}^{(j)} \rangle x^{(j)}$; $\vec{x}_{P^\perp} = \vec{x} - \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{x}^{(j)} \rangle}_{} \vec{x}^{(j)}$

j-tý Four. koef $\vec{x}$ vzhledem k soubu $(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{\dots})$

DEF: $X = (\vec{x}_1, \dots \vec{x}_n)$ je báze VP V nad T

1. Nechť $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$. Pak α_i nazveme i-tá souřadnice vektoru $\vec{x}$ v bázi X.
2. Nechť $i \in \hat{n}$. Zobrazení $X_i^\#: V \to T$, které vektoru přiřadí jeho i-tou souřadnici v bázi X, tj. $X_i^\#(\vec{x}) = \alpha_i$, pokud $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$ - i-tý souřadnicový funkcionál v bázi X
3. Zob. $(\cdot)_X: V \to T^n$, které vektoru přiřadí vektor všech jeho souřadnic v bázi X tj. $(\vec{x})_X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, pokud $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$, nazveme souřadnicový izomorfismus v bázi X.

Vlastnosti $\langle \cdot | \cdot \rangle$: Nechť je dán V nad T:
se SS

$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V, \alpha \in T$:
- $\langle \vec{x} | \alpha \vec{y} + \vec{z} \rangle = \alpha \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle$
- $\|\vec{x}\| \geq 0$; $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{o}$

  $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \, \|\vec{x}\|$

rovnoběž. rovnost: $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$

polariz. id: $T = \mathbb{R}$: $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|\vec{x}-y\|^2)$

$\sqrt{x^2+2xy+y^2} - \sqrt{x^2-2xy+y^2}$ xy

$T = \mathbb{C}$: $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + \frac{i}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

$\varphi = \arccos \dfrac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$

OG a ON: V je VP nad T:
se SS

1) $\vec{x}, \vec{y} \in V$ (vektory) OG: $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$ $\vec{x} \perp \vec{y}$

2) $\vec{x}_1, \dots \vec{x}_n \in V$ (vektory) OG: $\langle \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle = 0$ $\forall i,j \in \hat{n}$ $i \neq j$ - OG nemusí být nenulové

ON: $\langle \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle = \delta_{ij}$ - nutně nenulové

Pozn: if $\vec{x}_1, \dots \vec{x}_n$ jsou nenulové OG, pak $\dfrac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|}, \dots \dfrac{\vec{x}_n}{\|\vec{x}_n\|}$ jsou ON vektory

ON soubor - standardní báze

(V) $\vec{x}_1, \dots \vec{x}_n$ OG vektory $\Rightarrow$ jsou LN

jsou-li ON $\Rightarrow$ jsou LN

Souřadnice v OG bázi: Nechť V je SS nad T, nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots \vec{x}_n)$ je OG báze ve V. Pak $\forall \vec{x} \in V$:

$$x_i^{\#}(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle}{\|\vec{x}_i\|} \rightarrow \vec{x} = \sum \frac{\langle x | x_i \rangle}{\|\vec{x}_i\|} \cdot \vec{x}_i$$

Souř. ON bázi: Nechť V je se SS nad T, $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots \vec{x}_n)$ je ON báze V. Pak $\forall x \in V$:

$$x_i^{\#}(\vec{x}) = \underbrace{\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle}_{\text{Four. koef.}} \rightarrow \vec{x} = \sum \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \cdot \vec{x}_i$$

Pythag. věta: Nechť V je SS nad T, $\vec{x}, \vec{y}$ OG vektory z V. Potom $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

Gram-Schmidt: Nechť V je VP se SS nad T. Nechť $\vec{x_1}, \dots \vec{x_m}$ jsou LN v V.
Pak $\exists$ OG i (ON) $\vec{y_1}, \dots \vec{y_m}$ tak, že $[\vec{x_1}, \dots \vec{x_k}]_\lambda = [\vec{y_1}, \dots \vec{y_k}]_\lambda$ $\forall k \in \hat{m}$.
(LN vektory lze vždy ortogonalizovat i ON)

OG proces: $\vec{y_1} = \vec{x_1}$ hledáme vektory tvaru
$$\vec{y_{k+1}} = \vec{x_{k+1}} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{y_i}$$
α_i z podmínek $\langle \vec{y_{k+1}} | \vec{y_j} \rangle = 0$ $j \in \hat{k}$
$$\alpha_i = \frac{\langle \vec{x_{k+1}} | \vec{y_j} \rangle}{\|\vec{y_j}\|^2}$$
$$y_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \vec{x_{k+1}} | \vec{y_i} \rangle}{\|\vec{y_i}\|^2} \cdot \vec{y_i}$$

× LN vek OG se stejným Lin Obalem.

ON

Besselova ≠: Nechť V je VP nad T. $\mathcal{X} = (\vec{x_1}, \dots \vec{x_n})$ ON ve V.
SS
Pak $\forall \vec{x} \in V$: $\sum_{i=1}^{k} |\langle \vec{x} | \vec{x_i} \rangle|^2 \leq \|\vec{x}\|^2$

ON báze: V SS nad T. $\mathcal{X} = (\vec{x_1}, \dots \vec{x_n})$ ON v V.
Pak jsou tvrzení ekvivalentní:

1. $\mathcal{X}$ je báze
2. $\forall \vec{x} \in \mathcal{H}$: $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x_i} \rangle \cdot \vec{x_i}$
3. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$: $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | x_i \rangle \langle \overline{y | x_i} \rangle$
4. $\forall \vec{x} \in \mathcal{H}$: Parsevalova rovnost $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle \vec{x} | \vec{x_i} \rangle|^2$

OG doplněk: Nechť V je VP se SS nad T
$M \subset V$, $M \neq \emptyset$. OG doplněk M do $\mathcal{H}$
nazveme $M^\perp = \{ \vec{x} \in V \mid \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0 \quad \forall \vec{y} \in M \}$ $M^\perp \subset\subset V$

OG rozklad: Nechť V je VP nad T, $P \subset\subset V$, $\dim P < +\infty$ $M \subset (M^\perp)^\perp$
Pak $V = P \oplus P^\perp$ $(P^\perp)^\perp = P$

OG průmět: $P \subset\subset V$; $\vec{x} \in V$. Je-li $\vec{x} = \underset{\substack{\cap \\ P}}{\vec{x_P}} + \underset{\substack{\cap \\ P^\perp}}{\vec{x_{P^\perp}}}$, pak $\vec{x_P}$ se nazývá OG průmět do P.

X

* definice lin zob: $L: X \to Y$ aditivní a homogenní
* množina $\mathcal{L}$ & operace jsou VP

Lineární operátor: Je-li $A \in \mathcal{L}(V,V)$, A nazýváme lin. operátorem a značíme $A \in \mathcal{L}(V)$.

- identický operátor
- monomorfní, epimorfní, izomorfní, regulární
  prosté, na, prosté a na bijekce, prosté a lineární op.
- hodnost $h(A) = \dim A(V)$ · jádro $\{\vec{x} \in V \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$ $\ker A$
  defekt $\dim \ker A = d(A)$

Operátor derivování a integrování: Nechť $p \in P$
$p(\alpha) = \alpha_0 + \alpha_1 s + .. + \alpha_n s^n$ $\forall s \in \mathbb{C}$. Pak def. operátory $D_p, S_p : P \to P$ $\forall s \in \mathbb{C}$ vztahy $(D_p)(s) := \sum_{j=1}^{n} j\alpha_j s^{j-1}$ $(S_p)(s) := \sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha_j}{j+1} s^{j+1}$

Matice: Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Položme $V = T^{m,n}$ kde $T^{m,n}$ je množina uspořádaných $m \cdot n$ tic čísel z T zapsaných do tabulky o m řádcích, n sloupcích nazývanou maticí typu $m \times n$. Je-li matice typu $n \times n$ nazýváme ji čtvercovou n.

Hodnost matice: Nechť $A \in T^{m,n}$. Hodností A $h(A) :\overset{\text{def}}{=} \dim[A_{\cdot 1}.. A_{\cdot n}]_\lambda$

Regularita matice: Nechť $A \in T^{n,n}$. Pokud $h(A) = n$, A regulární, jinak singulár.
Nechť P_n je VP nad T a $A \in \mathcal{L}(P_n)$, X báze P_n. A je regulární operátor, $\Leftrightarrow$ ${}^{X}A$ regul. matice

Permutace na $\hat{n}$: Každou bijekci $\pi : \hat{n} \to \hat{n}$ nazýváme permutací na $\hat{n}$.
Množinu $\forall$ permutací značíme S_n.

Inverze: Nechť $\pi \in S_n$. Pak inverzí v π nazveme každou uspořádanou dvojici (i,j) $i,j \in \hat{n}$, $i < j$ & $\pi(i) > \pi(j)$. Počet inverzí v π značíme I_π

Znaménko π: $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{I_\pi}$ if $\operatorname{sgn}\pi = 1 \to$ permutace sudá
$= -1 \to$ perm. lichá
Identická perm. je sudá

Transpozice: Nechť $n \geq 2$ a $i,j \in \hat{n}$, $i \neq j$ transpozicí čísel i,j nazveme permutaci τ_{ij} : $\tau_{ij}(k) = k$ $i \neq k \neq j$. lichá perm.
$\tau_{ij}(i) = j$
$\tau_{ij}(j) = i$

Složená perm: $\pi, \rho \in S_n \Rightarrow sgn(\pi \circ \rho) = sgn\,\pi \cdot sgn\,\rho$
$\pi \in S_n \Rightarrow sgn\,\pi = sgn\,\pi^{-1}$

Determinant matice: Nechť $A \in T^{n,n}$. Pak determ. matice A nazveme číslo $\det A := \sum_{\pi \in S_n} sgn\,\pi\, A_{1\pi(1)} \cdots A_{n\pi(n)}$ sčítance nazýváme členy determ.

$\downarrow i$

Saurusovo pravidlo Matice 3x3 $A_{\pi(1)1}$ $A_{\pi(n)n}$

Horní a dolní Δ tvar: Matice A je v horním Δ tvaru, if $\forall ij\ i>j$ $A_{ij}=0$, dolní Δ if $\forall i,j \in \hat{n}$ $i<j$, $A_{ij}=0$

Determinant Δ matice: Nechť $A \in T^{n,n}$ a A je dolní/horní Δ. Pak $\det A = A_{11} \cdots A_{nn}$.

Řádkové & sloupcové úpravy det: Nechť $A \in T^{n,n}$. Pak

I. vznikne-li B vynás. nějakého řádku/sloupce A číslem $\alpha \in T$, pak $\det B = \alpha \det A$

II. Je-li nějaký řád/sloup nulový $\Rightarrow \det A = 0$

III. vznikne-li B z A prohozením dvou řádků (sloupců) $\det B = -\det A$

IV. má-li A dva řád/sloup stejné $\Rightarrow \det A = 0$

V. $A = (\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_{i-1}\ \vec{p}\ \vec{a}_{i+1} \ldots \vec{a}_n)$
$B = (\qquad \vec{q} \qquad)$ $\Rightarrow \det A + \det B = \det(\vec{a}_1 \ldots \vec{p}+\vec{q} \ldots \vec{a}_n)$ analog. pro řádky

VI. přičteme-li k jednomu řádku/sloup. A libovolný α násobek jiného řád/sloup. det se nezmění

EŘÚ: Nechť $A \in T^{n,n}$. Nechť M vznikla z I_n konečným počtem EŘÚ. Pak $\det(MA) = \det M \det A$

Regularita & determinant: $A \in T^{n,n}$ reg $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Násobení & determinant $A, B \in T^{n,n} \Rightarrow \det(AB) = \det A \det B$

Determ. inverzní mat: Nechť A je regul. Pak $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

Algebraický doplněk: Nechť $A \in T^{n,n}$, $n>1$. Ozn $A^{(i,j)}$ matici, která vznikne z A vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak $D_{ij} := (-1)^{i+j} \det A^{(i,j)}$ nazveme alg. doplňkem prvku A_{ij}

Rozvoj determinantu: $A \in T^{n,n}$, $n>1$, $\forall i \in \hat{n}$ platí

i - řádkový $\sum_{j=1}^{n} A_{ij} D_{ij}$

j - sloupcový $\sum_{i=1}^{n} A_{ij} D_{ij}$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathbb{D}$

Adjungovaná matice: Nechť $A \in T^{n,n}$ $n>1$. Adj. maticí k A nazveme A^{adj} def $[A^{adj}]_{ij} := D_{ji}$

LIN. ZOB: Nechť P, Q jsou VP nad stejným T. Zob $A: P \to Q$ nazveme lineárním (holomorfním) pokud

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in P$: $A(\vec{x}+\vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y})$ aditivita
2. $\forall \alpha \in T, \vec{x} \in P$: $A(\alpha \vec{x}) = \alpha A(\vec{x})$ homog.

VP Nechť P, Q jsou VP nad stej T. $\Rightarrow$ množina $\mathcal{L}(P,Q)$ s operacemi sčítání zobrazení a násobení zobr. čísel z tělesa def. výše tvoří vektorový prostor nad T.

Def: Nechť P, Q jsou VP nad stej T. Množinu lin. zob. $P \to Q$ značíme $\mathcal{L}(P,Q)$. Nechť $A, B \in \mathcal{L}(P,Q)$, $\alpha \in T$ pak operace:

1. součet zob. $A+B$ $\forall \vec{x} \in P$ def $(A+B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}$
2. nás. zobr. A číslem $\alpha \in T$ αA $\forall \vec{x} \in P$ def. $(\alpha A)\vec{x} = \alpha A \vec{x}$

- Nechť V je VP nad T
  - je-li $A \in \mathcal{L}(V,V)$, A lin. op. $\mathcal{L}(V)$
  - je-li $\varphi \in \mathcal{L}(V,T)$, φ lin. funkcionál a píšeme $V^{\#}$ duální prostor k V

- Nechť P, Q jsou VP nad T. Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$
  - je-li A prosté, řekneme, že A je monomorfní
  - A "na" Q epimorfní
  - A prosté a „na" Q izomorfní
  - A izomorfní a $P=Q$ regul. op.

Cramer: Nechť A je regulární $\square$ řádu n, $\vec{b} \in \mathbb{C}^n$.
Ozn. $B^{(i)}$ matici, která z matice A vznikne při náhradě i-tého sloupce vektorem $\vec{b}$.
$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ je řešením soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$

$\Rightarrow \forall i \in \hat{n} \quad x_i = \dfrac{\det B^{(i)}}{\det A}$

$Ax = b$

$x^{(i)} \dfrac{\det B^{(i)}}{\det A}$

Vlastní čísla: (10)

DEF: Nechť A je čtverc. matice řádu n. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ nazveme vlastním číslem matice A, jestliže $\exists \vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq \vec{o}$ tak, že $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.
Každý takový vektor $\vec{x}$ nazveme vlastním vektorem matice A příslušný k vlastnímu čísle λ. Množinu všech vlastních čísel značíme $\sigma(A)$ a nazýváme spektrum matice A.

Ⓥ Nechť A je $n \times n$ a λ její vl. č. Množinu všech vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu λ tvoří (po přidání $\vec{o}$ vektoru) podprostor v $\mathbb{C}^n$. Dimenzi tohoto podprostoru značíme $\nu_g(\lambda)$ a nazýváme geometrická násobnost vlastního čísla λ.
(rovno počtu LN vlastních vektorů, které přísluší λ)

Ⓥ $\lambda \in \mathbb{C}$ vlast. ~~vektor~~ číslo □ matice $A \Leftrightarrow$ je kořenem rce. $\det(A - \lambda I) = 0$.
Nazývá se charakteristická rovnice matice A a její LS se nazývá charakter. polynom matice A. Značíme $p_A(\lambda)$.

DEF: Nechť A je čtverc. matice a λ její vlastní číslo. algebraickou násobností vlastního čísla λ nazveme jeho násobnost jakožto kořene char. pol. $p_A(\lambda)$. Ozn. $\nu_a(\lambda)$.

Ⓥ Nechť A je $n \times n$ a λ_0 její vlast. č. Pak $\nu_g(\lambda_0) \leq \nu_a(\lambda_0)$.

Ⓥ Nechť A je $n \times n$ a $\lambda_1, \dots \lambda_k$ jsou její vzájemně různá vl. č.
Nechť pro $i \in \hat{k}$ je $\vec{x}^{(i)}$ vlastní vekt. příslušný k vlast. č. λ_i.
Potom $(\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(k)})$ je LN soubor.

Důsledek: V $\mathbb{C}^n$ $\exists$ báze složená pouze z vlastních vektorů matice A $\Leftrightarrow \forall \lambda$ matice A platí $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.

DEF: Nechť A, B jsou □ matice řádu n. Říkáme, že matice A je podobná matici B, $\exists$-li reg. matice X tak, že $A = X^{-1}BX$
(A vznikla z B podobnostní trans.)

Ⓥ Nechť A, B jsou dvě □ matice vzájemně podobné. Pak mají stejný charakter. polynomy. tj. $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$. (mají stejná vlastní čísla)

Pozn: A podobná B, je také matice B podobná A

A B a B podobná C, je A podobná C.

~~Ⓥ Nechť~~

DEF: Nechť A je □ $n \times n$. Říkáme, že A je diagonalizovatelná, jestliže je podobná diag. matici, tj. když ∃ regulární X řádu n a čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ tak, že $X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Ⓥ Nechť A je □ $n \times n$. Pak A je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$ ∃ báze $\mathbb{C}^n$ složená z vlastních vektorů matice A.

$A^H = \bar{A}^T$ $(AB)^H = B^H A^H$

$A^H = A^*$

DEF: Nechť A je čtvercová $n \times n$. Potom

a) A je symetrická, je-li reálná a $A = A^T$ (tj. $a_{ij} = a_{ji}$ pro $i, j \in \hat{n}$)

b) A je hermitovská, je-li $A = A^H$ (tj. $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ pro $i, j \in \hat{n}$)

c) A je ortogonální, je-li reálná a $AA^T = I$ (tj. řádky jsou ortonormální v $\mathbb{R}^n$)

d) A je unitární, $AA^H = I$ (tj. řádky jsou ortonormální v $\mathbb{C}^n$)

e) A je normální, je-li $AA^H = A^H A$.

Ⓥ I je unitární, resp. ortogonální matice

jsou-li A, B unitární stejného řádu, je AB také unitární

Je-li A unitární $|\det A| = 1$

unitární, pak $A^{-1} = A^H$

- matice hermitovské (symetrické) a unitární (ortogonální) jsou normální.

- $AA^H = I$ řádky tvoří ortonor. soubor $\mathbb{C}^n$

$A^H A = I$ i sloupce

(V) A $m \times m$. Pak $\exists$ unitární matice $m \times m$ tak, že $A = U^H R U$, kde R je horní (dolní) Δ matice.

- horní (dolní) Δ matice je normální $\Leftrightarrow$ je diagonální

(V) A je normální matice $m \times m \Rightarrow \exists U$ $m \times m$: $A = U^H D U$

DIAGON. MAT

A normální $\Rightarrow \forall \lambda : V_g(\lambda) = V_a(\lambda)$

(V) Je-li A hermitovská $\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

A unitární $\Rightarrow |\lambda| = 1$

A herm. $\Rightarrow$ vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou ortogonální (při standar $\langle .,. \rangle$)

skal. souč

DEF: Nechť A je reálná symetr. matice $m \times m$. Zobrazení $F(\vec{x})$ které každému vektoru $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ přiřadí reálné číslo $F(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x})$ nazývá kvadratická forma a matice A se nazývá matice této kvadratické formy.

(matice kvadr. formy vždy symetrická) $F(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1\, x_2)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

DEF: a) symetrická A $m \times m$ se nazývá PD, je-li $(A\vec{x}, \vec{x}) > 0$ $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m, \vec{x} \neq \vec{0}$

b) je-li $(A\vec{x}, \vec{x}) < 0$ $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m, \vec{x} \neq \vec{0}$ nazývá se matice A ND

c) Symetrická A řádu n se nazývá PSD/NSD je-li $(A\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ ($\leq$) pro každý vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^m, \vec{x} \neq \vec{0}$ a $\exists \vec{x}^{(0)}$, že $(A\vec{x}^{(0)}, \vec{x}^{(0)}) = 0$

d) kvadratická forma se nazývá PD/ND, SD, má-li její matice tuto vlastnost

- kvadratická forma, která nemá žádnou z těchto vlastností, se nazývá indefinitní

- je-li A hermitovská, zavádějí se analog. pojmy.
(C)

DEF: Nechť A je hermitovská matice $n \times n$. Zobrazení $F(\vec{x})$, které ~~má~~ každému vektoru $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ přiřadí $F(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x})$ se nazývá hermitovská (kvadratická) forma a matice A se nazývá matice této hermitovské formy.

analogicky PD, ND, SND

(V) A hermitovská (symetrická) matice. Pak A je PD (SD) ND
$\Leftrightarrow \forall \lambda > 0 \quad (\geq 0)$

(V) Sylvestrovo kritérium

Hermitovská (resp. symetrická) matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

je PD $\Leftrightarrow a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots \det A > 0$

SKALÁRNÍ SOUČIN (10)

Nechť V je VP nad tělesem T. Zobrazení $V \times V$ do T, které každé dvojici vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in V$ přiřadí číslo $(\vec{x}, \vec{y}) \in T$ se nazývá skalární součin, pokud splňuje následující vlastnosti

1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}$
2) $\forall \vec{x} \in V \quad \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0 \;\&\; \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
3) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V \quad \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$
4) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \quad \forall \alpha \in T \quad \langle \alpha \vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

- prostor $\mathbb{R}^n$ se skalárním standardním součinem nazýváme euklidovský prostor a analogicky prostor $\mathbb{C}^n$ se stand. sk. souč. unitární prostor

(V) Nechť $(\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(m)})$ je LN soubor vektorů z VP V se skalárním součinem. Potom $\exists$ ortonom. soubor vektorů $(\vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(m)})$ tak, že $\forall k \in \hat{m}$ platí $[\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(k)}]_\lambda = [\vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(k)}]_\lambda$

- pokud podaří nalézt $(\vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(m)})$ najít, říkáme, že jsme soubor $(\vec{x}^{(1)}, \dots \vec{x}^{(m)})$ ortonormalizovali
- nenulový vekt. prostor konečné dimenze má ortonormální bázi.

