

# Úvod do dynamiky kontinua

Radek Fučík, Pavel Strachota



---

# Obsah

---

<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>1 Úvod a motivace</b>	<b>5</b>
<b>2 Matematický aparát</b>	<b>7</b>
2.1 Základní pojmy	7
2.2 Diferenciální počet funkcí více proměnných	8
2.3 Integrální počet funkcí více proměnných	10
2.3.1 Záměna derivace a integrálu	12
2.4 Integrace po varietách	12
2.4.1 Křivkový integrál	12
2.4.2 Plošný integrál	14
2.4.3 Greenova formule	16
<b>3 Základní pojmy dynamiky kontinua</b>	<b>19</b>
3.1 Kontinuum a materiálové těleso	19
3.2 Referenční a aktuální konfigurace materiálového tělesa	19
3.2.1 Přechod mezi referenčními a prostorovými souřadnicemi	20
3.3 Deformační gradient	21
3.4 Materiálová derivace	22
3.5 Zrychlení materiálového bodu	23
<b>4 Rovnice dynamiky kontinua</b>	<b>25</b>
4.1 Zákon zachování hmoty	25
4.1.1 Eulerův přístup s použitím konečného objemu	25
4.1.2 Eulerův přístup s použitím infinitezimálního objemu	27
4.1.3 Lagrangeův přístup s použitím konečného objemu	29
4.1.4 Lagrangeův přístup s použitím infinitezimálního objemu	31
4.2 Zákon zachování hybnosti	35
4.2.1 Odvození obecného tvaru rovnic	35
4.2.2 Newtonovské tekutiny a Navierovy-Stokesovy rovnice	37
4.2.3 Nevazké proudění - Eulerovy rovnice	38
4.2.4 Nestlačitelné proudění	38
4.3 Zákon zachování energie	39
4.3.1 Zákon zachování celkové energie	39
4.3.2 Zákon zachování vnitřní energie	41
4.3.3 Zákon zachování energie pro newtonovské tekutiny	42
4.4 Uzavření systému rovnic pro proudění tekutiny	43
4.4.1 Stavová rovnice	43
4.4.2 Vztah mezi vnitřní energií a teplotou	44
4.5 Analytická řešení vybraných úloh laminárního proudění newtonovské tekutiny	45
4.5.1 Mezi deskami	46
4.5.2 V trubce s kruhovým průřezem	46

4.5.3	V trubce s eliptickým průřezem . . . . .	47
4.5.4	V trubce s obdélníkovým průřezem . . . . .	47
4.5.5	V trubce s průřezem tvaru rovnostranného trojúhelníku . . . . .	49
4.5.6	V trubce s průřezem tvaru kruhové výseče . . . . .	50
4.6	Nenewtonovské tekutiny . . . . .	50
4.6.1	Zjednodušený model pro interpretaci nenewtonovských tekutin . . . . .	50
4.6.2	Zobecněné newtonovské tekutiny a mocninný model . . . . .	52
4.6.3	Další skupiny nenewtonovských tekutin . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Základy teorie deformace</b> . . . . .	<b>55</b>
5.1	Vektor $c_j$ . . . . .	55
5.2	Vektor $C_j$ . . . . .	56
5.3	Greenův a Cauchyho tenzor deformace . . . . .	57
5.4	Eulerův a Lagrangeův tenzor deformace . . . . .	58
5.5	Vektor posunutí . . . . .	58
5.6	Rozklad deformace . . . . .	59
5.7	Tenzory malých deformací a rotací . . . . .	60
5.7.1	Tenzory malých deformací . . . . .	60
5.7.2	Tenzory malých rotací . . . . .	60
5.8	Příklady deformace . . . . .	61
5.8.1	Čistá translace . . . . .	61
5.8.2	Čistá rotace . . . . .	61
5.8.3	Čisté roztažení . . . . .	61
5.8.4	Roztažení s rotací . . . . .	62
5.8.5	Jednoduchý smyk . . . . .	64
5.8.6	Čistý smyk . . . . .	65

---

# 1. Úvod a motivace

---

Držíte v ruce skripta k předmětu *Úvod do dynamiky kontinua* vyučovaném na Katedře matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze. Cílem předmětu je seznámit posluchače druhého ročníku bakalářského studia s hlavními principy popisu dynamiky kontinua včetně základního matematického aparátu, který tento popis umožňuje. Předmět slouží jako výchozí bod pro další studium termodynamiky kontinua a zároveň všech disciplín, které se zabývají matematickou analýzou a numerickým řešením parciálních diferenciálních rovnic odvozených od rovnic dynamiky kontinua.

Motivací pro zařazení tohoto předmětu do výuky je rostoucí potřeba ze stran výzkumných a průmyslových organizací umět popsat nejen základní proudění homogenní látky, ale především komplexní interakce ostatních látek s proudícím kontinuem a v neposlední řadě i proudění vícesložkových směsí. V rámci výzkumných projektů na katedře matematiky FJFI studujeme nebo jsme studovali řadu ekologických nebo průmyslových aplikací, kde se uplatňuje matematicko-fyzikální popis dynamiky kontinua.



---

## 2. Matematický aparát

---

### 2.1 Základní pojmy

- Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  jako uspořádanou  $n$ -tici reálných čísel zapisujeme jako sloupec

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T.$$

Vektory standardní báze prostoru  $\mathbb{R}^n$  označíme písmeny  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ , přičemž

$$\mathbf{e}_\ell = (\delta_{\ell 1}, \delta_{\ell 2}, \dots, \delta_{\ell n})^T \quad \forall \ell \in \hat{n}.$$

- Pro skalární součin dvou vektorů  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  a  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  budeme uvažovat důsledně standardní skalární součin v  $\mathbb{R}^n$  a zapisovat pomocí symbolu  $\cdot$  nebo maticového násobení

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Pro  $n \in \{2, 3\}$  platí

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\theta), \tag{2.1}$$

kde  $\theta$  je úhel, který svírají vektory  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ .

*Poznámka.* Vztah (2.1) lze považovat jako definici úhlu  $\theta \in (0, \pi)$  mezi vektory  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  i pro obecné  $n \in \mathbb{N}$ .

- Pro normu vektoru  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  budeme vždy používat Euklidovu normu v  $\mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{a}\| = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}|^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Vektorový součin dvou vektorů  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  a  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  v  $\mathbb{R}^3$  je antikomutativní operace definovaná vztahem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

Pro velikost (normu) vektorového součinu platí Lagrangeova identita

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

kde na pravé straně vystupuje determinant tzv. Gramovy matice (gramián). Poznamenejme, že vektorový součin lze vyjádřit i pomocí úhlu  $\theta$ , který vektory  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  svírají

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin(\theta) \mathbf{n},$$

kde  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor kolmý k rovině dané vektory  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ . Pokud jsou oba vektory rovnoběžné (kolineární), tj. nedefinují žádnou rovinu ale jen pouze přímku, je jejich vektorový součin nulový.