Lineární operátory

Lineární zobrazení V do V nazýváme lineární operátor na V.
Množinu všech lin. operátorů na V značíme $\mathcal{L}(V)$.
Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Potom A je regulární tehdy a jen tehdy, je-li monomorfní ~~nebo~~ a epimorfní.

Matice lin. zob. v bázích X, Y $\quad {}^{X}A^{X}_{ij} = y_i^{\#}(Ax_j)$

INVERZNÍ OPERÁTOR

DEF: Zobrazení $E: V \mapsto V$ def. $(\forall x \in V)(Ex = x)$ nazýváme identický operátor na V.

POZN: $\cdot A \in \mathcal{L}(V) \Rightarrow AE = EA = A$ $\quad \cdot A \in \mathcal{L}(V)$, A regulární $\Rightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = E$

Ⓥ Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$
- $\exists$-li $B \in \mathcal{L}(V)$ takový, že $AB = E$, pak A epimorfní
- $\exists$-li $C \in \mathcal{L}(V)$ takový, že $CA = E$, pak A monomorfní
- Jsou-li splněny předpoklady (a), (b), tak A je regulární a platí $C = B = A^{-1}$

$(A^{-1})^{-1} = A$

Ⓥ Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$, A, B jsou regulární. Potom AB je také regulární a platí $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

DEF: Matici $A \in T^{n,n}$ nazýváme $\square$ maticí řádu n. Čtverc. matici A n-tého řádu nazýváme regulární $\Leftrightarrow h(A) = n$. Je-li $h(A) < n$, nazýváme ji singulární. Matici $\mathbb{E} \in T^{n,n}$; $\mathbb{E}_{ij} = \delta_{ij}$ nazýváme jednotkovou maticí n-tého řádu.

POZN: $A \in \mathcal{L}(V_n)$, X báze V_n. Pak ${}^{X}A = \mathbb{E} \Leftrightarrow A = E$

Ⓥ Nechť $A \in T^{n,n}$ je regulární. Potom $\exists_1$ regul. matice $\mathbb{B} \in T^{n,n}$ taková, že $A\mathbb{B} = \mathbb{B}A = \mathbb{E}$

DEF: Matici z předchozí věty $\mathbb{B}$ nazýváme maticí inverzní k matici A a značíme A^{-1}.

Ⓥ Nechť $A \in T^{n,n}$. Existuje-li $\mathbb{B} \in T^{n,n}$ taková, že $A\mathbb{B} = \mathbb{E}$ nebo $\mathbb{B}A = \mathbb{E}$, je A regulární a platí $\mathbb{B} = A^{-1}$

(V) Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$, A je regulární. Nechť X je báze V_n. Potom ${}^X(A^{-1}) = ({}^X A)^{-1}$.

(V) (GAUSS. METODA nalezení inverzní matice)
Každou regulární matici $A \in T^{n,n}$ lze ekvival. ŘU převést na jednotkovou matici. Převedeme-li $(A|E) \in T^{n,2n}$ EŘU na matici $(E|B) \in T^{n,2n}$, pak platí $B = A^{-1}$

DEF: Nechť $X, \tilde{X}$ jsou báze V_n. Matici ${}_X P_{\tilde{X}} \in T^{n,n}$, kde $({}_X P_{\tilde{X}})_{ij} = x_i^\#(\tilde{x}_j)$ nazýváme **maticí přechodu** od báze X k bázi $\tilde{X}$.

(V) Nechť $X, \tilde{X}$ jsou báze V_n. Potom platí:
- ${}_X P_{\tilde{X}} = {}^{\tilde{X}}E^{X}$
- ${}_{\tilde{X}} P_X = {}_X P_{\tilde{X}}^{-1}$

(V) Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, $X, \tilde{X}$ jsou báze prostoru P, $Y, \tilde{Y}$ jsou báze prostoru Q. Potom platí ${}^{\tilde{X}}A^{\tilde{Y}} = {}_Y P_{\tilde{Y}}^{-1}\, {}^X A^Y\, {}_X P_{\tilde{X}}$

Důsledek: Nechť $A \in \mathcal{L}(P)$, nechť $X, \tilde{X}$ jsou báze prostoru P. Potom ${}^{\tilde{X}}A = {}_X P_{\tilde{X}}^{-1}\, {}^X A\, {}_X P_{\tilde{X}}$. Nechť $X, \tilde{X}$ jsou báze prostoru V_n, $x \in V_n$. Potom ${}_X P_{\tilde{X}} [x]_{\tilde{X}} = [x]_X$.

NORMÁLNÍ OPERÁTORY

(V) (Rieszova) Nechť H je prostor se skalárním součinem $\dim H < +\infty$. Potom $(\forall \varphi \in H^\#)(\exists_1 z \in H)(\forall x \in H)(\varphi(x) = \langle x, z \rangle)$

Lin. oper. na pros. sk. souč

(V) Nechť $A \in \mathcal{L}(H)$, $\dim H < +\infty$. Potom $\exists_1$ lin. operátor A^* takový, že $(\forall x \in H)(\forall y \in H)(\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle)$

DEF: Nechť $A \in \mathcal{L}(H)$, $\dim H < +\infty$. Lineární operátor $A^* \in \mathcal{L}(H)$ takový, že $\forall x, y \in H$ platí $\langle Ax | y \rangle = \langle x | A^* y \rangle$ se nazývá operátor sdružený k operátoru A.

(V) Nechť $A, B, E \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$, $\alpha \in T$. Potom

- $(A+B)^* = A^* + B^*$ • $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$ • $(AB)^* = B^* A^*$ • $(A^*)^* = A$
- $E^* = E$ • $\Theta^* = 0$ • Je-li A regulární, potom je i A^* regulární a platí $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

DEF: Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$. Říkáme, že A je

- **normální** $\Leftrightarrow AA^* = A^*A$
- **samodružný** $\Leftrightarrow A^* = A$ — pro $T=R$ nazýváme operátor A symetrickým, $T=C$: A hermitovským
- **izometrický** $\Leftrightarrow AA^* = E \ (= A^*A)$ — pro $T=R$: A ortogonální, $T=C$: A unitární

(V) Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Potom $A = \Theta \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{H})(\forall y \in \mathcal{H})(\langle Ax | y \rangle = 0)$

(V) Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$. A je samodružný $\Rightarrow A = \Theta \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{H})(\langle Ax, x \rangle = 0)$

(V) Nechť $A \in \mathcal{L}(U)$. $\Rightarrow A = \Theta \Leftrightarrow (\forall x \in U)(\langle Ax, x \rangle = 0)$

Normální operátory

(V) Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$. Potom A je normální $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathcal{H}$ platí $\|Ax\| = \|A^*x\|$

(V) Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} < +\infty$. Tvrzení jsou ekvivalentní

1) A je izometrický
2) $(\forall x \in \mathcal{H})(\forall y \in \mathcal{H})(\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle)$
3) $(\forall x \in \mathcal{H})(\|Ax\| = \|x\|)$

DEF: $A \in T^{m,n}$, $A^* \in T^{n,m}$ takovou, že $(A^*)_{ij} = \bar{A}_{ji}$ nazýváme maticí sdruženou k A.

$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$

DEF: $\mathcal{H}_n$ VP nad těl. $\mathbb{C}$ a nechť je dán operátor $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$

- $AA^* = A^*A$ normální
- $A = A^*$ hermitovský $\mathbb{R}$ symetrický
- $AA^* = I$ unitární $\mathbb{R}$ ortogonální

DEF: $A \in \mathbb{C}^{n,n}$

- $AA^H = A^HA$ normální
- $A = A^H$ hermitovská
- $AA^H = \mathbb{I}$ unitární

Ⓥ (Norm. oper. a norm. matice)
Nechť je dán VP $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_n$.
1. A normální operátor $\Leftrightarrow$ ${}^{\mathcal{X}}A$ norm. matice
herm. / herm.
unitární / unitární

Lemma: VP $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A je hermit. operátor
Jestliže $\langle A\vec{x} | \vec{x} \rangle = 0 \ \forall \mathcal{H}_n \Rightarrow A = \Theta$ - nul. funkcionál

Ⓥ Nechť je dán VP $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$ a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak A je normální
$\Leftrightarrow \|A\vec{x}\| = \|A^*\vec{x}\| \ \forall \vec{x} \in \mathcal{H}_n$.

Ⓥ VP $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A je normální.
Pak platí:
- $\lambda \in \sigma(A)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný λ
$\Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^*)$, $\vec{x}$ je vlast. vekt. A^* přísl. $\bar{\lambda}$
- vlastní vektory příslušné vzájemně různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

Ⓥ Diag. norm. op.
VP $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Je-li A normální $\Rightarrow$ je diagonalizovatelná

Ⓥ (Norm. op. ON báze vlastních vekt.) Nechť je dán VP $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$ a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak A je normální $\Leftrightarrow$ v $\mathcal{H}_n$ $\exists$ ON báze z vlastních vektorů.

Ⓥ (Unitární) VP $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak jsou ekvivalentní

1. A je unitární
2. $A^{-1} = A^*$
3. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n : \langle A\vec{x} | A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ (zachovává skal. součin)
4. $\forall \vec{x} \in \mathcal{H}_n : \|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ (zach. normu)

Ⓥ (Vlastnosti): VP $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, A, B unitární. Pak

1. $\forall \lambda \in \sigma(A)$ je $|\lambda| = 1$
2. $|\det A| = 1$
3. AB unitární

Ⓥ (Her. vlast) VP $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ hermit. Pak platí

1. $\forall \vec{x} \in \mathcal{H}_n \; \langle A\vec{x} | \vec{x} \rangle \in \mathbb{R}$
2. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$
3. $\det A \in \mathbb{R}$
4. $A(\mathcal{H}_n) \oplus \ker A = \mathcal{H}_n$

Ⓥ Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. A je normální $\Leftrightarrow \exists \underset{\text{DIAG}}{D}$ a $\underset{\text{UNIT.}}{U}$ $A = UDU^H$

Integrály s parametrem:

$$\int_E f(\vec{x};\alpha)\,d\lambda(\vec{x}) = H(\alpha)$$

$\uparrow$

$f(\vec{x},\alpha)\in \mathcal{L}(E)\quad \forall \alpha\in P$

hromadný bod — parametrická množina

(V) Nechť $\beta\in der(P)$. Nechť $\forall\alpha\in P\setminus\{\beta\}$ existuje

$\exists \lim\limits_{\substack{\alpha\to\beta\\ \alpha\in P}} f(\vec{x},\alpha)=\varphi(\vec{x})\quad \forall$ s.v. $\vec{x}\in E$

- Nechť $\forall\alpha\in P\setminus\{\beta\}$ je fce $\vec{x}\mapsto f(\vec{x},\alpha)$ λ-měřitelná
- Nechť $\exists g(\vec{x})\in\mathcal{L}(E)$ tak, že $|f(\vec{x},\alpha)|\le g(\vec{x})$

  $\forall$ s.v. $\vec{x}\in E\quad \forall\alpha\in P\setminus\{\beta\}$

Pak platí
$$\lim_{\substack{\alpha\to\beta\\ \alpha\in P}} H(\alpha)=\lim_{\substack{\alpha\to\beta\\ \alpha\in P}}\int f(\vec{x},\alpha)\,d\lambda(\vec{x})=\int_E\varphi(\vec{x})\,d\lambda(\vec{x})$$

(V) Nechť $\beta\in P$ ($P\subset\mathbb{R}$) a nechť je fce $\beta\mapsto f(\vec{x},\beta)$ spojitá fce v P. Nechť $\forall\beta\in P$ je fce $\vec{x}\mapsto f(\vec{x},\beta)$ λ-měřitelná a nechť $\exists g(\vec{x})\in\mathcal{L}(E)$ tak, že $|f(\vec{x},\beta)|\le g(\vec{x})$ $\forall$ s.v. $\vec{x}\in E$, $\forall\beta\in P$. Pak je fce $H(\beta)=\int_E f(\vec{x},\beta)\,d\lambda(\vec{x})$ spojitou funkcí v P.

(V) Nechť P je otevřený interval $P\subset\mathbb{R}$. Nechť

- $\forall\alpha\in P\quad x\mapsto f(x,\vec{\alpha})$ je λ-měřitelná
- $\alpha\mapsto f(x,\vec{\alpha})$ je diferenc. v P
- $\exists\beta\in P$ alespoň jedno tak, že $F(\beta):=\int_E f(x,\beta)\,d\mu(\vec{x})$ konverguje
- $\exists g(\vec{x})\in\mathcal{L}(E)$ tak, že $\forall$ s.v. $\vec{x}\in E$, $\forall\alpha\in P$ platí $\left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}(\vec{x},\alpha)\right|\le g(\vec{x})$

Pak platí, že
$$\forall\alpha\in I\quad \frac{dH}{d\alpha}=\frac{d}{d\alpha}\int_E f(\vec{x},\alpha)\,d\lambda(\vec{x})=\int_E\frac{d}{d\alpha}f(\vec{x},\alpha)\,d\lambda(\vec{x})=\frac{dF}{d\alpha}$$

$\int F(\alpha)$ K a platí

VII.

Limita v $\mathbb{C}^*$: Nechť $z_0 \in \mathbb{C}^*$ je hromadný bod def. oboru fce $f(z)$. Řekneme, že fce $f(z)$ má v bodě z_0 limitu rovnou $w \in \mathbb{C}^*$ (píšeme $\lim_{z \to z_0} f(z) = w$) $\Leftrightarrow (\forall H(w))(\exists H(z_0))(\forall z \in H(z_0) \cap Dom(f) \setminus \{z_0\})$ $(f(z) \in H(w))$.

Speciálně $(a_n)_1^\infty$ má limitu $a \Leftrightarrow (\forall H(a))(\exists n_0)(\forall n > n_0, n \in \mathbb{N})(a_n \in H(a$

Spojitost v $\mathbb{C}$: Řekneme, že fce $f(z)$ je spojitá v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, pokud je zde def. a platí $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ $\Rightarrow$ f je spojitá v $z_0 \in \mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ pro u, v takové, že $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ platí, že jsou spojité v x_0, y_0

Derivace v $\mathbb{C}$: Nechť $f(z)$ fce komplexní proměnné je definována na množině $M \subset \mathbb{C}$. Nechť $z_0 \in M$ je vnitřním bodem $Dom(f)$. Existuje-li konečná limita $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, potom říkáme, že $f(z)$ je diferencovatelná v bodě z_0. Hodnotu označíme $f'(z_0)$ a nazveme derivací v bodě z_0.

Holomorfnost fce v $\mathbb{C}$: Je-li $f(z)$ diferencovatelná v z_0 a na celém okolí z_0, potom říkáme, že $f(z)$ je holomorfní v z_0. Je-li $f(z)$ diferencovatelná v každém bodě otevřené množiny M, říkáme, že f je holomorfní na M. Je-li $f(z)$ diferencovatelná na okolí ∞, tj $\forall z, |z| > R$. $w = \frac{1}{z}$, $g(w) = f(z)$ je fce $g(w)$ holomorfní v 0, pak $f(z)$ je holomorfní v ∞.
Pokud $f'(z_0)$ $\exists$, nesmí záviset na způsobu přiblížení k z_0.

Cauchy-Riemannova věta
Fce $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 = x_0 + iy_0$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ derivaci mají-li $u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(x+iy)$, $v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(x+iy)$ v bodě x_0, y_0 totální diferenciál a platí-li C-R podmínky

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

- Nechť f, g jsou diferencovatelné v bodě $z \in \mathbb{C}$ a nechť $c \in \mathbb{C}$. Pak

$(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$ $\quad (cf)'(z) = cf'(z)$ $\quad$ násobení, dělení

dělení pokud $g(z) \neq 0$

- Nechť f je v bodě $z \in \mathbb{C}$ diferencovatelná, pak je v tomto bodě i spojitá.
- Je-li $g(z)$ diferencovatelná v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f(z)$ diferencovatelná v bodě $g(z_0)$, potom $(f \circ g)(z)$ je diferencovatelná v bodě z_0 a platí $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)$

(V) **Derivace inverzní fce**: Nechť f je holomorfní na OBLASTI $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$. Je-li $f^{-1}(z)$ inverzní fce k $f(z)$ DEFINOVANÁ & SPOJITÁ na oblasti $\Omega' \subset f(\Omega)$, potom $f^{-1}(z)$ je na oblasti Ω' holomorfní a platí $(f^{-1})'(z) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(z))}$ $\forall z \in \Omega$

Integrál komplexní fce reálné proměnné

Pro fci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definujeme $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)dx + i\int_a^b \operatorname{Im} f(x)dx$

Křivka: Křivkou v $\mathbb{C}$ rozumíme libovolné zobrazení $\varphi: \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$. Křivka φ je uzavřená, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$, jednoduchá, pokud φ je prosté zobrazení, a Jordanova, pokud je prostá na $\langle a, b)$ a $\varphi(a) = \varphi(b)$

na $\langle a, b\rangle$

D: Křivkový integrál komplexní proměnné: Nechť $\varphi: \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ po částech hladká křivka (C^1) (tj. lze ji rozložit na konečné sjednocení křivek třídy C^1 - má v (a,b) spojitou derivaci) v $\mathbb{C}$. Nechť fce $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na $\langle \varphi \rangle$ (ran φ). Potom $\int_\varphi f(z)dz := \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

v $\mathbb{C}$ neplatí $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ $\quad$ komplexní prom.

- Jsou-li φ a ψ po č. C^1 v $\mathbb{C}$, f, g fce $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ na $\langle \varphi \rangle$ spojité (resp. na $\langle \psi$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$: $\quad \int_\varphi \alpha f(z) + \beta g(z)dz = $ $\quad \int_{\varphi+\psi} = \int_\varphi + \int_\psi \quad \int_{\dot{-}\varphi} = -\int_\varphi$

Primitivní fce: Nechť F, f jsou fce komplexní proměnné takové, že platí $F'(z)=f(z)$ $\forall z\in\Omega$ otevřená podmnožina v $\mathbb{C}$. Pak říkáme, že F je primitivní fce k f na Ω.

$$\int_\varphi f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_a^b F'(\varphi(t))\,dt = \left[F(\varphi(t))\right]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

Důsledky: Má-li f v oblasti $\Omega\subset\mathbb{C}$ primitivní fci, potom $\forall \varphi$ uzavřené $\langle\varphi\rangle\subset\Omega$ $\int_\varphi f(z)\,dz = 0$ a $\int_\varphi f(z)\,dz = \int_\psi f(z)\,dz$, kde $\varphi: \langle a,b\rangle\to\mathbb{C}$, $\psi:\langle c,d\rangle\to\mathbb{C}$, $\varphi(a)=\psi(c)$; $\varphi(b)=\psi(d)$. $\langle\varphi\rangle\subset\Omega$, $\langle\psi\rangle\subset\Omega$

Cauchyho věta: Nechť f je holomorfní na otevřené množině $\Omega\subset\mathbb{C}$. Nechť φ je p.č. C^1 Jordanova křivka taková, že $\overline{Int\,\varphi}\subset\Omega$. Potom $\boxed{\int_\varphi f(z)\,dz = 0.}$

$Int\,\varphi$ $Ext\,\varphi$ $\overline{Int\,\varphi}$

Důsledek: Nechť φ, ψ jsou stejně orientované p.č. C^1 Jordanovy křivky takové, že $\langle\varphi\rangle\subset Int\,\psi$ a nechť f je holomorfní na oblasti Ω obsahující $\overline{Int\,\psi}\setminus Int\,\varphi$. Potom $\int_\varphi f(z)\,dz = \int_\psi f(z)\,dz$.

· Body v nichž fce f není holomorfní nazveme singulární.

Index bodu: Nechť φ je p.č. C^1 uzavřená křivka (nemusí být Jordanova) a $z_0\in\mathbb{C}\setminus\langle\varphi\rangle$. Def. index bodu z_0 vzhledem ke křivce φ jako $\boxed{ind_\varphi z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z-z_0}}$

Vlastnosti $ind_\varphi z_0$: Nechť φ je Jordanova křivka a $f(z)=\frac{1}{z-z_0}$ je holomorfní v $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$. $z_0\in Ext\,\varphi \Rightarrow ind_\varphi z_0 = 0$ (z Cauchyho věty)

$z_0\in Int\,\varphi \Rightarrow ind_\varphi z_0 = \int_\psi \frac{dz}{z-z_0}\frac{1}{2\pi i} = 1$, kde ψ je dost malá kladně orientovaná kružnice se středem v z_0 a poloměrem takovým, že $\langle\psi\rangle\subset Int\,\varphi$. $z_0\in Int\,\varphi$, ψ záporně orientovaná $ind_\varphi z_0 = \int_\psi = -1$, φ uzavřená, ale ne Jordanova, $ind_\varphi z_0\in\mathbb{Z}$ udává # oběhů daného bodu křivkou φ. V_-^+ se oběhy $\pm$

Cauchyho integrální vzorec: Nechť φ je p.č. C^1 Jordanova a křivka a nechť f je holomorfní na oblasti $\Omega \supset \overline{\mathrm{Int}\,\varphi}$. Potom $\forall z_0 \in \mathrm{Int}\,\varphi$ platí: $\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i \,\mathrm{ind}_\varphi z_0} \int_\varphi \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz}$. Hodnoty holomorfní fce uvnitř ~~fce~~ / $\mathrm{Int}\,\varphi$ jsou dány jednoznačně hodnotami f na $\langle \varphi \rangle$.

~~Cau~~ Rozvoj holomorfní fce do mocninné řady

Nechť f je holomorfní fce v kruhu $B(z_0, R)$, $R > 0$. Potom $\forall z \in B(z_0, R)$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, kde $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi$ a φ je kl. orientovaná p.č. C^1 Jordanova křivka t.ž. $\langle \varphi \rangle \subset B(z_0, R)$ a $z_0 \in \mathrm{Int}\,\varphi$.

Důsledek: Cauchyho integrální vzorec pro derivace

Nechť f je holomorfní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ a nechť φ je p.č. C^1 Jordanova, t.ž. $\overline{\mathrm{Int}\,\varphi} \subset \Omega$. Potom f má v $\forall z_0 \in \Omega$ derivace $\forall$ řádků a platí $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i \,\mathrm{ind}_\varphi z_0} \int_\varphi \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Laurentova řada: Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ je libovolná posloupnost komplexních čísel. Pak řada

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{regulární}} + \underbrace{\sum_{-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n}_{\text{hlavní část}}$$

Konverguje-li regulární část pro $|z - z_0| < R$ a konverguje-li hlavní část pro $\left|\frac{1}{z - z_0}\right| < r$, pak řada konverguje pro $\frac{1}{r} < |z - z_0| < R$

Mezikruží $P(z_0, r, R) = \{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{r} < |z - z_0| < R \}$, $r = 0$ $\{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R \}$

♡ **Laurentova věta**: Nechť f je holomorfní na $P(z_0, r, R)$. Potom $\forall z \in P$ platí $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, kde $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi$ pro $\forall$ kladně orientovanou p.č. C^1 Jordanovu φ, $\langle \varphi \rangle \in P(z_0, r, R) \wedge z_0 \in \mathrm{Int}\,\varphi$.

Tuto řadu nazveme Laurentovou řadou fce f v bodě z_0 pro mezikruží $P(z_0, r, R)$. Koeficienty řady jsou dány jednoznačně.

Klasifikace singularit: Řekneme, že $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita fce f, je-li f holomorfní na nějakém prstencovém okolí z_0 (mimo samotné z_0)

Pokud je z_0 izolovaná singularita, pak řekneme, že je <u>odstranitelná</u>, je-li Laurentův rozvoj f na $P(z_0, r, R)$ s nulovou hlavní částí, <u>pól stupně m</u> má-li Laur. ř. fce f na P konečně mnoho nenulových členů v hlavní části a $a_{-m} \neq 0 \wedge a_k = 0 \ \forall k < -m$, <u>podstatná singularita</u> má-li hl. část Laurentova rozvoje ∞ mnoho nenulových členů.

(V) Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita fce f

- je <u>odstranitelná</u> $\Leftrightarrow \exists \lim_{z \to z_0} f(z)$ konečná
- <u>je pólem stupně</u> $k \leftrightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$ na nějakém okolí z_0, kde g je holomorfní v z_0 a $g(z_0) \neq 0$
- <u>je pólem st.</u> $k \leftrightarrow \exists \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^k f(z) \neq 0 = a_{-k}$?

Z Laurentova rozvoje je důležitý člen $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\xi)\, d\xi$

Známe-li ho, určíme hodnotu $\int$.

Reziduum: Nechť z_0 je singulární bod f a řada ♡ je Laurentův rozvoj f na mezikruží $P(z_0, r, R)$, $R > 0$. <u>Koeficient a_{-1}</u> v tomto rozvoji nazveme <u>reziduum</u> fce f v bodě z_0.

Metody výpočtu rezidua z_0 podstatná singularita $\rightarrow$ nutno umět sestrojit Laur. ř.

z_0 odstranitelná sing. $\rightarrow f$ je holomorfní v $z_0 \Rightarrow \operatorname{rez}_{z_0} f = 0$

z_0 pól st. $1 \rightarrow \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = a_{-1}$

z_0 pól st. $m > 1 \rightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right] = a_{-1}$

Cauchyho - Reziduová věta: Nechť f je holomorfní na oblasti $\Omega \in \mathbb{C}$ s výjimkou konečného #bodů, tj $\exists M \subset \Omega$ konečná, s.t. f je holomorfní na $\Omega \setminus M$. Nechť φ je uzavřená p.č. C^1 $\langle \varphi \rangle \subset \Omega$.

otevřená & souvislá
(neexistují A, B odd $A \cup B$)

Potom $\int_\varphi f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{w \in M} \operatorname{ind}_\varphi w \cdot \operatorname{rez}_w f$. Pro kladně orientovanou křivku $\int_\varphi f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{rez}_w f$.

Rozvoj f v ∞: Nechť f je holomorfní na okolí ∞. Pro substituci $z = \frac{1}{w}$, $f(z) = g(w)$ je $g(w)$ holomorfní na okolí 0.

Studujme hlavní část $\mathcal{L}$ rozvoje $g(w)$ na okolí 0. Záporné mocniny $w \Rightarrow$ kladné mocniny z $f(z)$ hol v $\infty \Leftrightarrow g(w)$ hol v 0.

Def $f(\infty) = g(0) = \lim_{z \to \infty} f(z)$ charakter singularity $f(z)$ v ∞ je stejný jako $g(w)$ v 0.

odstranitelná $\quad g(w) = \sum_0^\infty a_n w^n \to f(z) = \sum a_n z^{-n}$

pól st. m $\quad g(w) = \frac{a_{-m}}{w^m} + \frac{a_{-m+1}}{w^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{w} + \sum_0^{+\infty} a_n w^n$

$$f(z) = a_{-m} z^m + a_{-m+1} z^{m+1} + \dots + a_{-1} z + \sum_0^\infty \frac{a_n}{z^n}$$

podstatná $\quad g(w) = \sum_0^\infty a_n w^n + \sum_\infty^{-1} a_n w^n \Leftrightarrow f(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{z^n} + \sum_{+\infty}^{-1} \frac{a_n}{z^n}$

Reziduum v ∞

Nechť fce f je holomorfní pro $\forall z, |z| > R$. Reziduum v ∞ fce f nazveme $\operatorname{rez}_\infty f = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi f(z)\,dz$, kde $\varphi(t) = \rho e^{-it}$ je záporně orientovaná kružnice $0 \le t \le 2\pi$, $\rho > R$

Věta zobecněná reziduová

Má-li f v $\mathbb{C}^*$ konečně mnoho singularit, je jejich součet roven 0.

φ je p.č. C^1 uzavřená a $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Def index z_0 $\operatorname{ind}_\varphi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z-z_0}$

~~Cauchyho věta~~ Index bodu

Nechť φ je p.č. C^1 křivka a $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$.
Index z_0 vzhledem k φ: $\operatorname{ind}_\varphi z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z-z_0}$

Cauchyho vzorec:

Nechť φ je p.č. C^1 křivka Jordanova a nechť f je holomorfní na oblasti $\Omega \supset \overline{\operatorname{Int}\varphi}$. Potom $\forall z_0 \in \operatorname{Int}\varphi$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i \operatorname{ind}_\varphi z_0} \int_\varphi \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz.$$

Hodnoty holom. fce uvnitř $\operatorname{Int}\varphi$ jsou jednoznačně určeny hodnotami f na $\langle \varphi \rangle$.

Cauchyho věta:

Nechť f je holomorfní na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ a nechť φ je po částech hladká Jordanova křivka taková, že $\overline{\operatorname{Int}\varphi} \subset \Omega$. Potom $\int_\varphi f(z)\,dz = 0$.

Laurentova řada: Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ je libovolná posloupnost komplexních čísel. Pak

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\text{regulární}} + \underbrace{\sum_{-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n}_{\text{hlavní část}}$$

se nazývá LŘ.

Laurentova věta: Nechť f je holomorfní na $P(z_0, r, R)$. Potom $\forall z \in P$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ kde } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi$$

pro kladně orientovanou po č. hladkou Jordanovu křivku φ, $\langle \varphi \rangle \in P(z_0, r, R) \wedge z_0 \in \operatorname{Int}\varphi$.

I. (AXIOMY, PODM. PRAV. NEZÁV. NÁH. VEL)

PRAVDĚPODOBNOST: Je fce $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ pro kterou platí:

1) $\forall A \in \mathcal{A}: P(A) \geq 0$ 2) $P(\Omega) = 1$ 3) $\forall (A_1, \ldots)$ A_i disjunktní $P(\sum_1^\infty A_i) = \sum_1^\infty P(A_i)$

SIGMA ALG: Nechť Ω je potenční množina a $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ se nazývá množ. algebra, pokud 1) $\emptyset \in \mathcal{A}$
2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$ symetrická diference

$\mathcal{A}$ je σ-algebra, pokud 1) $\emptyset \in \mathcal{A}$
2) $A^c \in \mathcal{A}$
3) $\bigcup_1^\infty A_n \in \mathcal{A}$

VLASTNOSTI PRAV.: Nechť $P(\emptyset) = 0$ $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$A \subset B \Rightarrow P(A) < P(B)$

$P(B-A) = P(B) - P(A)$

$P(A) \leq 1$ $P(A^c) = 1 - P(A)$

BOOLEOVA NER: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ splňující 3+3 axiomy

$P(\sum_1^m A_j) = \sum_1^m P(A_j)$ pro jevy disj

$((A_n)_1^\infty \in \mathcal{A}) \Rightarrow P(\bigcup_1^\infty A_n) \leq \sum_1^\infty P(A_n)$

MONOTONNÍ KONVERGENCE: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $(A_n)_1^\infty \in \mathcal{A}$

$A_n \searrow A$ $(A_n \supset A_{n+1};\ A = \bigcap_1^\infty A_n) \Rightarrow P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

$A_n \nearrow A$ $(A_{n+1} \supset A_n;\ A = \bigcup_1^\infty A_n) \Rightarrow P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

PODMÍNĚNÁ PRAV. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; $A, B \in \mathcal{A}$, $P(B) \neq 0$. Def. veličinu $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ a nazveme ji podmíněn. prst. jevu A za předpokl. B
(Zobraz. $P(\cdot|B)$ splňuje axiomy pravděp.)

SOUČINOVÉ PRAVIDLO: Nechť $A_1 \ldots A_n \in \mathcal{A}$ t.ž. $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Pak
$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1})$

O ÚPLNOSTI: Nechť $A \in \mathcal{A}$ a $(H_k)_1^{n, \infty} \in \mathcal{A}$ nechť je úplný rozklad jistého jevu [1) H_k vzájemně neslučitelné 2) $P(\sum H_k) = 1$ 3) $P(H_k) > 0$] $\forall k$

$\sum P(H_k) = 1$

Pak $P(A) = \sum P(A|H_k) P(H_k)$

$\Omega = \sum_k H_k$ - nemusí, nemusí být - lze vypočítat množiny s nulovou P

BAYESOVA VĚTA: Nechť $A \in \mathcal{A}$, $P(A)>0$, $(H_k)_1^{n,\infty}$ je úplný rozklad jistého jevu. Pak $P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum_l P(A|H_l)P(H_l)}$ $\forall k \in A \ (\in \mathbb{N})$

Stochasticky nezávislé jevy: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $\mathcal{C}$ systém jevů z $\mathcal{A}$. Pak jevy v $\mathcal{C}$ nazveme vzájemně stochasticky nezávislé pokud pro $\forall k \in \mathbb{N}$ a $\forall \underbrace{A_1, \dots, A_k}_{\text{náhodná } k\text{-tice}} \in \mathcal{C}$ platí $P(\bigcap_1^k A_m) = \prod_1^k P(A_m)$

Nezávislost jevů: dva neslučitelné jevy A, B jsou nezávislé $\Leftrightarrow P(A)P(B)=0$

- $A, B \in \mathcal{A}$ a $P(B)=0 \vee P(B)=1 \Rightarrow A, B$ jsou nezávislé
- $A, B \in \mathcal{A}$ a $P(B)>0$ $P(A|B)=P(A) \Leftrightarrow A, B$ jsou nezávislé
- A, B nezávislé $\Rightarrow A, B^c$ nezávislé

Borel-Cantelliho lemma: $(A_m)_1^\infty \in \mathcal{A}$. Pak a) $\sum_1^\infty P(A_m) < \infty \Rightarrow$

$P(\{A_m \text{ i.o.}\}) = P(\limsup_{n\to\infty} A_m) = $
$= P(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} A_k) = 0$

b) A_m vzájemně nezávislé

$P(\{A_m \text{ i.o.}\}) = 0 \Rightarrow \sum_1^\infty P(A_m) < \infty$

Minimální σ-algebra: Nechť Ω, systém podmnožin $\mathcal{T} \subset 2^\Omega$, $\mathcal{T} \neq 0$. Definujeme minimální σ-algebra $\sigma(\mathcal{T}) = \bigcap_\alpha A_\alpha$ tak, že A_α jsou σ-algebry nad Ω a $\mathcal{T} \subset A_\alpha$ $\forall \alpha$ (nemusí být spočetný index) $\Omega = 2^n$, $\mathcal{T}^n = \{\bigtimes_1^n (a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$, pak $\sigma(\mathcal{T}^n) = \mathcal{B}_n$ a nazveme Borelovskou σ-algebrou v $\mathbb{R}^n$; $B \in \mathcal{B}_n$ borelovsky měř

Náhodná veličina: Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$, $X: \Omega \to \mathbb{R}^n$ se nazývá náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A})$ pokud $\forall B \in \mathcal{B}_n : X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Náhodná veličina je $\mathcal{A}$ měřitelná, je-li $\mathcal{A}$ borelovská pak n.v. je bor. měřitelná.

Náhodná veličina & $\mathcal{T}$: Nechť $\mathcal{T} \neq 0$ & $\mathcal{T} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$, $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}$, X je náh. veličina na $(\Omega, \mathcal{A}) \Leftrightarrow X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ $\forall B \in \mathcal{T}$.

Náh. vel. & $\mathcal{T}_1$: $\mathcal{T}_1 = \{(-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}$. X je náh. vel. z $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ pokud $\{\omega : X(\omega) < b\} \in \mathcal{A}$ $\forall b \in \mathbb{R}$

Vektor. náh. vel.: $X = (X_1, \dots X_n)$ nazveme vektorovou náh. vel., pokud $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ $\forall B \in \mathcal{B}_n = \sigma(\bigtimes_1^n (a_j, b_j))$

nezávislé – σ-alg?

+ spojité

Transformace náh. vel.: Nechť X je vektorová náh. vel. $X: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$
Nechť $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ je borel. měř. Pak $g(X)$ je n. v. na $(\Omega, \mathcal{A})$. spoj $g \to$ měř g

Nezávislost náhodných veličin: Nechť $(X_j)_1^{n,\infty}$ jsou náh. vel. z $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$
$X_j^{-1}(\mathcal{B}) = \{X_j^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ se nazývá σ-algebra generovaná náh. veličinou stejné pros...
X_j. Říkáme, že $(X_j)^{n,\infty}$ jsou nezávislé veličiny, pokud $X_j^{-1}(\mathcal{B})$ jsou nezávislé
σ-algebry generované X_j.

Nezávislé podalgebry: Nechť σ, ω jsou podalgebry v $\mathcal{A}$. Pak ω, σ jsou nezávislé, pokud pro $\forall A \in \sigma$; $\forall B \in \omega$ jsou A, B nezávislé jevy.

Důsledek: $(X_j)_1^{n,\infty}$ jsou nezávislé náhodné veličiny, pokud pro $\forall B_j \in \mathcal{B}$
$\forall j \in \hat{k}$ (libovolných k indexů) $P\left(\bigcap_{j=1}^{k} X_j^{-1}(B_j)\right) = \prod_{j=1}^{k} P(X_j^{-1}(B_j))$ + spojité sdružen

Transformace náh. veličin (nezávislé)
X, Y nezávislé n. vel. na $(\Omega, \mathcal{A}) \Leftrightarrow \forall f, g$ borel měřitelné jsou $f(X), f(Y)$ nezávislé n. vel.

1 **Nezávislost n. v. a rozdělení**: Nechť $(X_n)_1^{n,\infty}$ jsou n. v. na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ s rozdělením P^{X_n}. Pak $(X_n)_1^{n,\infty}$ jsou nezávislé
$\Leftrightarrow F_X(x) = \prod_j F_{X_j}(x_j) \quad \forall j, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x_j \in \mathbb{R}$

Poznámka: $\mathcal{B}$ v definici náh. veličiny lze zaměnit za $\tau \subset \mathcal{B}$.
$\sigma(\tau) = \mathcal{B}$ a τ uzavřený na konečné průniky.

V

DEF: (Sdružená dist. fce):

Buď $\mathbb{X} = (X_1, .., X_n)$ vekt. náh. vel. na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$P^{\mathbb{X}} = P \circ \mathbb{X}^{-1}$ rozdělení $\mathbb{X}$. Potom sdružená (vícerozm.) distr. fce veličiny $\mathbb{X}$: $F_{\mathbb{X}}(\mathbb{x}) = P^{\mathbb{X}}\big|_{\tau_n = \{ \times_{i=1}^{n} (-\infty, x_i], x_i \in \mathbb{R} \}}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Náhodné veličiny:

DEF: (σ-algebra minimální)

Buď τ libovolný systém podmnožin $\subset 2^{\Omega}$, $\Omega \wedge \tau \neq \emptyset$.

Def. min. σ-algebru $\sigma(\tau) = \bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$, kde A_{α} jsou σ-alg. nad Ω a $A_{\alpha} \supset \tau$ $\forall \alpha$

DEF: (Borel σ-alg)

Buď $\Omega = \mathbb{R}$, $\tau = \{(a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$. Pak $\sigma(\tau) = \mathcal{B}$ naz. σ-alg. borelovskou.

Libovolná $B \supset \mathcal{B}$ je bor. měř.

$\Omega = \mathbb{R}^n$; $\tau^n = \{\overset{n}{\underset{i}{X}}(a_i, b_i), a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$, Pak $\sigma(\tau^n) = \mathcal{B}_n$ bor. σ-alg na $\mathbb{R}^n$.

(Nechť Ω topol. pr., τ - topologie $\Rightarrow \sigma(\tau) = \mathcal{B}$ bor. σ-alg. na top. pr.)

DEF (Náh. vel.). Nechť máme $(\Omega, \mathcal{A})$ měř. prostor s mírou. Říkáme, že fce $X: \Omega \to \mathbb{R}^n$ je náh. veličina, pokud $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. (~~Vzor~~ borel. mn nazýváme jevem, náh. vel $\mathcal{A}$-měř)

(V): $\emptyset = \tau \subset 2^{\mathbb{R}^n}$, který generuje $\mathcal{B}$ $(\sigma(\tau) = \mathcal{B})$. Pak X je náh. vel na $(\Omega, \mathcal{A})$ $\Leftrightarrow$ $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ $\forall B \subset \tau$.

VEKTOROVÁ: $X = (X_1, \dots X_n)$ vek. náh., pokud $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ $\forall B \in \mathcal{B}_n = \sigma(\overset{n}{\underset{i=1}{X}}(a_i, b_i))$

NÁH VEL: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ je náh. vel. if

$(\forall x \in \mathbb{R})\ (X^{-1}((-\infty, x]) = \{w \in \Omega \mid X(w) \leq x\} \in \mathcal{A})$

NÁH VEL SPOJITÁ: náh. vel. X je spojitá, jestliže její hodnoty, přiřazené prvkům výběrového prostoru Ω, tvoří interval na ose reál. č., přičemž každý bod tohoto intervalu má 0 pravděp.

Náh. vel. X je spojitá, if $\exists f \geq 0$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\forall a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ platí

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

hustota pr. náh. vel. X

$+ \forall x \in \mathbb{R}$

$P(X = x) = 0$

nezávislost: Nechť ω, σ jsou podalgebry v $\mathcal{A}$. Jsou nezávislé, pokud pro $\forall A \in \sigma$, $\forall B \in \sigma$ jsou A, B nezávislé jevy.

σ-algebra: Nechť $(X_j)_1^\infty$ jsou ~~náhz~~ náhodné veličiny $\times (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$
$X_j^{-1}(\mathcal{B}) = \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ jsou σ-alg. generované náh. vel. X_j.
Říkáme, že $(X_j)_1^\infty$ jsou nezávislé n.v, pokud $X_j^{-1}(\mathcal{B})$ $\forall j$ jsou nezávislé σ-alg generované X_j.

Důsledek: (X_j) jsou nezávislé, pokud $\forall B_j \in \mathcal{B}$ $\forall j \in k$

$$P\left(\bigcap_1^k X_j^{-1}(B_j)\right) = \prod_1^k P(X_j^{-1}(B_j)) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$P(X \in \bigtimes_1^k B_j) = P(X^{-1}(\times B_j)) = P^X(\times B_j)$$

- X, Y jsou nez. n.v na $(\Omega, \mathcal{A}) \Leftrightarrow$ $\forall f, g$ bor. měř. jsou $f(X), g(Y)$ nezávislé.

Nezávisl n.v a rozdělení:

Nechť $(X_n)_1^\infty$ jsou n.v na $(\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ s rozdělením P^{X_n}.
Pak $(X_n)_1^\infty$ jsou nezávislé $\Leftrightarrow F_X(x) = \prod_j F_{X_j}(x_j)$ $\forall j, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x_j \in \mathbb{R}$.
Nechť $X = (X_1 .. X_n)$ má SASR. Potom $X_1 .. X_n$ nezávislé

$$\Leftrightarrow \quad f_X(x) = \prod_{j=1}^n f_{X_j}(x_j) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Buď $X = (X_1 .. X_n)$ nezávislé n.v (ASR). Potom $X_1 + X_2 .. + X_r = Y_1$, $X_{r+1} + .. + X_n = Y_2$ jsou nez. n.v.

II. (Rozdělení, dist. spoj. metody, hustota, distr. fce)

Rozdělení pravděpodobnosti: Nechť X je náh. vel. na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak rozdělení X je pravděpodobnostní míra $P^X \overset{def}{=} P \circ X^{-1}$ na prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ a přejímá vlastnosti (axiomy) P.

$$P^X(B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\}) \overset{ozn}{=} P(X \in B)$$

Distribuční fce: Nechť X je náh. vel. $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ s rozdělením P^X. Pak $F_X = P^X|_{\mathcal{C}_1 = \{(-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}}$ nazýváme distrib. fce náh. veličiny X.

$$F_X(x) = P^X((-\infty, x]) = P(X^{-1}(-\infty, x]) = P(X \leq x)$$

1. F_X neklesající
2. $\lim_{x \to \infty} F_X = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F_X = 0$
3. F_X spojitá zprava.

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, P^X) \to (\mathbb{R}^n, \sigma(\mathcal{C}_n), F_X)$$

O jednoznačném rozšíření: Nechť P, Q jsou pravděp. na $(\Omega, \mathcal{A})$ a $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ uzavřený na konečné průniky tak, že $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$.
$P = Q$ na $\mathcal{C} \Leftrightarrow P = Q$ na $\mathcal{A}$. (z Monotony class teorému)

Jednoznačnost F_X: Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$, X n. v. na $(\Omega, \mathcal{A})$ s rozdělením P^X a $F_X = P^X|_{\mathcal{C}_{1,n}}$. Pak F_X jednoznačně charakterizuje P^X.