## 2.2 Diferenciální počet funkcí více proměnných

- Funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  je vektor skalárních funkcí  $f_\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T$$

- *Derivaci* funkce více proměnných  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  v bodě  $\mathbf{x}_0$  definujeme jako lineární zobrazení  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$  z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^m$  takové, že

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}) = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

$\mathbf{f}'$  se též nazývá totální derivace nebo totální diferenciál a v tom případě se zpravidla značí symbolem  $\frac{df}{dx}$ .

- *Derivace* funkce více proměnných  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  podle vektoru  $\mathbf{v}$  v bodě  $\mathbf{x}_0$  je vektor

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0))$$

a pokud existuje totální derivace  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$ , plyne z (2.3)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(h\mathbf{v})) = \mathbf{0},$$

z čehož z linearitě derivace  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$  rovnou dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}.$$

Pokud  $\mathbf{v}$  je jednotkový vektor, nazýváme derivaci  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$  derivací funkce  $\mathbf{f}$  ve směru  $\mathbf{v}$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ . Uvažujeme-li libovolný vektor  $\mathbf{w}$  a jednotkový vektor  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$ , lze přímo z definice derivace ve směru ukázat, že

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{w}\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0).$$

*Poznámka 1.* Definici úplné derivace lze omezit na určitou podmnožinu proměnných. Nechť je dána funkce  $f : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f = f(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$  kde  $\mathbf{x}^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $\mathbf{x}^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_2}$ . Potom úplnou derivací funkce  $f$  vzhledem k vektoru proměnných  $\mathbf{x}^{(1)}$  v bodě  $(\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)})$  rozumíme lineární zobrazení  $\frac{df}{d\mathbf{x}^{(1)}}(\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)}) : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^m$  takové, že

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \left( \mathbf{f}(\mathbf{x}_0^{(1)} + \mathbf{h}, \mathbf{x}_0^{(2)}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)}) - \frac{df}{d\mathbf{x}^{(1)}}(\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)})\mathbf{h} \right) = \mathbf{0}. \quad (2.4)$$

Tuto definici lze přímočarým způsobem rozšířit na libovolnou permutaci složek vektorů  $\mathbf{x}^{(1)}$ ,  $\mathbf{x}^{(2)}$  v argumentu funkce  $f$ . Zde je potřeba poznamenat dva různé přístupy při značení totální derivace podle jedné sady proměnných. Vzhledem k tomu, že vybranou sadu proměnných  $\mathbf{x}^{(1)}$  může tvořit i jedna složka, splývá zápis  $\frac{df}{d\mathbf{x}^{(1)}}(\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)})$  s parciální derivací funkce  $f$  podle  $\mathbf{x}^{(1)}$ . Proto je možné značit totální derivaci podle sady proměnných  $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)})^T$  též symbolem

$$\frac{\partial f}{\partial (x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)})}(\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)}).$$



- *Parciální derivace* funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{x}_0$  jsou derivace ve směru vektorů standardní báze a označují se

$$\frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\mathbf{x}_0) = \partial_\ell f(\mathbf{x}_0) := \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_\ell}(\mathbf{x}_0).$$

- Matici lineárního zobrazení  $f'(\mathbf{x}_0)$  ve standardních bázích prostorů  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$  nazýváme Jacobiho maticí a značíme  $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0)$ . Tvar jejího  $\ell$ -tého sloupce je zřejmý z rovnosti

$$\begin{pmatrix} J_{1\ell} \\ J_{2\ell} \\ \vdots \\ J_{m\ell} \end{pmatrix} = \mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{e}_\ell = f'(\mathbf{x}_0) \mathbf{e}_\ell = \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \partial_\ell f_1(\mathbf{x}_0) \\ \partial_\ell f_2(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \partial_\ell f_m(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \quad \forall \ell \in \hat{n},$$

takže celkem máme

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(\mathbf{x}_0) & \partial_2 f(\mathbf{x}_0) & \dots & \partial_n f(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\mathbf{x}_0) & \partial_2 f_1(\mathbf{x}_0) & \dots & \partial_n f_1(\mathbf{x}_0) \\ \partial_1 f_2(\mathbf{x}_0) & \partial_2 f_2(\mathbf{x}_0) & \dots & \partial_n f_2(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(\mathbf{x}_0) & \dots & \dots & \partial_n f_m(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

- Derivace složené funkce  $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , kde  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$  a  $f : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$ , je za předpokladu existence totálních derivací  $f'(g(\mathbf{x}_0))$  a  $g'(\mathbf{x}_0)$  dána výrazem

$$(f \circ g)'(\mathbf{x}_0) = f'(g(\mathbf{x}_0)) \circ g'(\mathbf{x}_0). \quad (2.5)$$

Protože na pravé straně (2.5) jde o složení dvou lineárních zobrazení, lze podle zvyku symbol "o" vypustit. Z (2.5) také okamžitě plyne vztah pro Jacobiho matici složeného zobrazení

$$\mathbf{J}_{f \circ g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{J}_f(g(\mathbf{x}_0)) \mathbf{J}_g(\mathbf{x}_0).$$

Z definice násobení matic pak odvodíme pravidlo pro výpočet parciální derivace  $i$ -té složky funkce  $f \circ g$  podle  $\ell$ -té proměnné

$$\mathbf{J}_{f \circ g}(\mathbf{x}_0)_{i\ell} = \frac{\partial (f \circ g)_i}{\partial x_\ell}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^s \frac{\partial f_i(g(\mathbf{x}_0))}{\partial y_k} \frac{\partial g_k(\mathbf{x}_0)}{\partial x_\ell}, \quad (2.6)$$

kde  $y_k$  označují složky argumentu funkce  $f = f(\mathbf{y})$ .

- Pro zápis vícerozměrné derivace se běžně zavádí operátor nabra  $\nabla$ , který se dá reprezentovat jako vektor parciálních derivací  $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)^T = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$ . Derivaci skalární funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pak můžeme (podle Rieszovy věty) reprezentovat gradientem, neboť platí

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{x}_0) \mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = (\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f)^T \cdot \mathbf{v}.$$

*Poznámka.* V následujících kapitolách budou pro nás důležité funkce závislé na čase a na třech prostorových souřadnicích. Ve shodě s poznámkou 1 pak gradientem funkce

$$f : \mathcal{J} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

kde  $\mathcal{J} = (0, T_{\max})$  je časový interval a  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  je oblast, rozumíme výraz

$$\nabla f(t, \mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, \mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(t, \mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_3}(t, \mathbf{x}) \right)^T.$$

## 2.3 Integrální počet funkcí více proměnných

- Integrál skalární funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  přes měřitelnou<sup>1</sup> množinu  $V \subset \mathbb{R}^n$  značíme

$$\int_V f(\mathbf{x}) \, d\mu(\mathbf{x}) = \int_V f(\mathbf{x}) \, dV = \int_V f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

kde  $\mu = \mu_n$  označuje  $n$ -rozměrnou Lebesgueovu míru zavedenou na  $\mathbb{R}^n$ . Množinu všech (Lebesgueovsky) integrovatelných funkcí na množině  $V$  značíme  $L(V)$ .

- Řekneme, že zobrazení  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je *regulární* na otevřené množině  $M \subset \mathbb{R}^n$ , jestliže prvky matice  $\mathbf{J}_\varphi$  jsou spojité na  $M$  a pro každé  $\mathbf{x} \in M$  platí  $\det \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{x}) \neq 0$ .

**Věta. (o substituci ve vícerozměrném integrálu)** *Nechť  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je prosté regulární zobrazení definované na otevřené množině  $A$ . Potom pro každou měřitelnou podmnožinu  $V \subset A$  platí*

$$\int_V f(\varphi(\xi)) |\det \mathbf{J}_\varphi(\xi)| \, d\xi = \int_{\varphi(V)} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

resp. pro libovolnou měřitelnou  $W \subset \varphi(A)$  máme

$$\int_W f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\varphi^{-1}(W)} f(\varphi(\xi)) |\det \mathbf{J}_\varphi(\xi)| \, d\xi$$

**Věta. (Fubini)** *Nechť  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ . Uvažujme funkci  $f \in L(V)$ ,  $f = f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})^T$  kde  $\mathbf{x}^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}^{(2)} \in \mathbb{R}^m$ . Označme*

$$A_{\mathbf{x}^{(1)}} = \{\mathbf{x}^{(2)} \in \mathbb{R}^m \mid (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) \in V\},$$

$$B = \{\mathbf{x}^{(1)} \in \mathbb{R}^n \mid A_{\mathbf{x}^{(1)}} \neq \emptyset\}.$$

Potom platí

$$\int_V f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_B \left( \int_{A_{\mathbf{x}^{(1)}}} f(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) \, d\mathbf{x}^{(2)} \right) d\mathbf{x}^{(1)} =: \int_B d\mathbf{x}^{(1)} \int_{A_{\mathbf{x}^{(1)}}} d\mathbf{x}^{(2)} f(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}).$$

*Poznámka.* Množina  $A_{\mathbf{x}^{(1)}}$  je v podstatě „řez“ množiny  $V$  bodem  $\mathbf{x}^{(1)}$ . Množina  $B$  obsahuje všechna taková  $\mathbf{x}^{(1)}$ , kterými lze vést neprázdný řez. Fubiniho věta by zůstala v platnosti i při nahrazení  $B$  celým  $\mathbb{R}^n$ , protože pro  $\mathbf{x}^{(1)} \in \mathbb{R}^n \setminus B$  je vnitřní integrál přes prázdnou množinu roven nule.

**Příklad.** Vypočítejme integrál

$$\int_V 12(x_1 + x_2)^2 \, d\mathbf{x}$$

přes množinu

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1 \wedge 0 \leq x_2 \leq x_1\}.$$

<sup>1</sup>Pojmy *měřitelná funkce* a *měřitelná množina* v tomto kurzu nezavádíme. Tyto pojmy vystupují v teorii Lebesgueova integrálu, kterou lze budovat klasickým způsobem na základě teorie míry (jako v MAB4) nebo alternativní tzv. Daniellovou konstrukcí (vyloženou v MAA4), která teorii míry a priori nepotřebuje a její pojmy zpětně definuje s využitím Daniellova integrálu a charakteristických funkcí. Pro naše potřeby bude každá představitelná množina měřitelná, stejně jako každá představitelná funkce definovaná na takové množině. Předpoklad měřitelnosti však pro korektnost uvádíme ve znění vět, které budeme pro další výklad potřebovat.

Podle Fubiniho věty lze tento dvourozměrný integrál rozdělit na dva jednorozměrné integrály. Můžeme zvolit  $\mathbf{x}^{(1)} = x_1$ ,  $\mathbf{x}^{(2)} = x_2$ , takže

$$A_{x_1} = \{x_2 \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x} \in V\} = \begin{cases} [0, x_1] & \text{pro } x_1 \in [0, 1], \\ \emptyset & \text{jinak} \end{cases}$$

a

$$B = \{x_1 \in \mathbb{R} \mid A_{x_1} \neq \emptyset\} = [0, 1].$$

Platí tedy

$$\begin{aligned} \int_V 12(x_1 + x_2)^2 \, d\mathbf{x} &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 12(x_1 + x_2)^2 = 12 \int_0^1 dx_1 \left[ \frac{(x_1 + x_2)^3}{3} \right]_0^{x_1} \\ &= 4 \int_0^1 dx_1 ((2x_1)^3 - x_1^3) = 4 \int_0^1 dx_1 7x_1^3 = 4 \left[ \frac{7}{4} x_1^4 \right]_0^1 = 7. \end{aligned}$$

Množinu  $V$  však lze „naporcovat“ i jinak. Jestliže zvolíme  $\mathbf{x}^{(1)} = x_2$ ,  $\mathbf{x}^{(2)} = x_1$ , dostaneme

$$A_{x_2} = \{x_1 \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x} \in V\} = \begin{cases} [x_2, 1] & \text{pro } x_2 \in [0, 1], \\ \emptyset & \text{jinak} \end{cases}$$

a

$$B = \{x_2 \in \mathbb{R} \mid A_{x_2} \neq \emptyset\} = [0, 1].$$

Aplikací Fubiniho věty dostaneme

$$\begin{aligned} \int_V 12(x_1 + x_2)^2 \, d\mathbf{x} &= \int_0^1 dx_2 \int_{x_2}^1 dx_1 12(x_1 + x_2)^2 = 12 \int_0^1 dx_2 \left[ \frac{(x_1 + x_2)^3}{3} \right]_{x_2}^1 \\ &= 4 \int_0^1 dx_2 ((1 + x_2)^3 - (2x_2)^3) = 4 \int_0^1 dx_2 (1 + 3x_2 + 3x_2^2 - 7x_2^3) \\ &= 4 \left[ x_2 + \frac{3}{2} x_2^2 + x_2^3 - \frac{7}{4} x_2^4 \right]_0^1 = 4 \left( 1 + \frac{3}{2} + 1 - \frac{7}{4} \right) = 7. \end{aligned}$$

**Příklad.** Vypočítejme objem koule o poloměru  $R$ , tj.  $\int_V d\mathbf{x}$ , kde

$$V = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2 \}.$$

Nejprve provedeme transformaci do sférických souřadnic, tj.

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = \boldsymbol{\varphi}(r, \phi, \theta) = (r \cos \phi \cos \theta, r \sin \phi \cos \theta, r \sin \theta)^T.$$

Platí

$$\mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi}}(r, \phi, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \cos \theta & -r \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{vmatrix} = r^2 \cos \theta.$$

Podle věty o substituci dostaneme

$$\int_V d\mathbf{x} = \int_{\boldsymbol{\varphi}^{-1}(V)} r^2 \cos \theta \, d(r, \phi, \theta)$$

přičemž  $\varphi^{-1}(V) = (0, R) \times (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Dále dvakrát (rekurzivně) aplikujeme Fubiniho větu a integrál rozdělíme na jednorozměrné integrály

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^{-1}(V)} r^2 \cos \theta \, d(r, \phi, \varphi) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta r^2 \cos \theta \\ &= \left( \int_0^{2\pi} d\phi \right) \left( \int_0^R r^2 dr \right) \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos \theta \right) \\ &= 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