O prodloužení P: Nechť $\Omega, \emptyset \neq \mathcal{C}$ je algebra a $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$. Nechť P je pravděpodobnostní míra na $\mathcal{C}$. Pak $\exists_1$ prodloužení P z $\mathcal{C}$ na $\sigma(\mathcal{C})$.

Vlastnosti distribuční fce F_X:
- F_X (sdružen.) je monotonní (neklesající) ($F_X(x) \leq F_X(\tilde{x})$) v každé své proměnné.
- $\lim_{x_j \to -\infty} F_X(x) = 0 \quad \forall j \in \hat{n}, \forall x_i \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x_j \to +\infty} F_X(x) = F_{(X_1, \dots X_{j-1}, X_{j+1}, \dots X_n)}(x_1, \dots x_{j-1}, x_{j+1}, \dots x_n)$$

$$\lim_{\substack{x_j \to +\infty \\ \forall j}} F_X(x) = 1$$

- F_X je zprava spojitá v každé své proměnné

Důsledek: $F_X(x)$, $\lim_{\substack{x_j \to +\infty \\ j \neq j_0}} F_X = \lim \dots \lim F_X = F_{X_{j_0}}(x_{j_0})$

$$P(a_1 < X < b_1, a_2 < Y < b_2) = F_{X,Y}(b_1, b_2) - F_{X,Y}(b_1, a_2) - F_{X,Y}(a_1, b_2) + F_{X,Y}(a_1, a_2)$$

$$P(a_1 < X < b_1, a_2 < Y < b_2) - F_{X,Y}(b_1, b_2) - F_{X,Y}(b_1, a_2) \mp F_{X,Y}(a_1, b_2) + F_{X,Y}(a_1, a_2)$$

O existenci F_X: Nechť fce $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovuje vlastnostem 1) - 3). Pak $\exists$ n.v. X s rozdělením P^X tak, že $P^X|_{\mathcal{C}_1} = F$.

Diskrétní rozdělení: X náh. vel. na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s rozdělením P^X se nazývá diskrétní, if $Ran(X)$ je nejvýše spočetná množina. Při značení $Ran(X) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ $P(X = x_k) = p_k \in [0,1]$ $\forall k \in \hat{m}/\mathbb{N}$

$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum p_k \mathbb{1}_{[x_k, \infty)}(x)$ fce $f_X(x) = \begin{cases} p_k & x = x_k \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ $\sum_{\forall k} p_k = 1$

Podmíněná diskr. hust. pravděp.: Nechť X, Y je diskrétní n.v. na $(\Omega, \mathcal{A})$ s fr. fcemi $(f_X, f_Y, f_{(X,Y)})$. Definujeme podmíněnou diskrétní hustotu pravděpodobnosti $\forall x \in Ran X$ a libovolně dané fixované $y \in Ran Y$ t.ž. $P(Y = y) > 0$ jako $f_{X|Y}(x|y) = P(X = x \mid Y = y) = \dfrac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$.

Absolutní spojitost míry: Nechť λ, ν jsou míry na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$. Řekneme, že ν je absolutně spojitá vzhledem k λ $(\nu \ll \lambda)$, pokud $\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall B \in \mathcal{B}_n$ $\lambda(B) < \delta \Rightarrow \nu(B) < \varepsilon$

Dominance: λ, ν na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$. λ dominuje ν (ν je dominovaná λ) if $\forall B \in \mathcal{B}_n$ $\lambda(B) = 0 \Rightarrow \nu(B) = 0$

$\nu \ll \lambda \Rightarrow \nu$ je dominovaná λ

O absolutní spojitosti Leb. int.: Nechť λ je σ-finitní míra na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$, $f \geq 0$ měřitelná, $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \lambda)$. Označme míru $\nu(B) = \int_B f \, d\lambda$ pro $\forall B \in \mathcal{B}_n$. Z vlastností integrálu je ν míra a $\nu \ll \lambda$.

Radon-Nikodymova věta: Nechť λ je σ-finitní míra & $\nu \ll \lambda$. Pak $\exists f \geq 0$ bor. měřitelná na $\mathbb{R}^n$, že $\nu(B) = \int_B f \, d\lambda$ $\forall B \in \mathcal{B}_n$, f je jednoznačná s.v. vzhledem λ. f nazveme R-N derivací míry ν podle λ, ozn $f = \dfrac{d\nu}{d\lambda}$.

Hustota pravděpodobnosti: Nechť $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ je n.v. na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s rozd. $P^{\mathbb{X}} = P \circ \mathbb{X}^{-1}$. $\mathbb{X}$ má sdružené absolutně spoj. rozdělení ASR_λ vzhledem k λ, pokud $P^{\mathbb{X}} \ll \lambda$ a λ je σ-finitní. Podle R-N $\exists f = f_{\mathbb{X}} = \dfrac{dP^{\mathbb{X}}}{d\lambda}$ a tuto R-N derivaci nazveme hustotou pravděp. $\mathbb{X}$ w.r.t. λ $\forall B \in \mathcal{B}_n$, $P^{\mathbb{X}}(B) = \int_B f_{\mathbb{X}} \, d\lambda$

Pro $d\lambda = dx$ $P(X \leq x) = F_{\mathbb{X}}(x) = \int_{(-\infty, x]} f_X(t) \, dt$

DEF. (ASR): Buďte $(X_1 \dots X_n)$ n.v. Říkáme, že mají (pro $n \geq 2$ sdružené) rozdělení absolutně spojitého typu (ASR/SASR) pokud na prostoru $\exists$ borel. měř. fce $f_X: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taková, že $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
$f_X(t)$ nazýváme (sdruženou) hust. pravděp. (vzhledem k Leb. míře) náhodné veličiny X. $F_X'(x) = f_X(x)$

(ABSOLUTNÍ SPOJITOST): Říkáme, že $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je abs. spojitá na (a,b), pokud $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall n)(\forall (a_j, b_j) \subset (a,b))$ $\sum_{j=1}^{n} |a_j - b_j| < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |F(a_j) - F(b_j)| < \varepsilon$

(V) Fce $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je AS, pokud $\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bor. měř. na $(\Omega, \mathcal{B})$ taková, že $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \forall t \in \mathbb{R}$. V bodech spojitosti + $F'(x) = f(x)$.

(ABSOL. SPOJ. MÍRY): Míra λ je σ-konečná, pokud $\exists$ posloupnost $(B_j)_1^\infty \in \mathcal{B}_n$ t.ž.: $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \mathbb{R}^n \quad \lambda(B_j) < \infty$ (Leb. míra λ je σ-kon. $\mathbb{R} = \bigcup_{j=1}^{\infty} (-j, j) \quad \lambda(B_j) = 2j < \infty$)

(σ-kon. míra): Nechť ν, λ míry na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$. Říkáme, že ν je absolutně spoj. vzhledem k λ ($\nu << \lambda$) pokud $\lambda(B) = 0 \Rightarrow \nu(B) = 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}_n$.

V (Radon-Nikodym): Nechť ν, λ jsou míry na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ t.ž.: λ je σ-konečná a přitom $\nu << \lambda$. Pak $\exists f \geq 0$ borel. měř. na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$, taková, že $\nu(B) = \int_B f\,d\lambda \quad \forall B \in \mathcal{B}_n$. Fce f je daná jednoznačně. Tzn. if $\nu(B) = \int_B g\,d\lambda \Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}\ f = g$.
f se nazývá R-N derivace míry ν vzhledem k λ. $f = \frac{d\nu}{d\lambda}$.

(V) Mějme n.v. $X = (X_1 \dots X_n)$ s SASR a hust. pravděp. f_X. Potom $X' = (X_1 \dots X_{j-1}, X_{j+1} \dots X_n)$ má také SASR a platí $f_{X'}(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx_j \quad \forall x'$ $\quad f_{X'}(x')$ - marginální hust. pravděp. n.v. X'

(V) Nechť $X = (X_1 \dots X_n)$ mají SASR. Potom jsou $X_1 \dots X_n$ nezávislé $\Longleftrightarrow f_X(x) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

D) Vlastnosti f_X: Buď X n-rozměrná n.v. ($n \geq 1$). Potom platí
1. $f_X(x) \geq 0$ s.v. $\mathbb{R}^n$ 2. $\int_{\mathbb{R}^n} f_X(t)\,dt$ 3) $(\forall B \in \mathcal{B}_n)\ (P(X \in B)) = \int_B f_X(t)\,dt$

(PODM. DIST. FCE): Nechť X,Y n.v. Potom podmíněnou distr. fci náh. vel. X při dané hodnotě $Y=y\in\mathbb{R}_Y$ def. $F_{X|Y}=\lim_{\varepsilon\to0^+} P(X\leq x \mid y-\varepsilon<Y<y+\varepsilon)$ za předp., že lim $\exists$.
Pokud navíc $\exists f_{X|Y}(x|y)\geq 0$:

$$F_{X|Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(s|y)\,ds \quad \forall s\in\mathbb{R}$$

hustota náh. vel X podmíněna $Y=y$.

(V) Nechť X,Y mají SASR a $y_0\in\mathbb{R}_Y$. Nechť dále 1) $f_{X,Y}(x,y)$ je spojitá v y_0 pro s.v. x
2) $f_Y(y)$ je spojitá v y_0 a přitom $f_Y(y_0)>0 \Rightarrow \exists f_{X|Y}(x,y_0)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y_0)}{f_Y(y_0)}$ s.v. X

(V) (Transf. náh. vel.): Nechť X má SASR a $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ buď borel. měř. $m\leq n$
Potom $Y=g(X)$ má také SASR a platí $f_Y(y)=\dfrac{\partial m}{\partial y_1\ldots\partial y_m}\left(\int_{B_y} f_X(x)\,dx\right)$, kde
$B_y=\{x\in\mathbb{R}^n \mid g(x)\leq y\}$ za předp. exist. derivace s.v. vzhledem B_y k λ.
Pokud $m=n$ a g je regulární a prosté zobrazení na otevřené množině G: $\int_G f_X=1$,
pak

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\,|J_{g^{-1}}(y)| & y\in g(G)\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}$$

(V): Buď $g\in C^{(1)}$, $g'\neq 0$ po částech ryze monotonní, a nechť $Y=g(X)$. Pokud
$g^{-1}(y)\neq\emptyset$, pak ve všech bodech $s\in g^{-1}(y)$ platí $f_Y(y)=\sum_{s\in g^{-1}(y)}\dfrac{f_X(s)}{|g'(s)|}$

ROZDĚLENÍ: Gamma(α,β): $X\sim f_X(x)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\dfrac{1}{\beta^\alpha}\,x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}$ $\quad \alpha,\beta,x>0$

Beta(p,q): $X\sim f_X(x)=\dfrac{1}{B(p,q)}\,x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ $\quad p,q>0,\ x\in(0,1)$

$G\subset\mathbb{R}^n$ oblast

$U(G)$: $X\sim f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu(G)} & x\in G\\ 0 & x\notin G\end{cases}$ $\quad G=(a,b)$, $\mu=\dfrac{1}{b-a}$

Exp(θ,μ) $X\sim f_X(x)=\dfrac{1}{\theta}\exp\left(-\dfrac{x-\mu}{\theta}\right)$ $\quad x>\mu,\ \mu\in\mathbb{R},\ \theta>0$

(V): Buďte $X_1,\ldots,X_n$ iid dle Exp(θ). Pak $X_1+\ldots+X_n\sim$ Gamma(n,θ) $\quad$ Exp$(\theta,0)=$ Exp(θ) $=$ Gama$(1,\theta)$
(V): –"– $X_j\sim$ Gamma(α_j,β) $\quad \sum_{1}^{n} X_j\sim$ Gamma$\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j,\beta\right)$

$X \sim P^X$ má ASR$_1$ Leb $\overset{?}{\Leftrightarrow} \exists f \geq 0$ měřitelná, že $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_m} f \, dx$.

Důsledek: X ASR$_1$ $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b \int f \, d$

$\int_{-\infty}^{b} f \, dx - \int_{-\infty}^{a} f \, dx$

Pozn: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(A) \, dA \Rightarrow \frac{\partial^m F}{\partial x_1 \dots \partial x_m}(x_0) = f_X(x_0)$; x_0 bod spoj f_X.

Lebesgueův rozklad CDF: $\sim R_1$ $\forall F_X$ $F_X(x) = F_{AS}(x) + F_{JUMP}(x) + F_{SS}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

rozklad je obousměrný až na konstantu

A.S. část

skoky po ∞ mnoha částečných konstant

sing. spoj roste na množině míry 0 (ale)

$X \sim P^X$, $X' = (X_1, \dots X_{i-1}, X_{i+1}, \dots X_m)$ má ASR$_1$ a $f_{X'}(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \, dx_i$

Nezávislost & hustoty pravděp: $X \sim P^X$ ASR f_X. $(X_j)_1^n$ id $\Leftrightarrow f_X(x) = \prod_1^n f_{X_i}(x_i)$

Podmíněná hust. pravděp ASR: X, Y na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $(X, Y) \sim P^{X,Y}$ ASR$_1$

$(\exists f_{X,Y}(x,y))$. Nechť Y je ASR a $f_Y(y)$. Volme y t.ž. $f_Y(y) \neq 0$. Definujeme

zobr. $f_{X|Y}(x|y) = f_{X|Y=y}(x) := \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ a nazýváme podmín. p. hustota pravděp.

$X|Y=y$.

Korektnost označení: $f_{X|Y} \geq 0$ $\int f_{X|Y}(x,y) \, dx = \frac{1}{f_Y \, dy} \int f_{X,Y} \, dx = 1$

lze definovat

$P^{X|Y}(B) = \int_B f_{X|Y} \, dx$ nezáporná ✓

$B = \mathbb{R}^n \to 1$

σ-adi linita ✓ jednoznačnost s.n ✓ $F_{X|Y} = P^{X|Y} / \mathcal{C}_{1,n}$

× bez ASR Pokud $\exists \lim_{\varepsilon \to 0^+}$ $F_{X|Y=y}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} P(X \leq x \mid y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon)$?

Ⓥ Buďte $\{A_k\}_{k=1}^{N, +\infty}$ jevy. Potom platí:

1. $\bigcup_{n=1}^{\infty, N} A_k = A_1 + \sum_{k=2}^{N, \infty} A_1^c A_2^c \dots A_{k-1}^c A_k$
2. $(\bigcup A_k)^c = \bigcap A_k^c$

V Buď $\mathcal{A}$ σ-algebra jevů. Pak

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $(A_1, \dots A_n \in \mathcal{A}) \Rightarrow \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}\right)$
3. $\left((A_k)_{k=1}^{+\infty} \in \mathcal{A}\right) \Rightarrow \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}\right)$
4. $(A_1 \dots A_n \in \mathcal{A}) \Rightarrow \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}\right)$

DEF (Měřitelný prostor)
Buď Ω libovolná neprázdná množina a $\mathcal{A}$ je lib. σ-algebra def na Ω. Pak uspořádanou dvojici $(\Omega, \mathcal{A})$ nazýváme měřitelným prostorem. Množiny $A \in \mathcal{A}$ $\mathcal{A}$-měřitelné. (if $\mathcal{A}$ borel → A borel. měř.)

DEF: (prostor s mírou)
Buď $(\Omega, \mathcal{A})$ měř. prostor a nechť $\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ je σ-aditivní. Potom μ nazýváme mírou na $(\Omega, \mathcal{A})$ a uspořádanou dvojici $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nazýváme prostor s mírou μ.

DEF (měřitelná fce): Buď $(\Omega, \mathcal{A})$ měř. prostor a nechť $f: (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$. Říkáme, že f je $\mathcal{A}$-měřitelná $\Leftrightarrow (\forall B \in \mathcal{B}_n)(f^{-1}(B) \in \mathcal{A})$
(pokud vzory borel. měřit. množin jsou měřitelné.)

(Sdružená distr. fce): $X = (X_1 \dots X_n)$ něk. n.v. na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $P^X = P \circ X^{-1}$ rozdělení n.v. X. Potom def. sdruženou (více rozměr.) distr. fci veličiny X.

$$F_X(x) = P^X /_{\mathcal{C}_n = \{ \mathsf{X}_1^n (-\infty, x_i] \,/\, x_i \in \mathbb{R} \}} \quad \text{pro } \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$= P\left(X^{-1}\left(\mathsf{X}_1^n (-\infty, x_i]\right)\right) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \dots X_n \leq x_n) = P(X \leq x)$$

(Více rozměrná distr. rozd.)
Def: $f_X = P\left(\bigcap_{j=1}^{n} \{X_j = x_j\}\right)$

III. (Transformace náh. vel. (t, F, χ^2)

+DISKRÉTNÍ

Absolutní rozdělení transformované veličiny

Nechť $X \sim P^X$ ASR$_1$ s f_X. Ozn $(B_i)_1^k \subset \mathbb{R}^n$ množiny disjunktní a otevřené ($\Rightarrow$ měřitelné), $G = \sum_1^k B_i$ (resp. $\bigcup_1^k B_i$). Nechť $P^X(G) = 1$ ($\int_G f_X = 1$).

Nechť $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ reg + prostá na B_i $\forall i \in \hat{k}$. Pak $Y = g(X)$ má ASR a $f_Y(y)$ má tvar

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} f_X(g_i^{-1}(y)) \cdot |J_{g^{-1}}(y)| & \forall y \in g(G) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

g_i^{-1} inverze g na B_i $\forall i$

Pro $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $Y_1 \overset{\text{ozn}}{=} g(X_1, \dots X_n)$ Předpokládejme, že lze jednoznačně a ekvivalentně z g vyjádřit X_i, BÚNO X_1, tzn. $\exists h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, + předpokl. $\frac{\partial h}{\partial y} \neq 0$ a spoj. difer.

$X_1 = h(Y, X_2, \dots X_n)$, dodefinujeme $Y_2 = X_2, \dots, Y_n = X_n$.

Toto jako zobrazení $\tilde{g}$ je na B_i reg. & prosté (na otevřené oblasti G)

$$J_{\tilde{g}^{-1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right| \neq 0$$

$$f_{Y_1, X_2, \dots, X_n}(y, x_2, \dots x_n) = f_{X_1 \dots X_n}(\tilde{g}^{-1}(y, x_2, \dots x_n)) \cdot \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right|$$

zintegrovat $\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \dots dx_n$

Užití: Součtové chyby $(l_1 + X) \cdot (l_2 + Y) = l_1 l_2 + l_1 Y + l_2 X + XY$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ borelovská, X ASR$_1$ f_X, $Y = g(X)$. Pak

$$f_Y(y) = \frac{\partial^n}{\partial y_1 \dots \partial y_n} \int_{B_y} f_X(x) dx$$

$B_y = \{x : g(x) \leq y\}$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ + distr. fce

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$

Exponenciální třída: X n.v. na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, P^X ASR$_\lambda$. Říkáme, že f_X je z exponenciální třídy, pokud $f_X(x) = h(x)\,C(\theta)\exp\{Q(\theta)T(x)\}$, $\theta \in \Theta \subset R^k$

Normální rozdělení: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad (\theta = (\mu, \sigma^2))$ pokud $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$

$X \sim N(0,1)$ stand. rozdělení $\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\quad \Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

Vlastnosti norm. rozdělení: $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ $\;\cdot\; F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi_X\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$\varphi_X(x) = \varphi_X(-x)$ $\;\cdot\; P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-t^2/2}\,dt.$

$k\sigma$ pravidlo $P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = \Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k) - 1$

- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ plyne z reg. transf. $J = \frac{1}{a}$
- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N\left(\frac{1}{\sigma}\mu - \frac{\mu}{\sigma} = 0, 1\right)$
- Reprodukční vlastnosti N

$(X_j)_1^N$ id $\quad N(\mu_j, \sigma_j^2) \Rightarrow \sum_1 X_j \sim N\left(\sum \mu_j, \sum_1^n \sigma_j^2\right)$

Další příklady rozdělení:

$Y = e^X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ $\quad X \sim N(0,1)$

$Z = \frac{X}{Y}$ $\quad X, Y \sim N(0,1)$ iid $\quad Z \sim$ Cauchy

$(X_j)_1^n$ iid $N(0,1)$ $\quad Y = \sum_1 X_i^2 \sim \chi^2(n)$ Pearson χ-kvadrát

$f_{\chi^2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} \\ 0 \end{cases}$

- při ↑ $\quad T \overset{\text{id}}{=} \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2(n)/n}}$ $\quad t(n)$ Student $\quad Y \sim \chi^2(n)$
- při $\quad U = \frac{\chi^2(m)/m}{\chi^2(n)/n}$ $\quad F(m,n)$ Fischer $\quad \frac{X/m}{Y/n}$ $\quad X \sim \chi^2(m)$, $Y \sim \chi^2/n$

Ⓥ Buď $g \in C^{(1)}$, $g' \neq 0$ po částech ryze monotonní a nechť $Y = g(X)$. Pokud $g^{-1}(y) \neq \emptyset \Rightarrow \forall s \in g^{-1}(y)$ $\displaystyle f_Y(y) = \sum_{s \in g^{-1}(y)} \frac{f_X(s)}{|g'(s)|}$

Pearson χ^2:

Nechť $X_1, \dots, X_n$ iid $N(0,1)$. Pak $\displaystyle X^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 \sim \chi^2$ s n stupni volnosti ($\chi^2(n)$) s hustotou:

$$f_{\chi^2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Student:

Buďte X, Y takové, že $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$ $\Rightarrow T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ má student. rozdělení $t(n)$ s hustotou: $f_T(t) = \frac{1}{B(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})} n^{\frac{n}{2}} (n + t^2)^{-\frac{n+1}{2}}$ $t \in \mathbb{R}$

Fischer:

Buďte X, Y nezávislé náh. vel. $X \sim \chi^2(m)$, $Y \sim \chi^2(n)$

pak $\frac{X/m}{Y/n}$ má Fisch. rozd. $F(m,n)$

$$f_{F}(u) = \frac{1}{B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} u^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n} u\right)^{-\frac{m+n}{2}} \quad u > 0$$

Cauchy $X, Y \sim N(0,1)$ iid

$Z = \frac{X}{Y} \sim$ Cauchy

LN $X \sim N(0,1)$ $Y = e^X \sim LN(\mu, \sigma^2)$

Ⓥ $X_1 \dots X_n$ iid $Exp(\theta) \Rightarrow X_1 + \dots + X_n \sim Gamma(n, \theta)$

$X_j \sim Gam(\alpha_j, \beta)$ $\sum X_j \sim Gamma(\sum \alpha_j, \beta)$

$Exp(\theta, \mu)$ $f_X(x) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x-\mu}{\theta}\right)$

Mějme X, Y na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; $(X,Y) \sim P^{(X,Y)}$ ASR$_2$.

tzn. $f_{X,Y}(x,y)$. Víme, že Y je ASR a $f_Y(y)$. Volme y, že $f_Y(y) \neq 0$.