### 2.3.1 Záměna derivace a integrálu

**Věta 2. (o derivaci integrálu podle parametru)** *Nechť  $I \subset \mathbb{R}$  je otevřený interval a  $V$  je měřitelná množina. Nechť  $f : V \times I \rightarrow \mathbb{R}$  splňuje následující předpoklady:*

1. Integrál  $F(\alpha) := \int_V f(\mathbf{x}, \alpha) \, d\mathbf{x}$  konverguje (je konečný) alespoň pro jedno  $\alpha \in I$ , tj. zkráceně  $(\exists \alpha \in I) (f(\cdot, \alpha) \in L(V))$ .
2. Pro každé  $\alpha \in I$  je funkce  $f(\cdot, \alpha)$  měřitelná na  $V$ .
3. Funkce  $f(\mathbf{x}, \cdot)$  je diferencovatelná na  $I$  pro skoro všechna<sup>2</sup>  $\mathbf{x} \in V$ .
4. Existuje tzv. **integrabilní majoranta**  $g$  funkce  $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ , tj. existuje  $g \in L(V)$  tak, že pro skoro všechna  $\mathbf{x} \in V$  a pro všechna  $\alpha \in I$  platí

$$\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}, \alpha)}{\partial \alpha} \right| \leq g(\mathbf{x}).$$

Potom pro všechna  $\alpha \in I$  integrál  $F(\alpha)$  konverguje a platí

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int_V \frac{\partial f(\mathbf{x}, \alpha)}{\partial \alpha} \, d\mathbf{x}.$$

## 2.4 Integrace po varietách

### 2.4.1 Křivkový integrál

**Definice.** *Křivkou v  $\mathbb{R}^n$  rozumíme libovolnou spojitou funkci  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Je-li  $\varphi$  prosté na  $(a, b)$ , křivka  $\varphi$  se nazývá *jednoduchá*. Platí-li  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , jde o křivku *uzavřenou*, v opačném případě se jedná o křivku *otevřenou*. Množinu  $\varphi = \langle \varphi \rangle = \varphi([a, b])$  nazýváme *dráhou* nebo *geometrickým obrazem křivky* v  $\mathbb{R}^n$ . Zobrazení  $\varphi$  se nazývá parametrizací dráhy  $\varphi$ .*

**Definice.** *Nechť  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  je dráha a nechť  $(\forall t \in (a, b)) (\exists \dot{\varphi}(t))$ . Křivkovým (dráhovým) integrálem prvního druhu funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  po dráze  $\varphi$  rozumíme integrál*

$$\int_{\varphi} f(\mathbf{x}) \, dl = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\dot{\varphi}(t)\| \, dt. \quad (2.7)$$

<sup>2</sup>Daný výrok  $A(\mathbf{x})$  platí skoro všude na  $V$ , jestliže existuje množina  $N \subset V$  tak, že její míra  $\mu(N) = 0$  a výrok  $A(\mathbf{x})$  platí  $\forall \mathbf{x} \in V \setminus N$ .

*Poznámka.* Výraz  $dl = \|\dot{\varphi}(t)\| dt$  má smysl délky elementu dráhy  $\varphi([t, t + dt])$ . Integrál  $\int_{\varphi} 1 dl$  vyjadřuje délku dráhy  $\varphi$ . Pro nezápornou  $f$  integrál  $\int_{\varphi} f dl$  vyjadřuje dvourozměrnou plochu množiny

$$S = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in \varphi \wedge y \in (0, f(\mathbf{x}))\},$$

tj. plochu pod „grafem“ funkce  $f$  vneseným podél dráhy  $\varphi$ .

**Příklad.** Můžeme si ověřit geometrickou definici čísla  $\pi$  výpočtem obvodu kruhu v  $\mathbb{R}^2$  jako integrálu

$$\mu_1(\varphi) = \int_{\varphi} 1 dl$$

kde

$$\langle \varphi \rangle = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2\}.$$

Zvolíme parametrizaci

$$\varphi(t) = (R \cos t, R \sin t)^T$$

pro  $t \in [0, 2\pi]$ . Podle definice dostaneme triviálně

$$\int_{\varphi} dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = R \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R. \quad (2.8)$$

**Definice.** *Křivkovým (dráhovým) integrálem druhého druhu* vektorového pole (funkce)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  rozumíme integrál

$$\int_{\varphi} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) dt = \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(\varphi(t)) \dot{\varphi}_k(t) dt, \quad (2.9)$$

kde orientace dráhy je dána její parametrizací.

*Poznámka.* Integrandem jednorozměrného integrálu na pravé straně (2.9) je projekce vektorového pole do směru tečného vektoru ke dráze  $\tau(t) = \dot{\varphi}(t)$ . Např. je-li pole  $f$  v každém bodě kolmé na dráhu, integrál bude roven nule.

*Poznámka.* Složky vektoru  $\dot{\varphi}_i(t) dt$  odpovídají složkám posunutí bodu  $\mathbf{x} = \varphi(t)$  po dráze ve směrech souřadných os, tj. vektorů standardní báze  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ . Proto se integrál 2.9 někdy zapisuje též jako

$$\int_{\varphi} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\varphi} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\varphi} \sum_{k=1}^n f_k(\mathbf{x}) dx_k. \quad (2.10)$$

*Poznámka.* Buď  $\varphi$  dráha s parametrizací  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dráhou opačně orientovanou ke dráze  $\varphi$  rozumíme dráhu  $-\varphi$  danou parametrizací

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(a + b - t).$$

Pro křivkový integrál druhého druhu platí

$$\int_{-\varphi} f dl = - \int_{\varphi} f dl.$$

### 2.4.2 Plošný integrál

Ačkoliv je možné s jistou mírou abstrakce zavést obecně integraci po libovolných  $m$ -rozměrných varietách v  $n$ -rozměrném prostoru ( $m < n$ ), soustředíme se při definici plošných integrálů pouze na plochy v  $\mathbb{R}^3$ .

**Definice.** *Plošnou parametrizací* nazýváme každé zobrazení  $S : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  kde  $M \subset \mathbb{R}^2$  je oblast. Množinu

$$S = \langle S \rangle = S(M)$$

nazýváme *plochou* nebo geometrickým obrazem zobrazení  $S$ . Jestliže zobrazení  $S$  je prosté, nazýváme plochu  $S$  jednoduchou. Jestliže navíc  $S \in C^1(M)$  a platí

$$\frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \neq \mathbf{0} \quad \forall (u, v) \in M,$$

hovoříme o jednoduché regulární ploše.

*Poznámka.* Jednoduchá regulární plocha má v každém bodě  $\mathbf{x} \in S$  jednoznačně definovaný normálový vektor, který je roven

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial S}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \right\|},$$

kde  $(u, v) = S^{-1}(\mathbf{x})$ .

**Definice.** *Plošným integrálem prvního druhu* skalární funkce  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  přes jednoduchou regulární plochu  $S$  rozumíme integrál

$$\int_S f(\mathbf{x}) dS = \int_M f(S(u, v)) \left\| \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \right\| d(u, v). \quad (2.11)$$

*Poznámka.* Výraz  $dS = \left\| \frac{\partial S}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial S}{\partial v}(u, v) \right\| d(u, v)$  má smysl obsahu infinitesimálního rovnoběžníku daného vektory  $\frac{\partial S}{\partial u} du$  a  $\frac{\partial S}{\partial v} dv$ . Obsah plochy  $S$  je tedy dán plošným integrálem z jednotky

$$\mu_2(S) = \int_S dS.$$

*Poznámka.* Pro výpočet  $dS$  lze využít platnost Lagrangeovy identity (2.2).

**Příklad.** Vypočítejme povrch koule dané rovnicí

$$S = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = R \}.$$

Zvolíme parametrizaci

$$S(\phi, \theta) = (R \cos \phi \cos \theta, R \sin \phi \cos \theta, R \sin \theta)^T$$

na množině  $M = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Vypočítáme

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \phi} &= (-R \sin \phi \cos \theta, R \cos \phi \cos \theta, 0)^T, \\ \frac{\partial S}{\partial \theta} &= (-R \cos \phi \sin \theta, -R \sin \phi \sin \theta, R \cos \theta)^T \end{aligned}$$

a nyní si připravíme pro použití Lagrangeovy identity jednotlivé prvky Gramova determinantu:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \phi} = R^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + R^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta + 0 = R^2 \cos^2 \theta, \\ F &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \theta} = R^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + R^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta = R^2, \\ G &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \theta} = R^2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta \sin \theta - R^2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta \sin \theta + 0 = 0. \end{aligned}$$

Z toho po dosazení do vzorce (2.11) dostaneme

$$\begin{aligned} \int_S dS &= \int_M \left\| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(\phi, \theta) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(\phi, \theta) \right\| d(\phi, \theta) = \int_M \sqrt{\begin{vmatrix} E & G \\ G & F \end{vmatrix}} d(\phi, \theta) \\ &= \int_M R^2 \cos \theta d(\phi, \theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi R^2 \cos \theta = 2\pi R^2 [\sin \theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

**Definice.** Plošným integrálem druhého druhu vektorového pole  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  přes jednoduchou hladkou regulární plochu  $S$  rozumíme integrál

$$\int_S \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_M \mathbf{f}(\mathbf{S}(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(u, v) \right) d(u, v). \quad (2.12)$$

*Poznámka.* Platí

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(u, v) d(u, v),$$

kde  $\mathbf{n}$  je jednotkový normálový vektor k ploše  $S$  v bodě  $\mathbf{S}(u, v)$ . V závislosti na parametrizaci může směřovat na jednu nebo druhou stranu plochy, na čemž závisí znaménko integrálu. V následujících kapitolách budeme uvažovat zpravidla uzavřené plochy tvořící hranice souvislých množin  $V \subset \mathbb{R}^3$ , tj.  $S = \partial V$ . Vektor  $\mathbf{n}$  bude směřovat vždy ven z objemu  $V$ . Za těchto předpokladů je znaménko plošného integrálu jednoznačně určeno.

*Poznámka.* Integrandem plošného integrálu druhého druhu je tedy projekce vektorového pole  $\mathbf{f}$  do směru normály k ploše  $S$ .

*Poznámka.* Formální zápis integrálu 2. druhu je také

$$\int_S \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S f_1(\mathbf{x}) dx_2 dx_3 + f_2(\mathbf{x}) dx_1 dx_3 + f_3(\mathbf{x}) dx_1 dx_2.$$

Je totiž možné zapsat

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \left( \sum_{i=1}^3 f_i \mathbf{e}_i \right) \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 f_i (\mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{S})$$

kde skalární součiny  $\mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{S}$  představují velikosti projekcí vektoru  $d\mathbf{S}$  do směrů souřadných os  $\mathbf{e}_i$ . To je totéž jako velikost projekce plochy  $dS$  do roviny kolmé na  $\mathbf{e}_i$ . Rozsah souřadnic této projekce (což je rovnoběžník) ve směrech daných vektory  $\mathbf{e}_k$  a  $\mathbf{e}_l$  ( $k \neq l$ ,  $k, l \neq i$ ) je roven  $dx_k$  a  $dx_l$  a její plocha je rovna  $dx_k dx_l$ .

### 2.4.3 Greenova formule

Následující věty jsou zobecněním metody per partes pro určitý integrál.

**Věta 3. (Greenova formule)** *Nechť  $n \in \{2, 3\}$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$  je oblast,  $f, g \in C^1(V)$  a  $f, g \in C(\partial V)$ . Potom platí*

$$\int_V \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_V f(\mathbf{x}) \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_k} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial V} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) n_k \, dS$$

kde  $n_k$  je  $k$ -tá složka vektoru vnější normály k hranici oblasti  $V$ .

**Důsledek 4. (Greenova věta).** *Nechť  $S \subset \mathbb{R}^2$  je oblast a  $\partial S$  je uzavřená, po částech hladká dráha. Nechť  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  je vektorové pole spojitě diferencovatelné na  $S$  a spojitě na  $\partial S$ . Potom platí*

$$\int_{\partial S} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) d\mathbf{x},$$

přičemž křivka  $\partial S$  je uvažována jako kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček).

*Důkaz.* Křivka  $\varphi = \partial S$  parametrizovaná pomocí  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  obíhající proti směru hodinových ručiček má na tečný vektor v bodě  $\varphi(t) = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$  roven  $\boldsymbol{\tau}(t) = \dot{\varphi}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))^T$  a vektor vnější normály  $\mathbf{n}(t) = (\dot{x}_2(t), -\dot{x}_1(t))$ . Z definice tedy postupně platí

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} &= \int_a^b \mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \, dt = \int_a^b \mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot (\tau_1, \tau_2) \, dt = \int_a^b \mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot (-n_2, n_1) \, dt \\ &= \int_a^b (f_2(\varphi(t)) n_1 - f_1(\varphi(t)) n_2) \, dt = \int_S \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

kde v poslední rovnosti byla použita na oba členy Greenova formule. □

**Důsledek. (Greenova věta - formulace pro diferenciální formy)** *Nechť křivka  $\varphi$  je p.č.  $C^1$  jednoduchá uzavřená dráha v  $\mathbb{R}^2$  a diferenciální forma  $\omega = \omega_1(\mathbf{x})dx_1 + \omega_2(\mathbf{x})dx_2$  je spojitě diferencovatelná na vnitřku křivky  $\varphi$  (tj. třídy  $C_{int\varphi}^1$ ) a spojitá na uzávěru vnitřku křivky  $\varphi$  (tj. třídy  $C_{int\varphi}$ ). Je-li kladná orientace křivky  $\varphi$  daná proti směru hodinových ručiček, pak platí*

$$\int_{\varphi} \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 = \int_{int\varphi} \omega = \int_{int\varphi} \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \right) d\mathbf{x}$$

**Příklad.** Vypočítejme integrál

$$\int_{\varphi} (-x_1^2 x_2, x_1 x_2^2) \cdot d\mathbf{l},$$

kde dráha

$$\varphi = \left\{ (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \right\}$$

ohraničuje elipsu  $S$  s poloosami  $a, b$  a křivka  $\varphi$  dráhu obíhá proti směru hodinových ručiček. Podle definice (2.9) dráhu parametrizujeme s pomocí