Def: $$f_{X|Y}(x|y) = f_{X|Y=y}(x,y) := \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$F_{X|Y}(x) = P(X \le x \mid \{Y=y\}=B) = \frac{P(X \le x, Y=y)}{P(Y=y)}$$

$$F_{X|Y=y}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} P(X \le x, y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon)$$

V X, Y mají SASR, $y_0 \in R_Y$. 1) $f_{X,Y}(x,y)$ spojitá v y_0 pro skoro všechna x
2) $f_Y(y)$ spojitá v y_0 a přitom $f_Y(y_0) > 0$

potom $\exists f_{X|Y}(x, y_0) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y_0)}{f_Y(y_0)}$ pro s.v. x.

DEF: (transf. n.v.): X náh. vel. a h je reálná fce taková, že $Dom(h) \supset Ran(X)$, pak je n.v. Y def: $X = x \Rightarrow Y = h(x)$ - transf. n.v.

V diskr.: X diskrétní rozdělení s pravděp. p, $p(x) = P(X=x)$, potom má transf. n.v. $Y = h(X)$ také diskr. rozdělení a pro její distr. fci platí

$$\underset{p^*(y)}{F^*(y)} = \sum_{x \in h^{-1}(y)} p(x) \qquad y \in \mathbb{R}$$

y	3	0	-1	3	c
X	-2	-1			
F(x)					

y	-1	0	3
y	0,5	0,5	0

(→ sečtu pro stejné hod.

V spoj: X, Y dvě spoj. náh. vel., Y vznikla transf ~~h~~ z X. ($Y = h(X)$). Ω_X obor h X
Je-li h prostá na Ran(X) a má-li uvnitř spojitou první derivaci, potom pro hustotu q náh. vel. Y platí:

$$q(y) = \begin{cases} f(h^{-1}(y)) \left| \dfrac{d h^{-1}(y)}{dy} \right| & y \in \Omega_Y \Rightarrow y \in Ran(Y) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ borel. měř. X má SASR. Potom $Y = g(X)$ také SASR a platí

$$f_Y(y) = \frac{\partial^m}{\partial y_1 \dots \partial y_m} \int_{B_y} f_X(x)\,dx.$$

$B_y = \{x : g(x) \le y\}$

za předpokladu, že derivace $\exists$ s.v. vzhledem k λ.

if $m = n$: + g regulární a prosté zobr. na otevřené mn. G $\left(\int_G f_X = 1\right)$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\,|J_{g^{-1}}(y)| & y \in g(G) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$g: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $g \in C^{(1)}$, $g'(x) \neq 0$, $g \in$ ryze monotonní

tak $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$

$\tilde{g}$: $Y_1 = g(X_1 \dots X_n)$ (tzn. $y_1 = g(x_1 \dots x_n)$) s předpokladem, že lze je dnou. ekvivalentně jednu z proměnných vyjádřit x_i tzn.

$\exists h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $x_1 = h(y_1, \underbrace{x_2 \dots x_n}_{x'})$ dodef $y_2 = x_2$ ... $y_n = x_n$ $\quad \frac{\partial h}{\partial y} \neq 0$ + spoj. difer.

toto zob. $\tilde{g}$ je na B_i reg & prosté (na ot. G)

$$J_{\tilde{g}^{-1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial y_1} & \frac{\partial h}{\partial y_2} & \dots \\ & 1 & \\ & & 1 \quad 1 \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial h}{\partial y_1}\right| \neq 0$$

$$f_{Y_1}(y) = f_X(\tilde{g}^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{\partial h(y, x')}{\partial y}\right|$$

(y, x') (y, x')

$$f_{Y_{(1)}}(y_{(1)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\tilde{g}^{-1}(y, x')) \cdot \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right| dx'$$

IV. (Charakteristiky, střední hodnota, korelace, kovariance)

1) neintegrální:

Modalita: Nechť X ASR$_1$ s f_X a $\operatorname{supp} f_X = \{x \mid f_X(x) > 0\}$.

Ozn: $x_{mod} \in \operatorname{argmax}_x f_X(x)$. Podle počtu můžeme def. unimodální, bimodální.

Typ chvostů: exponenciální e^{-x}, e^{-x^2}, polynomiální $\frac{1}{x^2}$ ... ASR 1

Symetrie rozdělení: Nechť X je náh. vel. s distr. fcí F_X. Řekneme, že X má symetrické rozdělení okolo 0, pokud $X \sim F_X \Leftrightarrow -X \sim F_X$. X má sym. okolo a iff $X-a$ sym. kolem 0

α-kvantil: Nechť $X \sim F_X$ a $\alpha \in (0,1)$, pak $x_\alpha = \inf\{x \mid F_X(x) \geq \alpha\}$ je α-kvantil $\quad x_\alpha = -x_{1-\alpha}$

medián: $x_{med} = x_{1/2}$ $\quad$ kvartil spodní $x_{1/4}$ $\quad$ horní $x_{3/4}$ $\quad$ interkvartilové rozmezí: $x_{3/4} - x_{1/4}$

Kvantilová fce: Nechť $X \sim F_X$, pak $F_X^{\leftarrow}(\lambda) = \inf\{x : F_X(x) \geq \lambda\}$ $\forall \lambda \in (0,1)$

symetrie + ostrá monotonie: $x_\alpha = 2a - x_{1-\alpha}$

2) integrální:

Zavedení integrálu: Def. jednoduchou fci $\varphi(\omega) = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbb{I}_{A_j}(\omega)$ $\quad \omega \in \Omega$ $\quad \varphi: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad (a_j)_1^m \in \mathbb{R}$, $A_j \in \mathcal{A}$ měř. na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Definujeme $\int_\Omega \varphi \, dP = \sum_{j=1}^{m} a_j P(A_j)$. pro $X \geq 0$ n.v. $\mathcal{A}$ měř.

$\exists \varphi_n \nearrow X$ že $\int_\Omega X \, dP = \int X^+ dP - \int X^- dP$, pokud alespoň jeden z integrálů PS je konečný.

$\int_\Omega X \, dP = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n \, dP$. Pro X lib. n.v. $\quad$ Zároveň $X = X^+ - X^-$

Střední hodnota: Nechť X je n.v. na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ def. stř. h. $EX = \int_\Omega X \, dP$ (včetně ±∞)

$EX = \int X(\omega) \, dP(\omega) = \int X \, dP(\omega) = \int X P(d\omega)$.

$\mathcal{L}_1$: $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P) = \{X \text{ n.v. na } (\Omega, \mathcal{A}, P) \mid |EX| < \infty\}$ prostor integr. náh. vel. vzhl. P.

Důsledek: $A \in \mathcal{A}$ $\quad \int_A X \, dP = \int_\Omega X \, I_A \, dP$, $\int_A 1 \, dP = \int_\Omega 1 \, I_A \, dP = P(A)$

St. h. X: $EX \overset{def}{=} (EX_1, \ldots, EX_m)$

E je lin. funkc.: Nechť je dán VP $\mathcal{L}_1 \Rightarrow E$ je lin. fc. na $\mathcal{L}_1$ $\quad E\left(\sum_1^m \alpha_i X_i\right) = \sum_1^m \alpha_i E(X_i)$

VLASTNOSTI: 1) $E(\alpha X + \beta) = \alpha EX + \beta$ $\quad$ 2. $E(\sum X_i) = \sum_{i=1}^{m} E(X_i)$ $\quad EX_i < \infty$ $\forall i \in \hat{m}$

3. $X \leq Y$ a.s $\Rightarrow EX \leq EY$ (pokud Exist. $\quad$ 4) $X \geq 0$ a.s. $EX = 0 \Rightarrow X = 0$ a.s.

5. $0 \leq X_n \nearrow X$ a.s $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} EX_n = E(\lim_{n\to\infty} X_n)$

E z transformace

V (Záměna proměnných) Buď $\mathbb{X} = (X_1 .. X_n)$ n.v. na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bor. měř fce.
Potom $\int_\Omega g \circ \mathbb{X} \, dP = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \, d(\underbrace{P \circ \mathbb{X}^{-1}}_{P^X})$ za před. ex alespoň jednoho.

• Buďte $X_1 .. X_n$ iid (nezávislé náhodné veličiny) na $(\Omega, \mathcal{A})$ t.ž. $EX_j < \infty \ \forall j \in \hat{n}$
$\Rightarrow E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} (EX_i)$

(MOMENTY) Buď X n.v., $k \in \mathbb{N}$. Pokud odpovídající střední hodnota $\exists$, pak k-tý obecný moment X def. jako: $\mu_k(X) = E(X^k)$ a k-tý centrální moment X def: $\mu_k(X) = E\left[(X - EX)^k\right]$

$k = 2$: rozptyl $DX = \mu_2(X)$, směrodatná odchylka $\sigma(X) = \sqrt{DX}$

(VLAST. DX): 1. $D(\alpha X + \beta) = \alpha^2 DX$. 2. $D(X) = E(X^2) - (EX)^2$ 3. $E(X^2) \geq (EX)^2$
4. $D\left(\sum^{m} X_j\right) = \sum^{m} DX_j$ if X_j nezávislé 5. $EX^2 < \infty \Rightarrow EX < \infty$ a $DX < \infty$

(Standardizovaná náh. vel): Buď X n.v., pro kterou $EX < \infty$, $DX < \infty$.
Potom def. stand. náh. vel U (n.v. $EU = 0$, $DU = 1$) $U = \dfrac{X - EX}{\sqrt{DX}}$

(Šikmost, špičatost) X n.v. a U standard. n.v.
šikmost $\mu_3(U) = \dfrac{\mu_3(X)}{[\sigma(X)]^3}$ špičatost $\mu_4(U) = \dfrac{\mu_4(X)}{[\sigma(X)]^4}$

(ABSOLUT. KONV. LEB INT): $X \in \mathcal{L}_1 \Leftrightarrow |X| \in \mathcal{L}_1$. důsledek pro MIP (konečné míry)
$\forall$ omezená n.v. $X \in \mathcal{L}_1$.

V X, Y na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ z $\mathcal{L}_1$. $P(X = Y) = 1 \Rightarrow EX = EY$
$P(X \neq Y) = 0$
$X = Y$ n $\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\}$ nemusí být na $\mathcal{A}$, musíme zúplnit $\mathcal{A}$.

(Střední hodnota): EX ... střední hodnota X

X je n.v do $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$. Pak def. $EX = (EX_1 \dots X_n)$

$EX = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega) = \int X dP(\omega)$ náh. veličina X

def.

$\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P) = \{X \text{ n.v. } (\Omega, \mathcal{A}, P) : |EX| < +\infty\}$ prostor integrovatelných n.v.

$\exists$ pokud $\int_\Omega X^+ dP < +\infty$ $\vee \int_\Omega X^- dP < +\infty$

důsledek: $A \in \mathcal{A}$ $\int_A X dP = \int_\Omega X \cdot \mathbb{I}_A dP$ $\int_A 1 dP = P(A)$

E je lin. funkcionál na $\mathcal{L}_1$

Pak: $(X_i)_1^n$ n.v na $\mathcal{L}_1$. $E(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i EX_i$

$(\alpha_i)_1^n \in \mathbb{R}$

VLAST: $E(\alpha X + \beta) = \alpha EX + \beta$

(Beppo-Levi) $E(\sum X_i) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$ pro $E(X_i) < +\infty$

$(X_i)_1^\infty$ n.v na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $\sum \underbrace{E|X_n|}_{\|X\|_1} < \infty$ Pak $\sum X_n < \infty$ s.j. $\sum X_n \in \mathcal{L}_1$ a $E(\sum) = \sum E$

$X \leq Y$ s.j $\Rightarrow EX \leq EY$ (if $\exists$)

$X \geq 0$ s.j a $EX = 0 \Rightarrow X = 0$ s.j.

M.C.T: $0 \leq X_n \nearrow X$ s.j $\Rightarrow \lim E(X_n) = E(\lim X_n) =$

FUB: $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$; $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ není σ-alg na Ω

$\Rightarrow \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$. Nyní def. $P = P_1 \otimes P_2$, pro kterou platí

$P_1 \otimes P_2 (A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2)$ $\forall A_1 \in \mathcal{A}_1, \forall A_2 \in \mathcal{A}_2$

(dle věty o jednozn. rozšíření míry $\mathbb{P}$, souč. míra na $(\Omega, \mathcal{A})$) je P

Buď $X: \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ borel., že $\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X dP_1 \otimes dP_2$ $\exists$. Pak $E^{P_1 \otimes P_2}(X) = E^{P_1}(E^{P_2}(X))$

ZÁMĚNA: $X = (X_1 \dots X_n)$ n.v na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ borel. měř. fce. Potom $\int_\Omega g \circ X dP = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) d(\underbrace{P \circ X^{-1}}_{P^X})$ pokud ∃ alespoň 1 ∫

$\cdot X_1 \dots X_n$ id (nezávislé) n.v $(\Omega, \mathcal{A})$ $EX_j < \infty$ $\forall j \in \hat{n}$

$E(\prod X_i) = \prod E(X_i)$

LDCT: $(X_n)_1^\infty$ n.v $X_n \xrightarrow{s.j} X$

$|X_n| \leq Y \in \mathcal{L}_1$

$\Rightarrow X \in \mathcal{L}_1$ $EX_n \to EX$.

$X \in \mathcal{L}_1 \Leftrightarrow |X| \in \mathcal{L}_1$ $|EX| \leq E|X|$

$X, Y \in \mathcal{L}_1$. $P(X = Y) = 1 \Rightarrow EX = EY$

momenty: X n.v., $k \in \mathbb{N}$. if E $\exists$, tak k-tý obecný moment X def jako

$$\mu'_k(X) = E(X^k)$$

centr. $\mu_k(X) = E[(X-EX)^k]$

$k=2$

$DX = \mu_2(X)$ - rozptyl

$\sigma(X) = \sqrt{DX}$ - směr. odch.

Vl. DX: $DX = E(X-EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$ $\quad E(X^2) \geq (EX)^2$

$DX(\alpha X + \beta) = \alpha^2 DX$

$EX = \sum x_k p_k$

$D(\sum X_i) = \sum DX_i$ $\quad X_i$ - nezávislé

$DX = \int_\Omega (X-EX)^2 dP = \int_{\mathbb{R}} (x-EX)^2 dP^X \overset{ASR}{=} \int_{\mathbb{R}} (x-EX)^2 f_X(x) dx$

$EX^2 < \infty \Rightarrow EX < \infty$ a $DX < \infty$

DR $\sum_k (x_k - EX)^2 p_k$

(V) $X \geq 0$. Pak $EX = \int_0^{+\infty} (1-F_X(x))dx = \int_0^{+\infty} P(X>x)dx = \int_0^{+\infty} \Big(\int_{\{\omega: X(\omega)>x\}} 1 . dP\Big) dx \overset{FV}{=} \int_\Omega \Big(\int_0^{X(\omega)} 1 dx\Big) dP = \int X dP$

$X \leq 0$ $EX = -\int_{-\infty}^0 F_X(x)dx$

Cov $X, Y \in \mathcal{L}_2$ $\quad Cov(X,Y) = E[(X-EX)(Y-EY)] = E(XY) - EXEY$

$Cov(X,X) = DX$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

$Cov \overset{id}{\underset{nezávislé}{=}} 0$; $\rho(X,Y)$ - nekorelované $\qquad$ X, Y korel $\Rightarrow$ nejsou nezávislé

$|\rho(X,Y)| \leq 1$ $\qquad \rho = 1 \Leftrightarrow \exists \beta > 0$ $Y - EY = \beta(X - EX)$

$\rho = -1 \Leftrightarrow \exists \beta < 0$

- $\mathbb{C}(X) = (Cov(X_i, X_j))_{i,j=1}^n$
- symetr. PSD, $diag(\mathbb{C}) = (DX_j)_1^n$

(Charakter. fce): Buď X n.v. Potom $\varphi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ danou předpisem

$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_\Omega e^{itX} dP = \int_{\mathbb{R}^n} e^{itX} dP^X$ nazýváme charakt. fci n.v. X

Ⓥ(Vlastnosti): 1. φ_X vždy $\exists$, 2. φ_X je omezená, spojitá a platí $\varphi_X(0) = 1$

3. Buď X, $E|X_j|^m < \infty$. Pak $\varphi_X \in C^{(m)}$ a navíc platí

$$\frac{\partial^m}{\partial t_{j_1} \dots \partial t_{j_m}} \varphi_X(t) \overset{?}{=} i^m E(X_{j_1} \dots X_{j_m} e^{itX})$$

4. $E(X_{j_1}^s \cdot X_{j_2}^r) = (-1)^{r+s} \cdot i^{r+s} \dfrac{\partial^{r+s} \varphi_X}{\partial t_{j_1}^s \dots \partial t_{j_2}^r}(\theta)$ a pokud $X \in \mathbb{R}^1 \Rightarrow$

$E(X^r) = (-1)^r i^r \varphi_X^{r}(0)$

5. Buď $Y = g(X)$, kde $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je borel. měřitelná.

Potom $\varphi_Y(t) = E(e^{itg(X)})$

6. Buď X n.v. s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$. Potom $\varphi_X(t) = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$

Ⓥ Nechť $X = X_1 \dots X_n$ jsou nezávislé n.v. Potom $\varphi_X(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t_j)$?

Ⓥ Buď X n.v. na $(\Omega, \mathcal{A})$ s pravděp. rozděl. P^X.

Potom φ_X jednoznačně určuje rozdělení P^X!

Ⓥ Nechť $X = (X_1 \dots X_n)$ jsou n.v. Potom X jsou nezávislé $\Leftrightarrow \varphi_X(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t_j)$?

Ⓥ Buď $X = X_1 \dots X_n$ nezávislé n.v. a nechť $Y = \sum_{j=1}^n X_j \Rightarrow \varphi_Y(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(Momentová vytvářející fce): Buď $X = (X_1, X_n)$ n.v. Potom $m_X(t) = E(\exp(tX))$

nazýváme moment. vyt. fce. (za předpokl. $\exists$ E)

$\varphi_X(t) = m_X(it) \Rightarrow$ vyplývá $\mu'_k = E(X^k) = m_X^{k}(0)$

Ⓥ Buď $X_1 \dots X_n$ nezávislé n.v., a nechť $X_j \sim Gamma(\alpha_j, \beta)$, $j \in \hat{n}$.

Pak $\sum_{j=1}^n X_j \sim Gamma\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j, \beta\right)$

Ⓥ Buďte $X_1 \dots X_n$ nezávislé n.v. Potom jsou nezávislé i $Y_1 = X_1 + \dots + X_r$

$Y_2 = X_{r+1} + \dots + X_n$

DEF: $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P) = \{X \text{ n.v.} : EX < \infty\}$

$\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P) = \{X \text{ n.v.} : EX^2 < \infty\}$ prostory fcí integrabilních vzhledem k míře?

Ⓥ $\mathcal{L}_1$ lin. VP a E lin. funkcionál na $\mathcal{L}_1$. $\Rightarrow X, Y \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow \alpha X + Y \in \mathcal{L}_1$

$E(\alpha X + Y) = \alpha EX + EY$

Ⓥ $X \in \mathcal{L}_1 \iff |X| \in \mathcal{L}_1$ $|EX| \leq E|X|$

Každá omezená n. v. X je integrovatelná vzhledem k P

Ⓥ Buďte X, Y náh. vel. z $\mathcal{L}_1$ a nechť $X = Y$ skoro všude vzhledem k P.
$\Rightarrow EX = EY$.

Ⓥ (Schwarz) Buďte $X, Y \in \mathcal{L}_2$. Potom $X, Y \in \mathcal{L}_1$ a platí $|E(XY)| \leq \sqrt{EX^2 EY^2}$
rovnost $\iff \exists \alpha$ $P(\alpha X + Y = 0) = 1$ v $P(X + \alpha Y = 0) = 1$

Ⓥ $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ lineár. norm. prostor s pseudoskalárním součinem $\langle X, Y \rangle = E(XY)$

Ⓥ (Riesz-Fischer). Prostor $\mathcal{L}_2$ je Hilbertův tj. úplný, lineární se skal. souč.

Důsledek: $\cdot (X_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{L}_2$ $X_n \to X \Rightarrow X \in \mathcal{L}_2$

$\cdot X_n, Y_n \in \mathcal{L}_2$ $X_n \to X, Y_n \to Y \Rightarrow \langle X_n, Y_n \rangle \to \langle X, Y \rangle$

tj. $E(X_n Y_n) = E(XY)$

$\cdot X_n \in \mathcal{L}_2; X_n \to X \Rightarrow \|X_n\| \to \|X\|$

$E(X_n X_n) \to E(X^2)$

$\cdot X \perp Y \iff E(XY) = 0$ $\cdot |\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$

Markova ≠ $X \in \mathcal{L}_1$ $\forall \varepsilon > 0$ $P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|X|}{\varepsilon}$

Jensen ≠ $X \in \mathcal{L}_1$ $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvexní na I t. ž. $P(X \in I) = 1$
Pak $\phi(EX) \leq E[\phi(X)]$ if $E\phi(X) < \infty$ a $\exists$

EXPECTATION RULE: Nechť X n. v. na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s rozdělením P^X. Nechť $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ bor. měř. transf. Pak $E[g(X)] = \int_\Omega g(X) dP = \int_{\mathbb{R}^n} g \, d(P \circ X^{-1}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dP^X \overset{\text{g=n}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dF_X$

O přenosu $\int$?