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$



a tedy

$$\dot{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} (-x_1^2 x_2, x_1 x_2^2) \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^{2\pi} (-a^2 b \cos^2 t \sin t, ab^2 \cos t \sin^2 t) \cdot (-a \sin t, b \cos t) dt, \\ &= ab(a^2 + b^2) \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt = ab(a^2 + b^2) \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2 dt \\ &= ab(a^2 + b^2) \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{8} dt = \frac{1}{4} \pi ab(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Stejný výsledek však získáme rovněž pomocí Greenovy věty. Parametrizujeme vnitřek elipsy  $S$  jako

$$\mathbf{x}(\rho, \phi) = (\rho a \cos \phi, \rho b \sin \phi) \quad \rho \in [0, 1], \quad \phi \in [0, 2\pi],$$

přičemž Jacobián transformace je

$$\det \mathbf{J}_{\mathbf{x}}(\rho, \phi) = \det \begin{pmatrix} a \cos \phi & -a\rho \sin \phi \\ b \sin \phi & b\rho \cos \phi \end{pmatrix} = \rho ab.$$

Potom

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} (-x_1^2 x_2, x_1 x_2^2) \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \frac{\partial(-x_1^2 x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(-x_1 x_2^2)}{\partial x_2} dx = \int_S x_2^2 + x_1^2 dx \\ &= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \rho^2 (a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi) \rho ab \\ &= ab \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \left( a^2 \frac{1 + \cos(2\phi)}{2} + b^2 \frac{1 - \cos(2\phi)}{2} \right) d\phi \\ &= \frac{ab}{4} \int_0^{2\pi} \left( \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2} \cos(2\phi) \right) d\phi = \frac{1}{4} \pi ab(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

**Důsledek 5. (Gaussova-Ostrogradského věta)** Necht'  $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$  je vektorové pole,  $V \subset \mathbb{R}^3$  je oblast. Potom platí

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dx = \int_{\partial V} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S},$$

kde  $d\mathbf{S}$  směřuje ven z objemu  $V$ .

*Důkaz.* Podle Greenovy formule s volbou  $g(\mathbf{x}) = 1$  máme

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dx = \sum_{k=1}^3 \int_V \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\mathbf{x}) dx = \sum_{k=1}^3 \int_{\partial V} f_k(\mathbf{x}) n_k dS = \int_S \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}.$$

□

*Poznámka.* Výrazu  $\nabla \cdot \mathbf{f} = \operatorname{div} \mathbf{f}$  říkáme *divergence* (zřídlovost) vektorového pole  $\mathbf{f}$ .

**Příklad.** Vypočítejme plošný integrál 2. druhu

$$\int_S \mathbf{x} \cdot d\mathbf{S}$$

přes polokouli

$$S = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = R \wedge x_3 \geq 0 \}.$$

Nejprve si uvědomíme, že na podstavě polokoule je  $\mathbf{x} \cdot d\mathbf{S} = 0$ , takže stačí integrovat přes plášť. Na něm zavedeme parametrizaci

$$\mathbf{S}(\phi, \theta) = (R \cos \phi \cos \theta, R \sin \phi \cos \theta, R \sin \theta)^T$$

na množině  $M = (0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{2})$ . Vypočítáme opět

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \phi} &= (-R \sin \phi \cos \theta, R \cos \phi \cos \theta, 0)^T, \\ \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \theta} &= (-R \cos \phi \sin \theta, -R \sin \phi \sin \theta, R \cos \theta)^T, \end{aligned}$$

takže

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(\phi, \theta) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(\phi, \theta) = (R^2 \cos \phi \cos^2 \theta, R^2 \sin \phi \cos^2 \theta, R^2 \sin \theta \cos \theta). \quad (2.13)$$

Po dosazení do definičního vzorce dostaneme

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{x} \cdot d\mathbf{S} &= \int_M (R \cos \phi \cos \theta, R \sin \phi \cos \theta, R \sin \theta) \cdot (R^2 \cos \phi \cos^2 \theta, R^2 \sin \phi \cos^2 \theta, R^2 \sin \theta \cos \theta) d(u, v) \\ &= \dots = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta R^3 \cos \theta = 2\pi R^3 [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R^3. \end{aligned}$$

Mnohem jednodušší však bude výpočet pomocí Gaussovy věty. Vypočítáme

$$\int_S \mathbf{x} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{x} dx = \int_V (1 + 1 + 1) dx = 3 \int_V dx = 3 \cdot \frac{2}{3} \pi R^3,$$

protože  $V$  je polokoule o poloměru  $R$ , tj.

$$V = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| \leq R \wedge x_3 \geq 0 \}$$

a  $\frac{2}{3}\pi R^3$  je její objem. Oba výsledky vyšly se stejným znaménkem, což napovídá, že normálový vektor vypočtený pomocí (2.13) ukazuje ven z  $V$ . Tato vlastnost závisí jen na zvolené parametrizaci a je možné ji tedy ověřit v jediném bodě. Např. v bodě  $\phi = \theta = 0$  máme

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}(0, 0) = (R, 0, 0)^T$$

a normálový vektor má hodnotu

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(0, 0) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(0, 0) = (R^2, 0, 0),$$

což je skutečně vektor vnější normály.

---

## 3. Základní pojmy dynamiky kontinua

---

### 3.1 Kontinuum a materiálové těleso

*Dynamika kontinua* je podobor *mechaniky kontinua*, který se zabývá souvislostmi mezi pohybem (prouděním) a deformacemi materiálu, energií a silami, které na něj působí. Předmětem studia je *materiálové těleso*, které vyplňuje určitý objem  $V$  a je složeno z nekonečného množství *materiálových bodů*. Materiál považujeme za kontinuum, jestliže jeho stav a vlastnosti lze s dostatečnou přesností popsat pomocí funkcí času a prostorových souřadnic, jejichž definiční obor i obor hodnot tvoří kontinuum v matematickém smyslu. Tyto funkce reprezentují např. teplotu, tlak, rychlost, a další makroskopické fyzikální veličiny. „Dostatečná přesnost“ je závislá na zvoleném měřítku. Materiálové těleso tvořené plynem, kapalinou či homogenní deformovatelnou pevnou látkou lze považovat za kontinuum i v oblastech menších než 1mm. Na druhou stranu i na sypké materiály jako je písek nebo zrní lze pohlížet stejným způsobem, jestliže zkoumáme dostatečně velký objem (pytel). Metody dynamiky kontinua se však využívají i při studiu pohybu systémů, jako je dav chodců, doprava na dálnici, nebo i celý vesmír.

### 3.2 Referenční a aktuální konfigurace materiálového tělesa

Uvažujme afinní prostor  $(\mathbb{R}^3, \mathbf{o})$  a souřadnou soustavu s počátkem v bodě  $\mathbf{o}$ , který se vzhledem k pozorovateli nepohybuje. Pro jednoduchost a bez újmy na obecnosti volme standardní bázi prostoru

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0)^T, \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0)^T, \\ \mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1)^T \end{aligned}$$

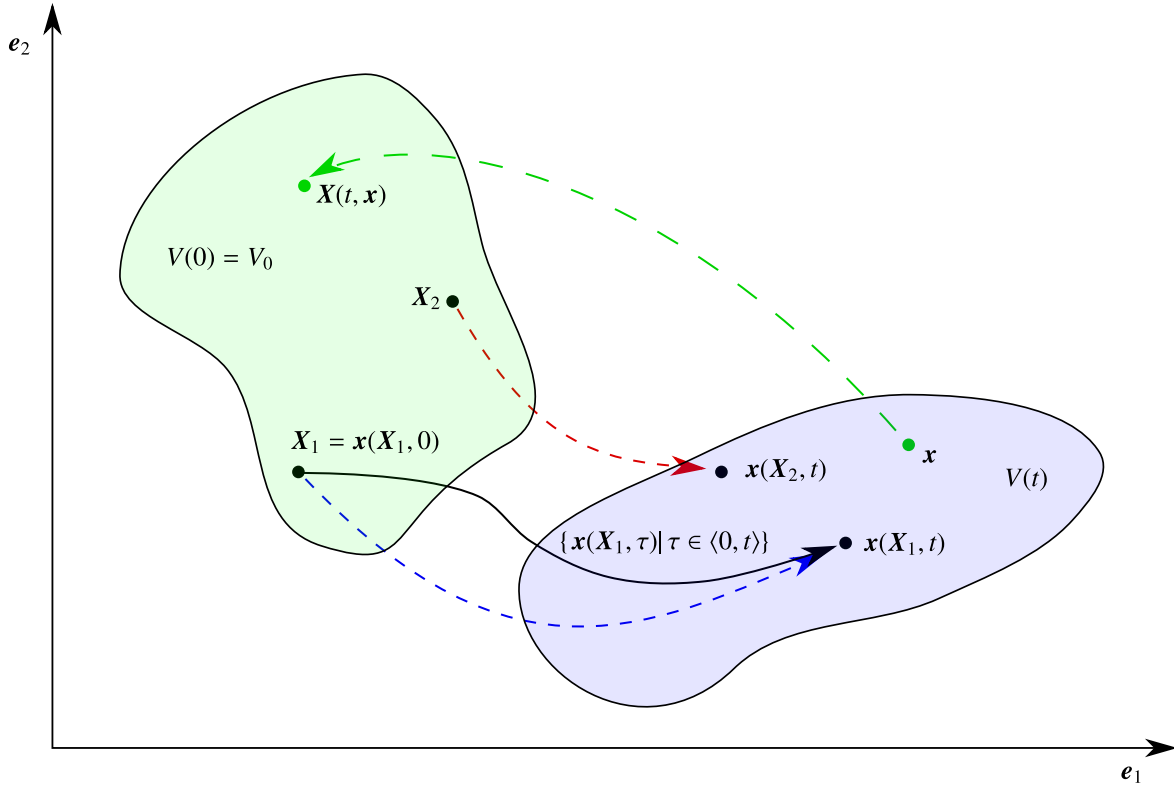
a počátek  $\mathbf{o} = \mathbf{0}$ , takže každý bod  $\mathbf{p} \in (\mathbb{R}^3, \mathbf{o})$  má souřadnice shodné se složkami vektoru  $\mathbf{p} - \mathbf{o} \in \mathbb{R}^3$ . Z matematického hlediska v dalším textu proto ztotožníme afinní prostor  $(\mathbb{R}^3, \mathbf{o})$ , jehož prvky jsou body, a vektorový prostor  $\mathbb{R}^3$ , který obsahuje vektory. Dále uvažujme časový interval  $\mathcal{J} = (0, T)$ .

Výchozím předmětem studia pro nás bude časová evoluce materiálového tělesa od času  $t = 0$  do času  $t = T$ . V čase  $t = 0$  se těleso nachází ve svém výchozím (*referenčním*) stavu a zaujímá objem  $V_0 \subset \mathbb{R}^3$  s hranicí  $\partial V_0$ . Každý bod  $\mathbf{X} \in V_0$ ,  $\mathbf{X} = (X, Y, Z)^T = (X_1, X_2, X_3)^T$  nazveme *materiálovým bodem*. Pro označení materiálových bodů budeme používat velká písmena. Vlivem fyzikálních procesů deformace (např. při působení vnějších sil), translace nebo rotace dochází ke změně tvaru a/nebo velikosti materiálového tělesa, které v čase  $t$  zaujímá objem  $V(t)$ , stejně jako ke změně polohy jednotlivých materiálových bodů. Tím se materiálové těleso dostane do nového, *aktuálního* stavu, který popisujeme pomocí prostorových souřadnic  $\mathbf{x} = (x, y, z)^T = (x_1, x_2, x_3)^T$  (viz Obr. 3.1). Naším cílem bude nalézt vztah mezi počátečním (referenčním) a aktuálním stavem materiálového tělesa.

Uvažujme materiálový bod  $\mathbf{X}$  a označme jako  $\mathbf{x}(t, \mathbf{X})$  jeho polohu v čase  $t$ . V čase  $t = 0$  platí  $\mathbf{x}(0, \mathbf{X}) = \mathbf{X}$ . Průběh funkce

$$\mathbf{x} : \mathcal{J} \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \tag{3.1}$$

pro pevně zvolené  $\mathbf{X} \in V_0$  si lze představit tak, že v čase  $t = 0$  nakreslíme na těleso v bodě  $\mathbf{X}$  křížek a v průběhu času budeme sledovat, kam se tento křížek pohne. Jestliže naše kontinuum je kapalina, můžeme do bodu  $\mathbf{X}$  umístit malou kuličku a sledovat, jak je unášena proudem.



Obrázek 3.1: Referenční a aktuální konfigurace materiálového tělesa.

Analogicky je možné definovat rychlost pevně zvoleného materiálového bodu  $X \in V_0$  jako časovou derivaci jeho polohy, tj.

$$\mathbf{v}(t, X) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t, X), \quad (3.2)$$

### 3.2.1 Přechod mezi referenčními a prostorovými souřadnicemi

Fyzikální vlastnosti materiálového tělesa zaručují, že dva materiálové body se nemohou nikdy sejít v jednom bodě prostoru, a zároveň jeden materiálový bod nemůže být na dvou místech současně, tj. zobrazení (3.1) je prosté:

$$\mathbf{x}(t, X_1) = \mathbf{x}(t, X_2) \iff X_1 = X_2.$$

Dále se žádné dva materiálové body nemohou k sobě nekonečně přiblížit ani od sebe nekonečně vzdálit, což znamená, že Jacobián

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.3)$$

Za těchto předpokladů platí věta o implicitních funkcích, která v každém časovém okamžiku  $t$  zaručuje existenci inverzního zobrazení

$$X(t, \cdot) : V(t) \rightarrow V_0,$$

kteřé pro každý bod z aktuální konfigurace  $\mathbf{x} \in V(t)$  určí materiálový bod  $X(t, \mathbf{x})$ , který se v bodě  $\mathbf{x}$  aktuálně nachází.