ASR1 $E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \frac{dP^X}{d\lambda} d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x) d\lambda(x)$

Za předp. $\exists$ aleś 1 strany

DR $E[g(X)] = \sum_k g(x_k) p_k$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $E[g(X)] \overset{\text{def}}{=} (Eg_1(X), \dots, Eg_m(X))$

DeⓋ $(X_j)_1^n$ nezávislé s $P^X \Rightarrow E(\prod_1^n X_i) = \prod_1^n EX_i$

Lemma: $(X_j)_1^n$ nez. $\iff P^X = \bigotimes_1^n P^{X_j}$

(charakt. fce) X náh. vel. Potom $\varphi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\varphi_X(z) = E(e^{izX}) = \int_\Omega e^{izX}\,dP = \int_{\mathbb{R}^n} e^{izx}\,dP^X.$$

Vlastnosti: 1) $\exists\ \varphi_X$ konečná $\forall z \in \mathbb{R}^n$

2) omezená $|\varphi_X| \le 1$, $\varphi_X(0) = 1$

3) φ_X spojitá

4) φ_X jednoznačně charakterizuje P^X

5) $(X_j)_1^n \in \mathcal{L}_k \Rightarrow \varphi_X \in C^{(k)}$ a platí $\dfrac{\partial^k \varphi_X(z)}{\partial z_{j1} \dots \partial z_{jk}} = i^k E(X_{j1} \dots X_{jk} e^{izX})$
$E|X|^k < +\infty$

$z = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^k \varphi_X(0)}{\partial \dots \partial} = i^k E(X_{j1} \dots X_{jk})$

6) ~~$E(X_{j1}^r X_{j2}^s) = (-1)^{r+s} i^{r+s}$~~ $\dfrac{\partial^{r+s}\varphi_{(X,Y)}(0,0)}{\partial z_1^r \partial z_2^s} = i^{r+s} E(X^r Y^s)$

$s = 0$ $\quad E(X^r) = (-1)^r i^r \dfrac{\partial^r \varphi}{\partial z^r}(0)$ $\qquad \dfrac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial z_1 \partial z_2} = -1 E(XY)$

7) $Y = g(X)$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bor. měř.: $\varphi_Y(z) = E(e^{izg(X)})$

8) X n. v. $\sim N(\mu, \sigma^2)$. Pak $\varphi_X(z) = e^{\mu i z - \frac{z^2\sigma^2}{2}}$ $\qquad EX^2 = \mu^2 + \sigma^2$
$DX = \sigma^2$

$EX = -i\varphi_X'(0)$
$EX^2 = -i\varphi_X''(0)$

(V) $X = X_1 \dots X_n$ nezávislé. Pak $\varphi_{\sum_1^n X_j}(z) = \prod_1^n \varphi_{X_j}(z)$
$(X_j)_1^n \sim P^{X_j}$

(V) $X = (X_1 \dots X_n)$ n. v. X nezávislé $\Leftrightarrow \varphi_X(z) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(z)$

Moment: $X = (X_1 \dots X_n)$. $m_X(z) = E(\exp(zX))$

$$\varphi_X(z) = m_X(iz)$$

$$\mu_k' = E(X^k) = m_X^{(k)}(0)$$

Zúplnění P:

Nulová mn.: Nechť je dáno $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $N \subset \Omega$ se nazývá nulová množina iff $\exists A \in \mathcal{A}$, t.ž. $N \subset A$, $P(A) = 0$. $\mathcal{N} = \{N \mid N \text{ nulová}\}$

Skoro jistě: Říkáme, že vlastnost V platí s.j. pokud V platí na $\Omega \setminus N$, $N \in \mathcal{N}$.

Zúplnění σ-algebry: $\bar{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$

Rozšíření P z A na $\bar{\mathcal{A}}$: P z $\mathcal{A}$ rozšiřujeme na $\bar{\mathcal{A}}$ (ozn $\bar{P}$) jako

$\bar{P}(\bar{A}) = \bar{P}(A \cup N) \overset{def}{:=} P(A)$

$(\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{P})$

$\bar{\mathcal{A}}$ je σ-algebra: $C \in \bar{\mathcal{A}}$

$C = A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$

$\bar{P}(A_1 \cup N_1) = P(A_1) \leq P(A_2 \cup B_2) \leq P(A_2)$

$P(B_2) = 0 \qquad N_2 \subset B_2$

analogicky naopak

$\bar{P}(A_2 \cup N_2) = \bar{P}(A_1 \cup N_1)$

$\bar{P}$ je pravděpodobnost $\bar{P}(\Omega) = \bar{P}(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) = 1 \qquad \bar{P} \geq 0$

$(C_n)_1^\infty \in \mathcal{A}$ $\bar{P}(\sum C_n) = \bar{P}(\sum A_n \cup N_n) = \bar{P}(\sum A_n \cup \sum N_n) = P \sum A_n =$

$= \sum P(A_n) = \sum \bar{P}(A_n \cup N_n) = \sum \bar{P}(C_n)$

$\bar{P}(N) = P(\emptyset) = 0$

$\bar{P}$ ozn P, $\bar{\mathcal{B}}$ ozn $\mathcal{B}$ $\Rightarrow$ Reformulace: $X = Y$ s.j. na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $(X \sim Y)$ pak $EX = EY$

Prostor tříd ekvivalence: $X \sim Y$, $\mathcal{L}_1 /_\sim = L_1$

Norma na L_1: $\|X\|_1 := E|X| = \int |X| \, dP$ je norma na L_1.

Banachův prostor: $(L_1, \|\cdot\|_1)$ normovaný & úplný

Pozn.:

$P = \delta_c \Rightarrow X \sim Y$ w.r.t. P

with respect to P

Monotony convergence Theorem $(X_n)_1^\infty$ n.v. $X_i \geq 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$ $X_n \nearrow X$ s.j. $P \Rightarrow EX_n \to EX$

Lebesgue dominated Conver: $(X_n)_1^\infty$ n.v. $X_n \xrightarrow{s.j.P} X$; $|X_n| \leq Y \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow X \in \mathcal{L}_1$ $EX_n \to EX$

Beppo-Levi Th: $(X_n)_1^\infty$ n.v. na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $\sum_1^\infty E|X_n| < \infty \to \sum_1^\infty X_n < \infty$ s.j. P a

$\sum_1^\infty X_n \in \mathcal{L}_1 (L_1)$; $\sum_1^\infty EX_n = E \sum_1^\infty X_n$

(Součinová míra): Nechť $(\Omega_j, \mathcal{A}_j, P_j)$ $\forall j \in \hat{n}$, $\Omega = \bigtimes_1^n \Omega_j$; $\bigtimes_1^n \mathcal{A}_j = \{\bigtimes_1^n A_j : A_j \in \mathcal{A}_j\}$
$\mathcal{A} = \bigotimes_1^n \mathcal{A}_j = \sigma(\bigtimes_1^n \mathcal{A}_j)$. Nechť P na $\mathcal{A}$ je míra splňující $P(\bigtimes_1^n A_j) = \prod_{j=1}^n P(A_j)$ $\forall A_j \in \mathcal{A}_j$
Pak P nazýváme součinovou/produktovou mírou a ozn $\bigotimes_1^n P_j$.
Je korektní, $\exists$ a je jednoznačná.

Ⓥ (Tonelli Fubini) $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$; $X : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$
Pak $E^{P_1 \otimes P_2} = E^{P_1}[E^{P_2}(X)]$ if $E^{P_1 \otimes P_2}$ $\exists$

Vzorce EX: $X \geq 0 \Rightarrow EX = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x))\,dx$ • $X \leq 0 \Rightarrow EX = \int_{-\infty}^0 F_X(x)\,dx$
$X = X^+ + (-X^-) \Rightarrow EX = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\,dx - \int_{-\infty}^0 F_X\,dx$ pokud alespoň jeden z integrálů konečný!

$\mathcal{L}_2, L_2$: $\mathcal{L}_2 = \{X$ n.v. $(\Omega, \mathcal{A}, P) \mid X^2 \in \mathcal{L}_1\}$; $X \sim Y \Leftrightarrow X = Y$ s.j. $EX = EY$ $L_2 = \mathcal{L}_2/\sim$

Skalární součin na L_2: $X, Y \in L_2$, $\langle X | Y \rangle = E(X \cdot Y)$. Jde o skal. součin a platí Schwarzova nerovnost $X, Y \in L_2 \Rightarrow X \cdot Y \in L_1$ a $|\langle X | Y \rangle| = |E(XY)| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2$. Rovnost $\Leftrightarrow \exists \alpha$ t.ž. $\alpha X + Y = \Theta$ na L_2
$\|X\|_2 = \sqrt{EX^2}$, $\|Y\|_2 = \sqrt{EY^2}$

Hilbertův prostor: L_2 lineární, normovaný, se skal. souč., jež generuje normu, úplný $\Rightarrow$ je Hilbertův. Pro omezené míry $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$

Kovariance: Pro $X, Y \in \mathcal{L}_2$ def. $Cov(X,Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] = E(XY) - EXEY$.
$Cov(X,X) = DX$

Korel. koef.: $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ pro nenulové rozptyly X, Y nz $\Rightarrow Cov(X,Y) = 0$ "nekorelované"
pro Gauss data nekorelovanost $\Rightarrow$ nezávislost $|\rho(X,Y)| \leq 1$
$\rho = 1$ $\exists \beta > 0$ t.ž. $Y - EY = \beta(X - EX)$ s.j. P $\rho = -1$ $\exists \beta < 0$

Kovar. matice: $X = (X_1, \dots, X_n)$, $(X_i)_1^n \in \mathcal{L}_2$. Def. $\mathbb{C}(X) = \Sigma(Cov(X_i, X_j))_{i,j}$
$\mathbb{C}$ je symetrická, PSD, $\operatorname{diag} \mathbb{C} = (DX_j)_1^n$

VI. (limitní věty, LVČ, CLV)

$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_n$

Slabé ZVČ:

Bernoulli: $(X_n)_1^\infty$ iid $Be(p)$ $X_n = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$. Pak $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$. ($\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$)

Slabý standardní: $(X_n)_1^\infty$ iid $\mathcal{L}_2$, $EX_n = \mu$, $DX_n = \sigma^2$. Pak $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

Čebyšev: $(X_n)_1^\infty \sim \mathcal{L}_2$ po dvou nezávislé (nebo nekorelované) a $\sup_{n\in\mathbb{N}} DX_n < \infty$. Pak $\overline{X}_n - \overline{\mu}_n \xrightarrow{P} 0$ •

$\overline{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum EX_j$

Bernsteinův: $(X_n)_1^\infty \sim \mathcal{L}_2$, $\sup DX_n < \infty$, $\lim_{|i-j|\to\infty} \rho(X_i, X_j) \to 0$. Pak $\overline{X}_n - \overline{\mu}_n \xrightarrow{P} 0$

Silné ZVČ:

Kolmogorův: $(X_n)_1^\infty$ id $\mathcal{L}_2$. $\sum_1^\infty \frac{\sigma_k^2}{k^2} < \infty$. Pak $\overline{X}_n - \overline{\mu}_n \xrightarrow{s.j.} 0$. ($\overline{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum \mu_j$)

Standardní: $(X_n)_1^\infty \sim \mathcal{L}_2$ iid $EX_n = \mu$, $DX_n = \sigma^2$; $\overline{X}_n \xrightarrow{s.j.} \mu$ (důsledek Kolmogorova)

Borel: –||– Bernoulli $\xrightarrow{s.j.}$ (důsl. Kolmogorova) $\overline{X}_n \xrightarrow{L_2} \mu$

Kolmogorův: $(X_n)_1^\infty$ iid $\mathcal{L}_1 \Rightarrow \overline{X}_n \xrightarrow{s.j.} \mu = EX_j \quad \forall j$ ($EX_j < \infty$, $EX_j = \mu \Leftrightarrow \overline{X}_n \xrightarrow{s.j.} \mu$)

Centrální limitní teorémy

asymptotická normalita: $(X_n)_1^\infty$ do $\mathbb{R}^1$ se nazývá asympt. normální, pokud $\exists \mu_n \in \mathbb{R}$ a $\sigma_n^2 > 0$ t.ž. $\frac{X_n - \mu_n}{\sqrt{\sigma_n^2}} \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim N(0,1)$ ozn. $AN(\mu_n, \sigma_n^2)$

Pozn: X_n $AN \Leftrightarrow F_{\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n^2}} \to F_{N(0,1)}$ $\forall t \in \mathbb{R}$?

obecně $\mu_n \neq EX_n$ $\sigma_n^2 \neq DX_n$ nemusí $\exists$

$X_n \sim AN(\mu, \sigma_n^2)$ $\sigma_n \to 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} \mu$

• $\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} EX_j \xrightarrow{P} 0$

$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$

Standardní CLT - Lindenberg-Lévy:

X_j iid $\mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{X}_n \sim AN(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ $\qquad \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1)$

pro $\sigma = 0$ formálně nedává smysl ale funguje $\overline{X}_n \sim \delta_\mu$

Moivre-Laplace (důsledek): $(X_j)_1^n$ iid $Be(p) \Rightarrow \overline{X}_n \sim AN(p, \frac{p(1-p)}{n})$

důsledek: pro $\sigma_n^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ je WLLN

poznámek: $Y_n \xrightarrow{P} 0 \qquad Y_n = o_p(1)$

$n^\alpha Y_n \xrightarrow{P} 0 \qquad Y_n = o_p(n^{-\alpha})$

Lindenberg-Feller CLT: $(X_n)_1^\infty$ iid $\mathcal{L}_2$, $\mu_j \overset{ozn}{=} EX_j$, $\sigma_j^2 \overset{ozn}{=} DX_j$ $\forall j$ $\forall \varepsilon > 0$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|s-\mu_j| > \varepsilon B_n} (s-\mu_j)^2 \, dP^{X_j} \to 0 \quad B_n = \sum_1^n \sigma_j^2 \quad (LP_n^\varepsilon \to 0) \, ?$$

Pak $\overline{X}_n \sim AN(\overline{\mu}_n, \frac{\overline{\sigma_n^2}}{n}) \qquad [\overline{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum \mu_j, \overline{\sigma_n}^2 = \frac{1}{n}\sum \sigma_j^2]$

Ljapunov CLT: $(X_n)_1^\infty$ iid $\mathcal{L}_2$, $\nu > 2$ a platí Lj P: $\sum_1^n |\Sigma X_j - \mu_j|^\nu = o(B_n^\nu)$.

Pak $\overline{X}_n \sim AN(\overline{\mu}_n, \frac{\overline{\sigma_n}^2}{n})$ $\quad \downarrow 2$

Polyovo lemma: X_n, X, $F_{X_n} \to F_X$ spoj $\Rightarrow F_{X_n} \overset{R}{\rightrightarrows} F_X$.

V $(X_j)_1^\infty$ iid $\mathcal{L}_2$ $\quad F_{Y_n} \overset{R}{\rightrightarrows} \Phi_{N(0,1)} \quad Y_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}$

Berry-Essen: $(X_j)_1^\infty$ iid $\mathcal{L}_4 \Rightarrow \sup_{s \in \mathbb{R}} |F_{X_n}(s) - \Phi_{N(0,1)}(s)| \le c \, \frac{E|X_1 - \mu|^3}{\sigma^3}\frac{1}{\sqrt{n}} = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$

$\frac{1}{\sqrt{n}} = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$

Pro $(X_j)_1^\infty$ do $\mathbb{R}^s$ iid $\mathcal{L}_2$ ozn $EX_j = \mu$; $Cov(X_i, X_j) = \mathbb{C}$ $\forall j$

$Y_j = \alpha(X_j - \mu)$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}^s$ pevné libovolné. $EY_j = 0 \quad DY_j = \alpha \mathbb{C} \alpha^T < \infty$

$\sqrt{n}(\overline{Y}_n - 0) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \alpha \mathbb{C} \alpha^T)$

CLT v $\mathbb{R}^s$ $(X_j)_1^\infty$ iid $\mathcal{L}_2$, μ, $\mathbb{C}$. Pak $\overline{X}_n \sim AN_s(\mu, \frac{\mathbb{C}}{n})$

tzn. $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \to N_s(0, \mathbb{C})$

KOLMOG. ZVČ: $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ iid n.v. $\mu \in \mathbb{R}$ $E|X_j| < \infty$ $EX_j = \mu \Leftrightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{s.j.} \mu$

CHINČIN: $(X_j)_{j=1}^{n}$ iid n.v. $\exists k \in \mathbb{N}$ takové, že $E(X_j^{2k}) < \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^k \xrightarrow{s.j.} E(X_1^k) = \mu'_k$$

V $(X_j)_{j=1}^{\infty}$ iid n.v., $\mu = EX_j$, $\sigma^2 = DX_j < \infty$. $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X}_n)^2 \xrightarrow{s.j.} \sigma^2$

DEF (KONV. V DIST.)

Lévyho metrika:

$\mathcal{F} = \{F : F \text{ distr.}\}$ def $\rho_{LÉVY}(F,G) = \inf\{\varepsilon : G(x-\varepsilon) - \varepsilon \le F(x) \le G(x+\varepsilon) + \varepsilon \ \forall x \in \mathbb{R}\}$

$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \Leftrightarrow \rho_{LÉVY}(F_{X_n}, F_X) \to 0$

COCHRAN:

Nechť $(X_i)_1^n$ iid $N(0,1)$ (tzn. $X \sim N_n(0, \mathbb{I})$) a $(Q_j(X))_1^k$ jsou kvadr. formy na $\mathbb{R}^n$ takové, že $\sum_1^k Q_j(X) = X^T X$ a $\sum_1^k h(Q_j) = n$.
Pak $(Q_j(X))_1^k \sim \chi^2(h(Q_j))$ a jsou id.

~~VI~~ V (KONV. (S.J., P, D))

Markov: $X\in\mathcal{L}_1 \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \quad P(|X|\ge\varepsilon)\le \frac{E|X|}{\varepsilon}$

Čebyšev: $X\in\mathcal{L}_2 \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \quad P(|X|\ge\varepsilon)\le \frac{EX^2}{\varepsilon^2}$

KOVARIANCE
KOREL. KOEF
KOVAR. MATIC

(KONVERGENCE): Buď $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, X n.v. Pak def. následující typy konv.

BODOVÁ: $X_n\to X \Leftrightarrow \forall\omega\in\Omega\ (\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega))$

"skoro jistě" $X_n\xrightarrow{s.j.}X \Leftrightarrow P(\omega: \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)=X(\omega))=1$

v $\mathcal{L}_p$, kde $\mathcal{L}_p$ je lin. norm. prostor s normou $\|X\|=(E|X|^p)^{\frac{1}{p}}$ $p\ge 1$

$X_n\xrightarrow{\mathcal{L}_p}X \Leftrightarrow \|X_n-X\|^p = E|X_n-X|^p\to 0$

podle P: $X_n\xrightarrow{P}X \Leftrightarrow \forall\varepsilon\ (\lim_{n\to\infty} P(\omega: |X_n(\omega)-X(\omega)|<\varepsilon)=1)$

alternativní def s.j. konv.:

$X_n\xrightarrow{s.j.P}X \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(P(\bigcup_{n\ge k}\{\omega: |X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon\})\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Z De Morganových zákonů $P(\bigcap_{n\ge k}\{\omega: |X_n(\omega)-X(\omega)|<\varepsilon\}\to 1$

důsledek: $X_n\xrightarrow{s.j.}X \Rightarrow P(\{\omega | X_n(\omega)-X(\omega)|\ge\varepsilon)\to 0 \quad \forall\varepsilon$

VZTAHY: s.j. $\Rightarrow$ P, $L_p \Rightarrow$ P

① altern. def. P: $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, X n.v. Potom $X_n\xrightarrow{P}X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} E\left(\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}\right)=0$

Ⓥ Buď X_n posloup. n.v. Potom platí

1. $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}_p}X \Rightarrow X_n\xrightarrow{P}X$; 2. $X_n\xrightarrow{s.j.}X \Rightarrow X_n\xrightarrow{P}X$

V) X_n posl. n.v., že $X_n\xrightarrow{P}X \Rightarrow \exists (X_{n_k})_{k\ge 1}\quad X_{n_k}\xrightarrow{s.j.}X$

) Buď $X_n\xrightarrow{P}X$; $|X_n|\le Y\in\mathcal{L}_p\ \forall n \Rightarrow |X|\in\mathcal{L}_p$ a $X_n\xrightarrow{L_p}X$

) $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ n.v. do $\mathbb{R}^s$, $g:\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}$ borel. měř. a spojitá. Pak platí

1. $X_n\xrightarrow{P}X \Rightarrow g(X_n)\xrightarrow{P}g(X)$ 2. $X_n\xrightarrow{s.j.}X \Rightarrow g(X_n)\xrightarrow{s.j.}g(X)$

$\alpha\in\mathbb{R}^s$

Pak $X_n\xrightarrow{P}X \wedge Y_n\xrightarrow{P}Y \Rightarrow \alpha X_n+Y_n\xrightarrow{P}\alpha X+Y$; $X_nY_n\xrightarrow{P}XY$; $X_n/Y_n\xrightarrow{P}X/Y$

) Buď $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ taková posl. náh. vel., že $EX_n=\mu \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty} DX_n=0 \Rightarrow$ 1. $X_n\xrightarrow{P}\mu$ 2. $X_n\xrightarrow{S}\mu$ ~~tj~~ $X_n\xrightarrow{L_2}\mu$

$X_n \xrightarrow{P} X$, $Y_n \xrightarrow{P} Y$ $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ spojitá s.j. k $P^{(X,Y)}$ $\Rightarrow g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(X,Y)$

$X_n \xrightarrow{P} X$ $\mathbb{R}^s \iff X_n^{(i)} \xrightarrow{P} X^{(i)}$ $\forall i \in \hat{N}$

Slabá konvergence (v distribuci):

$(X_n)_1^\infty$ n.v. do $\mathbb{R}^s$, X n.v. do $\mathbb{R}^s$. Říkáme, že $P^{X_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} P^X$, když pro $\forall g: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ spojité a omezené platí $\int g(x)\, dP^{X_n} \to \int g(x)\, dP^X$. Lze X_n na $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ $P^{X_n} = P_n \circ X_n^{-1}$, X na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $P^X = P \circ X^{-1}$ $(Eg(X_n) \xrightarrow{\text{VPI}} Eg(X))$

• místo spojitosti a omezenosti $g: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ lze brát omezené Lipschitzovské (g je Lipsch. s konstantou L, když $|g(x) - g(y)| \le L\|x-y\|$)

$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$

Vztah: • $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow P^{X_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} P^X$ $\left(X_n \xrightarrow[\mathcal{L}_n]{\text{s.j.}} X \to P^{X_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} P^X\right)$

• $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \overset{\text{s.j.}}{=} C \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} C$ na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$P^{X_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \delta_C$

• $(X_n)_1^\infty$, X do $\mathbb{R}_1$. $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \iff F_{X_n} \to F_X$ na množině bodů spoj. F_X.

Neplyne $P^{X_n} \to P^X$ ale $\forall B \in \mathcal{B}$ $P^{X_n}(B) \to P^X(B)$

Skorochodův repr. teorem

$(X_n)_1^\infty$ a X na stejném $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ do $\mathbb{R}^s$. $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \Rightarrow \exists (\Omega', \mathcal{A}', P'), \exists (Y_n)_1^\infty$ Y na $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ do $\mathbb{R}^s$ tak, že $P^{Y_n} = P^{X_n}$ a $P^Y = P^X$ a $Y_n \xrightarrow[P']{\text{s.j.}} Y$

$\rho_{\text{Lévy}}$ $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \iff \rho_{\text{Lévy}}(F_{X_n}, F_X) \to 0$

Záměna $\int$ a limity majoranta, ale ne skj. konv.

$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$; $|X_n| \overset{\text{s.j.}}{\le} C$ $(\le H \in \mathcal{L}_1)$. Pak $EX_n \to EX$.

Důsledek: $(X_n)_1^\infty$ X do $\mathbb{R}^s$, $g: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ borel. & spoj. s.j. P^X

$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} g(X)$.

ale $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$; $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y \not\Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + Y$ $(-, /, *)$

Slutského per. teorém:
$(X_n)_1^\infty, X;\ X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X,\ (Y_n)_1^\infty$ tak, že $|Y_n - X_n| \xrightarrow[\mathcal{D}]{P} 0$. Pak $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$

Důsledek: $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X,\ Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} C \Rightarrow (X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, C)$

Slutského lemma: $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X;\ Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} C \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + C$

Lévyho cont. th: $(X_n)_1^\infty, X$ do R^1: $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \Leftrightarrow \varphi_{X_n} \to \varphi_X$

Sluts

Slutsky: $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ a $Y_n \xrightarrow{P} C$

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + C$
2. $X_n Y_n \to X_n \cdot C$
3. $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{X}{C}$ pro $c \neq 0$

VII. (stat. odh.; vlastnosti; kritéria optimality)

Statist. bod. odhady

Parametr θ spojený s populací Ω a) jako vlastnost P^X $EX=\theta$

b) parametr $\{P_\theta^X\}$

Odhad param. fce: Libovolná měřitelná fce $T_n(X): \Omega \to \mathbb{R}^s$ se nazývá odhadem param. fce $\tau(\theta): \Theta \to \mathbb{R}^s$, $\Theta \subset \mathbb{R}^k$. Pokud $\tau(\theta)=\theta$; $T_n(X) \overset{ozn}{:=} \hat{\theta}_n(X)$

Nestranný odhad; as. nestranný: $T_n(X)$ se nazývá nestranný, pokud $ET_n(X)=\tau(\theta)$ $\forall\theta$ $\forall n$. $T_n(X)$ se nazývá as. nestranným, pokud $ET_n(X)\to\tau(\theta)$ $\forall\theta$.

Vydatný odhad: $T_n(X)$ se nazývá vydatný odhad $\tau(\theta)$ if $s\geq 1$ $E(\|T_n(X)-\tau(\theta)\|_E^2) \leq E(\|\tilde{T}_n(X)-\tau(\theta)\|_E^2)$ $\forall \tilde{T}_n$ $\forall\theta\in\Theta$

As. normalita: $T_n(X)$ se nazývá as. normální odhad $\tau(\theta)$ s as. kovmaticí řádu $(s\times s)$ $C(\theta)$, pokud $T_n(X)\sim AN_s\left(\tau(\theta), \frac{C(\theta)}{n}\right)$ tedy $\sqrt{n}(T_n(X)-\tau(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_s(0, C(\theta))$; $s=1$ $C(\theta)=\sigma^2(\theta)$ as. rozptyl

Z as. norm neplyne nestrannost ani as. nestr. T_n ($\lim ET_n$ nemusí $\exists x$) ani $D(\sqrt{n}T_n) \to \sigma^2(\theta)$ ale ze Slutského lemma $(X_n)_1^\infty$ iid $AN(\mu, \sigma_n^2)$ $\sigma_n^2\to 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} \mu$ plyne slabá konzistence.

Konzistence odhadu: $T_n(X)$ se nazývá silným / slabým konzist. odhadem, pokud $T_n(X) \xrightarrow[P]{s.j.} \tau(\theta)$. Řád konzist. $n^{-\alpha}$, pokud $n^\alpha(T_n-\tau)\xrightarrow[P]{s.j.} 0$

Relativní eficience: Pro dva odhady $T_n^{(1)}, T_n^{(2)}$ par. fce $\tau(\theta)$ definujeme rel. ef. jako $RE_{21}=e_{21}=\frac{DT_n^{(1)}}{DT_n^{(2)}}$ jsou-li $T_n^{(1),(2)}$ AN, tak def. $ARE_{21}=\frac{\sigma_1^2(\theta)}{\sigma_2^2(\theta)}$

Empir. dist. fce: Nechť je dán ss. model se vzorky $(X_j)_1^\infty$ iid F. Def. empirickou dist. fci jako $F_n(u,X)(\omega)=\frac{1}{n}\sum_1^n I_{(-\infty,u)}(X_j)(\omega)$ $\forall u\in\mathbb{R}$ (charakter. fce)

Nechť je dána distr. fce a k ní sestrojena emp. fce. Pak $F_n(u)$ je nestranný, konzist, as. normální odhad $F(u)=\theta$ $\forall u\in\mathbb{R}$

Statistický funkcionál: Mějme $\theta = \theta(F)$, $F \in \mathcal{F}$. Pak $\hat{\theta}_n(\mathbb{X}) = \theta(F_n)$ se nazývá stat. funkcionál.

Výběrový α-kvantil: $\hat{x}_\alpha = \inf\{x : F_n(x) \geq \alpha\} = X_{([n\alpha]+1)} = \hat{\theta}(F_n)$
$(\theta(F) = x_\alpha = \inf\{x : F(x) \geq \alpha\})$

O vlastnostech výb. α-kvantilu: Nechť $X \sim F$, $\mathbb{X}$ iid F, $\theta = x_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Nechť $\exists$ jednoznačné řešení $F(x) = \alpha$ a označíme ho x_α a nechť $\exists F'(x_\alpha) >$
Pak $\hat{x}_\alpha \sim AN\left(x_\alpha, \frac{\alpha(1-\alpha)}{n[F'(x_\alpha)]^2}\right)$.

· nestranné
· momentová
· max věrohodn

Eficience: $T_n(\mathbb{X})$ nestranný odhad $\tau(\theta)$. Freq. Eficience $T(\mathbb{X})$ je def jako $E_n = \frac{RCLB\,\tau(\theta)}{D(T(\mathbb{X}))}$. $E_n = 1 \Rightarrow T_n$ je eficientní. $E_n \to 1$, T_n asymp. efic.

co mám k dispozici
náhodný výběr → závisí na θ → chci odhadnout

VIII. (nejlepší nestranný odh., maximální věrohodnost)

Uniformly minimum risk: Nechť je dáno $\Omega, X, F_X, \theta \in \Theta \subset R^k$, $\tau(\theta) \in R^1$, $\mathbb{X}$ iid F, $T(\mathbb{X})$ odhad $\tau(\theta)$. Definujeme $T_{UMR}(\mathbb{X}) = \operatorname{argmin} \boxed{E\underbrace{(T(\mathbb{X}) - \tau(\theta))^2}_{\text{Loss f.}}}$ (Risk f.)

Suficientní statistika: $S(\mathbb{X})$ je postačující stat. pro θ, pokud $\boxed{P(X \in B \mid S(\mathbb{X}) = s)}$ už nezávisí na θ.

Rao-Blackwell: Nechť je dáno $\Omega, X, F_X, \theta \in \Theta \subset R^k$, $\mathbb{X}$ iid, $S(\mathbb{X})$ PS pro θ a $L(T, \theta)$ konvexní fce v T pro libovolné $\theta \in \Theta$. Definujeme $\boxed{T_{RB}(\mathbb{X}) = E[T(\mathbb{X}) \mid S(\mathbb{X}) = s]}$ za předp. $\exists$. Pak $\boxed{R(T_{RB}, \theta) \leq R(T, \theta)}$ $\forall \theta$

Leman-Scheffé: Nechť je dáno $\Omega, X, F_X, \theta \in \Theta \subset R^k$, $\mathbb{X}$ iid, $S(\mathbb{X})$ PS pro θ a úplná, $L(T, \theta)$ konvexní a $T(\mathbb{X})$ nestranný odhad $\tau(\theta)$.
Pak $T_{RB} = T_{UMR} \underset{L_2}{\equiv} T_{UMVUE}$ MIN. NEST. ODHAD

systém hustot $\mathcal{F} = \{f(x, \theta)\}$ se nazývá úplný, pokud $\forall h$, $h: R^1 \to R^1$
$E\, h(\mathbb{X}) = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow h(\mathbb{X}) = 0$ s.j. $\forall \theta$.

Regulární a plus reg. sys. hustot.
Nechť $\mathcal{F} = \{f(x, \theta) \mid \theta \in \Theta \subset R^k\}$, $l(\theta) =: \ln f(x, \theta)$, $\nabla l(\theta) = (l_1(\theta), \dots, l_k(\theta))$
$l_i(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln f(x, \theta)$. Systém hustot nazveme regul. ($\mathcal{F}_{reg}$) if:
- supp f nezávisí na θ, + Θ je otevřená množina
- $\exists\, \nabla l(\theta)$ • $E(\nabla l(\theta)) = \vec{0}$ • $Cov(\nabla l(\theta)) \overset{\text{ozn}}{:=} I(\theta)$ je konečná, PD matice $k \times k$

$+ \quad E\left(f''_{ij}(X_i, \theta) \mid \overset{2}{f}(x, \theta)\right) = \vec{0} \quad \forall \theta$

$\hookrightarrow I_{ij}(\theta) = Cov(l_i, l_j) = E(l_i l_j) - E l_i E l_j = E(l_i l_j) = E\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln f}{\partial \theta_j}\right) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)$

Fisch. info mat.: $\mathbb{X}$ id $f_{X_i}(x_i, \theta) \sim X_i$. Pak $I_{\mathbb{X}}(\theta) = \sum_1^n I_{X_i}(\theta)$ iid $= n I_X(\theta)$

Rao-Cramer: Ω, $T(X)$ nestranný odhad $\tau(\theta)$, Freg. Nechť $\exists \nabla\tau(\theta)$ a $E(T(X))$ lze derivovat pod znakem E $\forall i \in \hat{k}$. Pak

$$\boxed{D(T(X)) \geq \nabla\tau(\theta)\, \mathbb{I}_X^{-1}\, \nabla\tau(\theta)^T} \quad \forall\theta \qquad \text{RCLB}$$

$k=1$ $D(T(X)) \geq [\tau'(\theta)]^2 / I_X(\theta)$

Battacharyova ≠:

Nechť $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$, $\tau(\theta)$ $\exists \tilde{\tau}' = (\tau', \tau'', \ldots \tau^{(m)})$. Potom platí

$$\boxed{D(T(X)) \geq \tilde{\tau}'(\theta)\, \tilde{\mathbb{I}}_X^{-1}(\theta)\, \tilde{\tau}'(\theta)} \quad \text{kde } \tilde{\mathbb{I}}_X = Cov\left(\frac{\partial^i f}{\partial\theta^i} \Big/ f\right)_{i=1}^m$$

Momentové odhady: Ω, $\theta \subset \Theta \subset \mathbb{R}^k$, τ, $X \sim f_X$, X iid $f_X(x,\theta)$, $(X_j)_1^n$ iid $\mathcal{L}_k$

ozn: $\mu_r = \mu_r(\theta) = EX^r$ $r \in \hat{k}$, $\mu(\theta) = (\mu_1, \ldots \mu_q) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$.

Nechť $\exists \mu^{-1}$ pak def. momentový odhad $\hat{\theta}_M = \hat{\theta}_M(X) = \mu^{-1}(m_1(X), \ldots, m_q(X))$ kde $m_r(X) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^r$. Def. odhad pomocí metody momentů

$\boxed{T_M(X) = \tau(\hat{\theta}_M(X))}$. Je invariantní na transf. $\hat{\theta}_M$ je řešení MEq $\mu_r(\theta) = m_r(X)$ $\forall r \in \hat{k}$. Lze užít i centrální momenty $\mu_r(\theta) = E(X-EX)^r$ $m_r(X) = \frac{1}{n}\sum_1^n (X_j - \bar{X}_n)^r$.

Nechť $\hat{\theta}_M$ je odhad momentu $(X_j)_1^\infty \in \mathcal{L}_{2k}$ μ_j difeomorfismus. Pak $\forall\theta \in \Theta$ je $\hat{\theta}_M \sim AN(\theta; \frac{1}{n} C_M(\theta))$. Je-li navíc...

Nestranný odhad, jehož rozptyl je nejmenší mezi nestrannými odhady příslušného parametru, se nazývá nejlepší nestranný (ebnc) odhad

nestraný → minimální rozptyl

Metoda maxim. věrohodnosti: neni robustní

Nechť $\mathcal{F}=\{f_X(x,\theta):\ \theta\in\Theta\subset\mathbb{R}^k\}$. Ozn $L(\theta)=f_X(X,\theta)$, $\ell(\theta)=\ln L(\theta)$.

Def. $\boxed{\hat\theta_{ML}=\underset{\theta\subset\Theta}{\operatorname{argsup}}\, L(\theta)}$, je-li $\hat\theta_{ML}$ bor. měř. n. v. daná jednoznačně a závislá na X.

$T_{ML}(X)=\tau(\hat\theta_{ML})$ odhad $\tau(\theta)$. invariantní

$\log\left(\frac{L(\theta)}{L(\theta_0)}\right)$

$(X_j)_1^\infty$ iid z $f(x,\theta_0)$, supp f nezávisí na θ, $\log\left(\frac{f(x,\theta)}{f(x,\theta_0)}\right)\in\mathcal{L}_1$

Pak $P_{\theta_0}(L(\theta_0)>L(\theta))\xrightarrow[n\to\infty]{}1\quad\forall\theta\neq\theta_0$

ML regul. systém hustot: $\mathcal{F}_{ML}^{reg}=\{f(x,\theta)\mid\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}^k\}$ tak, že

- Θ je otevřená množina, supp f nezávisí na θ
- $f(x,\theta)\in C^{(3)}$ vzhledem k θ pro $\forall x$
- $\int\frac{\partial f}{\partial\theta_r}dx=0$ & $\int\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_r\partial\theta_k}dx=0$
- $I_X(\theta)$ je PD konečná
- $\forall\theta_0\ \exists H_{\theta_0}\ \exists M(x)\in\mathcal{L}_1\quad\forall\theta\in H_{\theta_0}\ \|\partial^3\log f\|\le M(x)$

Nechť $\hat\theta_n\sim AN(\theta_0,\frac{1}{n}C(\theta_0))$ a $C(\theta)=I_X^{-1}(\theta)\Rightarrow\hat\theta_n$ je as. efic.

asymptotika řešení LEq

Nechť je dáno $\mathcal{F}_{reg}^{ML}$, $(X_j)_1^\infty$ iid z $f(x,\theta_0)$. Pak pro každé konzistentní řešení $(\hat\theta_n)_1^\infty$ parametru θ_0 LEq ($\nabla\ell(\theta)=0$) platí

$\hat\theta_n\sim AN_k(\theta_0,\frac{1}{n}I_X^{-1}(\theta_0))$: $\sqrt{n}(\hat\theta_n-\theta_0)\xrightarrow{\mathcal{D}}N_k(0,I_k^{-1}(\theta_0))$

Existence konz. řešení:

Pro $\mathcal{F}_{reg}^{ML}$, $\theta\in\mathbb{R}^1$, $\log\frac{f}{f_0}\in\mathcal{L}_1$ s pstí $\to1$ $\exists$ konzis. řešení LEq.

$P(L(\theta_0)>L(\theta))\to1$

POSTUP:

$$\phi^*(X) = \begin{cases} 1 & f_1 \geq k f_0 = W \\ 0 & f_1 \leq k f_0 = W^c \end{cases}$$

1) najdu W pomocí $f_1 \geq k f_0$, poté řeším distribuční problém testováním hypotéz $P_{\theta_0}(X \in W_{tvar}(k)) = ? = \alpha$
lze převést na $T(X) \geq k'$ přejdu k $P_{\theta_0}(T(X) \underset{\geq}{\leq} k') = \alpha$

2) rozdělení $T(X)$ ... test statistika

3) určím $k'(k)$ tak, že $P_{\theta_0}(T(X) \underset{\leq}{\geq} k') = \alpha$

11. (test. hypotéz, nejsilnější test, F, t)

R_{H_0} - zamítnutí H_0 ; $\bar{R}_{H_0}$ přijetí H_0 $\alpha \in (0,1)$

kritická fce testu: $\phi(X) = P_\theta(R_{H_0} \mid X) \in [0,1]$

$\beta_\phi(\theta) = E_\theta[\phi(X)] = E_\theta[P(R_{H_0} \mid X)] = E_\theta[E_\theta[1_{R_{H_0}} \mid X]] = E[1_{R_{H_0}}] = P_\theta(R_{H_0})$

Uniformly most powerful test:

$\phi^*(X)$ nazveme uniformly most powerfull testem, pokud

$\beta_{\phi^*}(\theta_0) \leqq \alpha$, $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_{\phi^*}(\theta) \leq \alpha$; $\beta_{\phi^*}(\theta)$ je stejnoměrně max.

Chyby I. & II. druhu:

I zamítnout H_0 přestože platí $\beta_{\phi^*}(\theta_0) \leq \alpha$ $\quad \beta_\phi^*(\theta_0) = P(R_{H_0})$

II. přijmout H_0 přestože neplatí $\beta_{\phi^*}(\theta_1) = 1-\beta$ .. síla testu $\quad \beta_\phi(\theta_1) = P_{\theta_1}(R_{H_0}) = 1 - P_{\theta_1}(\bar{R}_{H_0})$

Neznáhodněný test

speciálně $\phi(X) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow X \in W \subset \mathbb{R}^n \\ 0 \Leftrightarrow X \notin W \end{cases}$; W kritická oblast; $X \in W \Rightarrow H_0$ zamítáme; H_0 přijímám

Neyman - Pearson. lemma:

Nechť $H_0: \theta = \theta_0 \times H_1: \theta = \theta_1$, $\alpha \in (0,1)$, ozn. $f_0(X, \theta_0)$, $f_1(X, \theta_1)$. Pak $\exists \phi^*$

UMP test tvaru $\phi^*(X) = \begin{cases} 1 & f_1 > k f_0 \\ \gamma & f_1 = k f_0 \\ 0 & f_1 < k f_0 \end{cases}$ tak, že $\beta_{\phi^*}(\theta_0) = \alpha$ UMP test

tedy UMP test stejného tvaru na $\{f_1 \neq k f_0\}$

s výjimkou, kdy $\exists$ test ϕ t.ž. $\beta_\phi(\theta_1) = 1$, přestože nedosahuje $\beta_\phi(\theta_0) < \alpha$. ?

Postup: nalézt tvar W^* řešením první nerovnosti, distr. problém

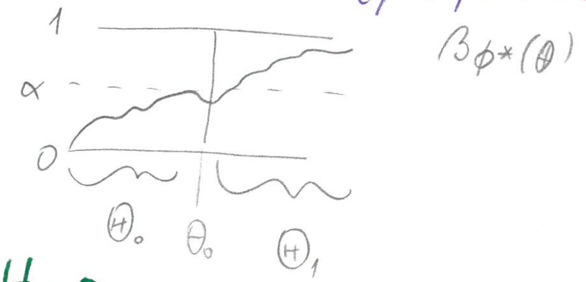
$P_{\theta_0}(X \in W^*(k)) < \alpha$ pro θ_0, lze převést na $T(X) \geqq k'$ a přejít ~~z~~ k

$P_{\theta_0}(T(X) \geqq k') \stackrel{!}{=} \alpha$ řešíme rozdělení $T(X)$ a určení $k'(k)$.

$\phi^* = \begin{cases} 1 & x \in W = \{f_1 \geq k f_0\} \\ 0 & x \notin W = \{f_1 \leq k f_0\} \end{cases}$

$H_0: \theta = \theta_0 \times H_1: \theta \in \Theta_1$: na hl. α: volíme $\theta_1 \in \Theta_1$ a test $\theta_0 = \theta_0 \times \theta = \theta_1$ z NP lemmatem $\exists \phi^*$ UMP. Pokud nezávisí na θ_1, pak máme UMP.

$H_0: \theta \in \Theta_0 \times H_1: \theta \in \Theta_1$: na hl. α: volíme $\theta_0 \in \Theta_0$ a testujeme
Nakonec ukážeme, že pro $\forall \theta_0' \in \Theta_0$, $\theta_0' \neq \theta_0$ platí $\beta_{\phi^*}(\theta_0') \leq \alpha$



$H_0: \theta \leq \theta_0 \times H_1: \theta > \theta_0$
Systém hustot $\mathcal{F}$ se nazývá MLR existuje-li statistika $T(X): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ tak, že $\frac{f_1}{f_0} = \frac{L(\theta_1)}{L(\theta_0)}$ $\theta_1 > \theta_0$ $\forall \theta_0, \theta_1$ je tento poměr monotonní fce statistiky $T(X)$
Nechť $H_0: \theta \leq \theta_0 \times H_1: \theta > \theta_0$ na hl. α, $\theta \in \mathbb{R}^1$, $\mathcal{F}$ MLR. Pak $\exists \phi^*$ UMP pro $H_0 \times H_1$ ve tvaru

$$\phi^*(X) = \begin{cases} 1 & T(X) > k \\ \gamma & T(X) = k \\ 0 & T(X) < k \end{cases}$$

určený podmínkou $\beta_{\phi^*}(\theta_0) = \alpha$.

$E[\phi^*(X)] = \alpha \sim 1 \cdot P(T(X) > k) + \gamma P(T(X) = k) + 0 = \alpha$

$H_0: \theta = \theta_0 \times H_1: \theta \neq \theta_0$
Libovolný test se nazývá nestranný, pokud $\sup_{\Theta_0} \beta_\phi(\theta) \leq \inf_{\Theta_1} \beta_\phi(\theta)$
Test UMP mezi nestrannými se nazývá UMPU. unbiased
Nechť $H_0: \theta = \theta_0 \times H_1: \theta \neq \theta_0$ $\theta \in \mathbb{R}^1$, $\mathcal{F}$ exp. třídy $f(x,\theta) = c(\theta) h(x) \exp\{Q(\theta) T(X)\}$ Q ryze rostoucí a diferencovatelná $\Rightarrow \mathcal{F}$ MLR, $\theta_0 \in \Theta_0$. Pak $\exists$ UMPU$_\alpha$ tvaru

$$\phi_U^*(X) = \begin{cases} 1 & T(X) < k_1 \vee T(X) > k_2 \\ \gamma_1 & T(X) = k_1 \\ \gamma_2 & T(X) = k_2 \\ 0 & T(X) \in (k_1, k_2) \end{cases} \quad k_1 < k_2 \quad \beta_{\phi_U^*}(\theta_0) = \alpha$$

LRT test $\theta \in \mathbb{R}^k$, $H_0: \theta \in \Theta_0 \times H_1: \theta \in \Theta_1$ na hl. α. Definujeme $\Lambda(X) = \frac{\sup_{\Theta_0} L(\theta)}{\sup_{\Theta_0 \cup \Theta_1} L(\theta)}$
$L(\theta) = f_X(x,\theta)$; $W_\Lambda = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \Lambda(X) \leq k\}$ kr. obor. a test ve tvaru

$$\phi_\Lambda(X) = \begin{cases} 1 & X \in W_\Lambda \\ \gamma & \in \{0,1\} \\ 0 & X \in W_\Lambda^c \end{cases}$$

pro $H_0 \times H_1$ za př. že $\exists w$ $\beta_{\phi_\Lambda}(\theta_0) \leq \alpha$ $\forall \theta \in \Theta_0$

F test

· jakýkoliv statistický test, ve kterém se používá rozdělení F za předpokladu H_0.

· použití v Gaussově modelu:

analýza rozptylu ANOVA:

předpoklad $X_{i1},\dots,X_{in_i} \sim N(\mu_i,\sigma^2)$ nezávislé, $i\in I$, $\sum_1^I n_i = N$

$$f_X = (2\pi\sigma^2)^{-N/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^I\sum_1^{n_i}(x_{ij}-\mu_i)^2\right\}$$

$H_0: \mu_1=\mu_2=\dots=\mu_I$ x H_1: alespoň jedno $\neq$ odvozuje se přes LRT test

$$\Lambda(X) = \frac{\sup\{f_X(\mu,\dots,\mu,\sigma^2) \mid \mu\in R, \sigma^2>0\}}{\sup\{f_X(\mu_1,\dots,\mu_I,\sigma^2)\mid \mu_i \in R, \sigma^2>0\}}$$

$$\Lambda(X)\le K \iff \mathcal{F}(X) = \frac{(N-I)}{(I-1)}\cdot\frac{S_A}{S_e} \ge C \qquad S_A=\sum_1^I(\bar X_i - \bar{\bar X})^2 \qquad S_e = \sum_1^I\sum_1^{n_i}(x_{ij}-x_i)^2$$

$h(S_A)=I-1$, $h(S_e)=N-I$ z Cochranovy věty & definice Fisch. rozdělení

$$\mathcal{F}|_{H_0}\sim F(I-1,N-I)$$

· test homogenity rozptylů

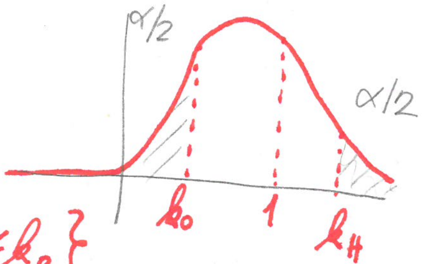
$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ x $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ $\qquad X_i\sim(\mu_1,\sigma_1^2)$ $\quad Y_j\sim(\mu_2,\sigma_2^2)$

z MIP $$F = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} = \left(\frac{(n_1-1)}{(n_2-1)}\cdot\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}\right)\frac{(n_2-1)}{(n_1-1)} \sim \frac{\chi^2(n_1-1)/n_1-1}{\chi^2(n_2-1)/n_2-1} \overset{\text{ii}}{=} F(n_1-1,n_2-1)$$

$\underbrace{F|_{H_0} = \frac{s_1^2}{s_2^2}}$ a víme, že $s_1^2 \xrightarrow{s.j.} \sigma_1^2$, $s_2^2\xrightarrow{s.j.}\sigma_2^2$ & $Es_1^2=\sigma_1^2$, $Es_2^2=\sigma_2^2$

musí být ≈ 1

$F_{1-\alpha/2} > F_{1-\alpha/2}$ to ?



$$W = W_1\cup W_2 = \{F(X)>k_H\}\cup\{F(X)<k_0\}$$

v praxi ale $$\tilde F(X) = \frac{\max(s_1^2,s_2^2)}{\min(s_1^2,s_2^2)} \sim F(n'-1, n''-1)$$

$n_1 \vee n_2$ podle toho, kde je max

2.

T-test

V Gauss. modelu $H_0: \mu_1 = \mu_2 \times H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ $\quad X_i$ iid $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\bar{X}_1$

Y_j iid $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\bar{X}_2$

a) známe-li σ_1^2, σ_2^2 $\quad U = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ $\quad U|_{H_0} \sim N(0,1)$

b) neznámé σ_1^2, σ_2^2 ale $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ $\quad T_V = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t(V)$ Welachova aproximace přibl. rozd.

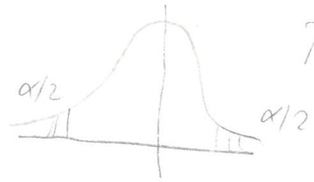
$$V = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}$$

W_α $\quad |T_{(V)}| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$ (V) $\quad$ pro neceločíselné V interpolace

c) neznámé σ_1^2, σ_2^2, ale $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, ANOVA $I=2$, V $\quad T = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$

$$S^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \qquad T|_{H_0} \sim t(n_1+n_2-2)$$

a) b) c) volím pro F-testu homogenity Reasonable kr. t. obr.



$P(|W| > K_2) = \alpha$

po testu homogenity pokud jsou si rozptyly rovny a jdeme na b) nebo si nejsou rovny a jdeme na c) snižíme hl. testu na menší než α, což pro praxi nevadí.

Test rovnosti kor. koeficientů

měříme po dvojicích, nepermutujeme $(X_j, Y_i)_1^n$ iid $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

nulovost $\rho \to$ iid pro Gauss data

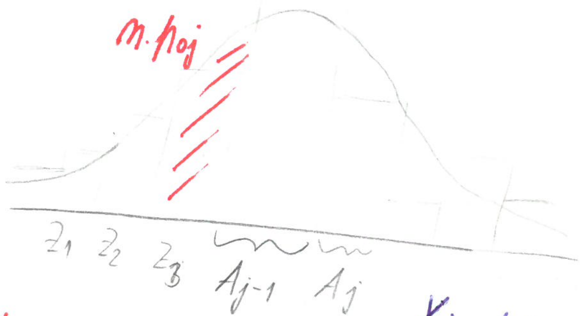
odvození přes LRT test $H_0: \rho = 0 \times H_1: \rho \neq 0$ $\quad \Lambda(X) = \dfrac{\sup\{L(\theta): \ldots \rho = 0\}}{\sup\{L(\theta): \ldots |\rho| < 1\}}$

$$\ln \Lambda(X) = \frac{n}{2} \log\left(1 - \hat{\rho}_{XY}^2\right) \leq K \Leftrightarrow |\hat{\rho}_{XY}| \geq C \Leftrightarrow T = \frac{|\hat{\rho}_{XY}|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{\rho}_{XY}^2}} \geq \tilde{C}$$

$T|_{H_0} \sim t(n-2)$, kde $\hat{\rho}_{XY} = \dfrac{\sum(X_j - \bar{X}_n)(Y_j - \bar{Y}_n)}{\sqrt{\sum(\ )^2 \sum(\ )^2}}$ výb. k. kor. Pearsonův

X. (CI, KONSTRUKCE, TEST DOBRÉ SHODY)

$H_0: \{y_1, \dots, y_n\}$ pochází z d.f. F_0 vs. H_1: nepochází z F_0



$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(X_j - n p_{0j})^2}{n p_{0j}} \sim \chi^2(k-s-1)$$

$$W_\alpha = \{\chi^2 \overset{?}{\geq} \chi^2_{1-\alpha}(k-s-1)\}$$ zamítáme H_0

X_j - pozorované četnosti
$n p_{0j}$ - teoretické četnosti
k - # tříd (chlívků)
s - počet parametrů d.f. F_0

častý případ $H_0: F = F_\theta$ x $H_1: F = F_\theta$ a nelze aplikovat χ^2 přímo protože $p_j = P_F(Y \in A_j)$; $p_j(\theta) = P_{F_\theta}(Y \in A_j)$ jsou fcí θ za H_0.

test: $H_0: p = p(\theta)$ x $H_1: p \neq p(\theta)$

postup: Odhad $\theta \dots \hat\theta = \hat\theta(X)$ za H_0 $F_0 = F_{\hat\theta}$ $(p_0 = p(\hat\theta))$ a test

$H_0: F = F_0 \, (p = p_0)$ x $H_1: F \neq F_0 \, (p \neq p_0)$

$$\chi^2 = \sum_1^k \frac{(X_j - n p_{0j})^2}{n p_{0j}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi^2(k-s-1) \quad s = \dim \Theta$$

$$W_\alpha = \{\chi^2(X) \geq \chi^2_{1-\alpha}(k-s-1)\}$$ zamítáme H_0

a) $\hat\theta = \hat\theta_{MLE}(X)$ za H_0

b) $\hat\theta(X) \overset{def}{=} \arg\min_\theta \chi^2(X,\theta) = \arg\min \sum_1^q \frac{(X_i - n p_i(\theta))^2}{n p_j(\theta)}$

$\frac{\partial}{\partial \theta_k} \chi^2(X,\theta) = 0$ a řešíme

Konfidenční množiny (inter. spolehlivosti)

Motivace: Bodovým odhadem nikdy netrefím hodnotu

Nechť $X = (X_1, \dots X_n)$, $P \in \mathcal{P}$ na $(\Omega, \mathcal{A})$; $\theta = \theta(P) \in R^1$ funkcionál na $\mathcal{P}$.
resp. $\theta \in R^k$. Ozn. $Ran(\theta) = \Theta$, a $\mathcal{B}_\Theta$ nechť jsou borelovské množiny na Θ.
$\alpha \in (0,1)$. Pak $C(X) \in \mathcal{B}_\Theta$ je $CM_{1-\alpha}$ pro θ na hladině $(1-\alpha)$ pokud

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} \underbrace{P(\theta \in C(X))}_{\text{konfidenční koef. / koef. spolehlivosti}} \geq 1-\alpha$$

Pozn: $C(X)$ pokrývá θ s pravděpodobností $\geq 1-\alpha$

$C(X) = [\underline{\theta}(X), \bar{\theta}(X)]$

Charakteristika a) konf. koef b) $E\lambda(C(X))$ resp. $El(X)$

→ řešení: minimalizace $El(X)$ při podmínce, že $KK \geq 1-\alpha$ resp. $KK = 1-\alpha$ — nelze optimalizovat současně

Konstrukce: Nechť $R(X, \theta)$ je pivotální veličina, tzn. její rozdělení R nezávisí na $P \in \mathcal{P}$. Volme $P \in \mathcal{P}$ pevně a c_1, c_2 tak, že $P(c_1 \leq R(X, \theta) \leq c_2) \geq 1-\alpha$ [resp. $= 1-\alpha$]. Pak $C(X) = \{\theta \in \Theta : c_1 \leq R(X, \theta) \leq c_2\}$ je $CM_{1-\alpha}$

PROBLÉMY:
a) existence R, několik různých R
b) volba c_1, c_2, kritérium symetrie $\alpha/2, \alpha/2$
c) výpočet $C(X)$ - pro R ryze monotonní v θ
$\Rightarrow \{R^{-1}(c_1, X) \leq \theta \leq R^{-1}(c_2, X)\}$

Asymptotické CM

- Říkáme, že $CM(X)$ pro parametr θ má asymptotickou hladinu významnosti $(1-\alpha)$ pokud $\liminf_{n\to\infty} P(\theta \in C(X)) \geq 1-\alpha \quad \forall P \in \mathcal{P}$

číslo $\liminf_{n\to\infty} \inf_{P \in \mathcal{P}} P(\theta \in C(X))$, pokud $\exists$ nazveme limitní konf. koef.

Pokud $\lim_{n\to\infty} P(\theta \in C(X)) = 1-\alpha \quad \forall P \in \mathcal{P}$, pak $C(X)$ nazýváme $(1-\alpha)$ as. přesná konf. množina pro θ.

lim. konf. koef $= 1-\alpha \not\Leftrightarrow (1-\alpha)$ as. přesná CM

Pro konstrukci používáme $R_n(X, \theta)$ borel. fci as. pivotální tj. její limitní rozdělení nezávisí na $P \in \mathcal{P}$.

$N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu \qquad P(\bar{X}_n = \mu) = 0!$

DEF: $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n) \quad P \in \mathcal{P}$ na $(\Omega, \mathcal{A})$

$\theta = \theta(P) \in \mathbb{R}^1$ funkcionál na $\mathcal{P}$

$\Theta = R_\theta$ a $\mathcal{B}_\Theta$ je $CM_{1-\alpha}$ pro θ na hladině $(1-\alpha)$, pokud

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} P(\theta \in C(\mathbb{X})) \geq 1-\alpha$$

konf. koef. (koef. spol)

Pozn: $C(\mathbb{X})$ "náhodná" množina pokrývající $\theta_{\text{skut.}}$ s pravděp. $\geq 1-\alpha$, tzn. ve $(100)(1-\alpha)\%$ případů

$C(\mathbb{X}) = [\underline{\theta}(\mathbb{X}), \bar{\theta}(\mathbb{X})]$

Dvě charakteristiky CM/CI

a) konfid. koef.

b) $E\lambda(C(\mathbb{X}))$ resp. $E\ell(\mathbb{X})$ objem/délka CM CI

→ nelze optimalizovat současně

⇒ "ŘEŠENÍ": minimalizace $E\ell(\mathbb{X})$ při podmínce, že konf. koef. $\geq 1-\alpha$ $= 1-\alpha$

KONSTRUKCE

Nechť $R(\mathbb{X}, \theta)$ je PIVOTÁLNÍ VELIČINA (PQ), tzn. rozdělení R nezávisí na $P \in \mathcal{P}$

Volme $P \in \mathcal{P}$ pevně ⇒ volme c_1, c_2 tak, že

$$P(c_1 \leq R(\mathbb{X}, \theta) \leq c_2) \geq 1-\alpha \quad [= 1-\alpha]$$

Pak $C(\mathbb{X}) = \{\theta \in \Theta : c_1 \leq R(\mathbb{X}, \theta) \leq c_2\}$ je $CM_{1-\alpha}$!

problémy: a) existence R, několik různých R

b) volba c_1, c_2 ... kriterium např. SYMETRIE $(\alpha/2, \alpha/2)$

c) výpočet $C(\mathbb{X})$

R ryze monotonní v $\theta \Rightarrow \{R^{-1}(c_1, \mathbb{X}) \leq \theta \leq R^{-1}(c_2, \mathbb{X})\}$

Př. $\mathbb{X}$ iid $N(\mu,\sigma^2)$; $\theta=\mu$, σ^2 neznámé.

Pak $T(\mathbb{X}) = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{s_n} \sim t(n-1)$ je PQ

$\Rightarrow P\left(t_{\alpha/2} \le T(\mathbb{X}) \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha$)

$$C(\mathbb{X}) = \left[\bar{X}_n - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right] \text{ je } CI_{1-\alpha}$$

$$\mu = \bar{X}_n \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s_n}{\sqrt{n}}$$

Př. $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$ iid

$\theta=\mu, \sigma^2>0$ neznámé

$H_0: \mu=\mu_0 \times H_1: \mu\neq\mu_0$ (α) $\forall \mu_0\in\mathbb{R}$

LRT test $(\Lambda(\mathbb{X}) \le k)$

$$\forall \mu_0 \quad W_\alpha(\mu_0) = \left\{\mathbb{X}: \frac{\sqrt{n}|\bar{X}_n-\mu_0|}{s_n} \ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$$

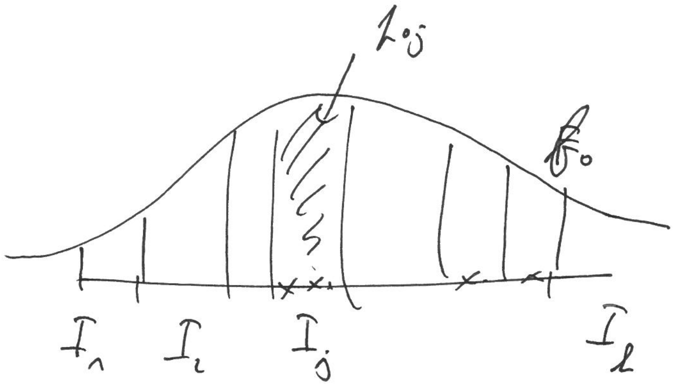
$$\text{test } \phi(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1 & \dfrac{\sqrt{n}|\bar{X}_n-\mu_0|}{s_n} \ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \\ 0 & < \end{cases}$$

$$A(\mu_0) = \left\{X: \frac{\sqrt{n}|\bar{X}_n-\mu_0|}{s_n} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$$

$$C(\mathbb{X}) = \left[\bar{X}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) ; \bar{X}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$$

CI s konfid. koef $= 1-\alpha$

1) $X_1, \dots, X_n \sim F$ $H_0: F = F_0 \times H_1: F \neq F_0$



$\underline{p_{0j}} = P_0[X \in I_j]$

$\underline{X_j} = \#\{X_i : X_i \in I_j\}$

$\underline{n p_{0j}}$

$$\boxed{\sum \frac{(X_j - n p_{0j})^2}{n p_{0j}} \xrightarrow{L} \chi^2(l-1)} \quad n \to \infty$$

---

2) $X_1, \dots, X_n \sim F$ $H_0: F \in \{F_\theta \mid \theta \in \Theta\} \times H_1: F \notin \{\ \}$

$\underline{H_0: p \in \{p_\theta \mid \theta \in \Theta\}}$ $\theta \sim H_0$

$\vdots$

$H_0: p = p(\hat{\theta}) \Longleftrightarrow \underline{H_0: F = F_{\hat{\theta}}}$

$\chi^2(X) \xrightarrow{L} \chi^2(l-s-1)$

$\underline{s = \dim \Theta}$

$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$X_1, \dots, X_n \sim F_X(x, \theta)$ $\quad \forall \theta \in \Theta$

$P[\theta \in C(\underline{x})] \geq 1-\alpha$ $\quad \underline{\underline{\forall \theta \in \Theta}}$

T-test.

$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \times \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \qquad \alpha$

X_i iid $N(\mu_1, \sigma_1^2)$
Y_i iid $N(\mu_2, \sigma_2^2)$

a) σ_1^2, σ_2^2 známe! $U = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) / \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2} \sim N(0,1)$ při H_0

b) σ_1^2, σ_2^2 neznáme, ale $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2) \quad \text{při } H_0$$

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

c) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ neznáme $\quad T_V = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t(V)$ aproximace Welch.
(přibližné rozdel.)

$$V = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}$$

$W_\alpha: \quad |T_{(V)}| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}} \underset{(V)}{(n_1 + n_2 - 2)}$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(V)$ interpolací $t(n)$!

ANOVA - analýza variace (F-test)

$X_{i1}, \dots X_{im_i} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ nezávislé $\quad i \in I \,;\, N = \sum_1^I m_i$

$$f_{\mathbb{X}}(x \mid \mu_1, \dots \mu_I, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-N/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^I \sum_1^{m_i} (x_{ij} - \mu_i)^2\right\}$$

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_I \; (= \mu) \quad \times \quad H_1:$ alespoň 1 nerovnost

za předpokladu $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_I^2 = \sigma^2$ $\quad (\alpha)$

odvození přes LRT-test

$$\Lambda(x') = \frac{\sup\{f_{\mathbb{X}'}(\mu, \dots, \mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}}{\sup\{f_{\mathbb{X}'}(\mu_1, \mu_2, \dots \mu_I, \sigma^2) : \mu_i \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}}$$

nakonec (2x.) dolo (I+1 rovnic)

$$\Lambda(x) \le K \iff \boxed{\mathcal{F}(x) = \frac{(N-I)\, S_A}{(I-1)\, S_e} \ge C}$$

$$S_A = \sum_1^I m_i (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2$$

$$S_e = \sum_1^I \sum_1^{m_i} (x_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{N} \sum_1^I \sum_1^{m_i} x_{ij}$$

$$\bar{X}_i = \frac{1}{m_i} \sum_1^{m_i} x_{ij}$$

Rozdělení $\mathcal{F}/_{H_0} \sim F(I-1, N-I)$

$W_\alpha = \{\mathcal{F}(x) \ge F_{1-\alpha}(I-1, N-I)\}$

naladěn na α

$\sim$ zamítáme H_0