Rychlost materiálového bodu, který v čase  $t$  prochází pevně zvoleným bodem prostoru  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , je

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, X(t, \mathbf{x})). \quad (3.4)$$

Zjistili jsme tedy, že rychlost může být svázána vztahem (3.2) s pevně zvoleným materiálovým bodem  $\mathbf{X}$ , nebo vztahem (3.4) s pevně zvoleným bodem v prostoru  $\mathbf{x}$ . Totéž platí pro libovolnou jinou veličinu (např. hustota, tlak, teplota, koncentrace...). Jestliže se zajímáme o zákonitosti, na jejichž základě se mění fyzikální veličiny v materiálovém bodě  $\mathbf{X}$  (resp. v malém objemu  $dV$ , který ho obklopuje), jedná se o tzv. *Lagrangeův* přístup. Jestliže se naopak soustředíme na pevně zvolený bod v prostoru  $\mathbf{x}$ , používáme přístup *Eulerův*. Výsledky obou přístupů jsou totožné, i když matematický zápis stejných zákonitostí může mít formálně jiný tvar. Podrobně se oběma přístupům budeme věnovat v kapitole 4.

**Úloha 6.** V horizontálně položené trubce a poloměru  $R [L]$  je k horní stěně přilepena kulová bublina  $\mathbb{B}$  o poloměru  $\frac{R}{2}$ , která má v materiálových souřadnicích popis

$$X_1^2 + X_2^2 + \left(X_3 - \frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4}, \quad (3.5)$$

jenž v čase  $t = 0$  s splývá s popisem prostorovým ( $x_i(0) = X_i$ ,  $i \in \hat{3}$ ). Dále v trubce uvažujme konstantní laminární proudění vzduchu ve směru osy  $x_1$  s parabolickým rychlostním profilem  $\mathbf{v} [LT^{-1}]^3$  definovaným

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} R^2 - x_2^2 - x_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Rychlostní profil  $\mathbf{v}$  je idealizovaným profilem skutečného proudění v úzkém kanálu, kde je předpokládána nulová rychlost u stěn, více viz [cite něco]. V čase  $t = 0$  s začne být bublina unášena v rychlostním poli. Evoluci prostorových souřadnic každého materiálového bodu  $\mathbf{X} \in \mathbb{B}$  bubliny lze vyjádřit

$$\begin{aligned} x_1(t, \mathbf{X}) &= X_1 + t(R^2 - X_2^2 - X_3^2), \\ x_2(t, \mathbf{X}) &= X_2, \\ x_3(t, \mathbf{X}) &= X_3, \end{aligned} \quad (3.7)$$

čímž dostaneme Lagrangeův popis trajektorie každého bodu, který splňuje (3.5). Pro získání Eulerova popisu časové evoluce bubliny stačí v (3.7) přejít k prostorovým souřadnicím

$$\begin{aligned} X_1(t, \mathbf{x}) &= x_1 - t(R^2 - x_2^2 - x_3^2), \\ X_2(t, \mathbf{x}) &= x_2, \\ X_3(t, \mathbf{x}) &= x_3, \end{aligned} \quad (3.8)$$

a toto vyjádření dosadit do rovnice (3.5) definující počáteční tvar bubliny

$$\left(x_1 - t(R^2 - x_2^2 - x_3^2)\right)^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4}. \quad (3.9)$$

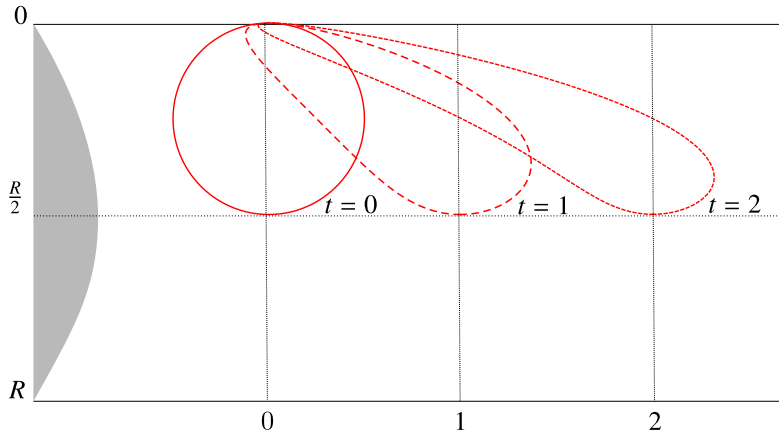
Vývoj tvaru bubliny je znázorněn na obr. (viz Obr. 3.2)

### 3.3 Deformační gradient

Změnu (deformaci) konfigurace materiálového bodu kontinua, který je popsán v materiálovém popisu souřadnicemi  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{X})$  popisuje tenzor  $\mathbf{F}$  definovaný jako

$$\mathbf{F}_{i,j} = \frac{\partial x^i}{\partial X^j}(t, \mathbf{X}), \quad (3.10)$$

kteřý se nazývá *deformačním gradientem*. Z hlediska teorie transformace proměnných v diferenciálních výrazech se jedná o Jacobiho tenzor transformace souřadnic od materiálových souřadnic  $\mathbf{X}$  k prostorovým souřadnicím  $\mathbf{x}$ . Jelikož předpokládáme regulárnost transformace mezi souřadnicemi  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{x}$ , existuje též inverzní tenzor  $\mathbf{F}^{-1}$ , který lze zapsat


 Obrázek 3.2: Vývoj tvaru bubliny  $z$  v čase (viz Úloha 6).

$$\mathbf{F}^{-1}_{i,j} = \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(t, \mathbf{x}), \quad (3.11)$$

a který vyjadřuje Jacobiho tenzor přechodu od souřadnic  $\mathbf{x}$  k  $\mathbf{X}$ .

Deformační gradient je výchozí nástroj pro matematický popis deformace (viz Kapitola 5).

### 3.4 Materiálová derivace

Uvažujme libovolnou veličinu  $w$ , jejíž hodnota v materiálovém bodě  $\mathbf{X}$  a čase  $T$  je rovna  $w(T, \mathbf{X})$ . V pevně zvoleném bodě  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  a v čase  $t$  je pak její hodnota  $W(t, \mathbf{x})$ . Kvůli korektnosti dalších úvah přitom až do konce kapitoly přistoupíme k označení času jako argumentu funkce  $w$  pomocí velkého písmene  $T$  a času jako argumentu funkce  $W$  pomocí malého písmene  $t$ . Přírůstek veličiny  $w$  za jednotku času v pevně zvoleném materiálovém bodě  $\mathbf{X}$  (v bodě, který jsme si na tělese označili křížkem a který se v průběhu času pohybuje) je roven parciální derivaci funkce  $w$  podle času, tj.

$$\frac{\partial w}{\partial T}(T, \mathbf{X}).$$

Podobně přírůstek této veličiny za jednotku času v pevně zvoleném bodě v prostoru  $\mathbf{x}$ , který se nehýbe, je roven parciální derivaci funkce  $W$  podle času, tj.

$$\frac{\partial W}{\partial t}(t, \mathbf{x}).$$

Zcela zřejmě se jedná o dvě obecně různé hodnoty. Ukažme si nyní, jak spolu souvisejí.

Zvolme si pevně materiálový bod  $\mathbf{X}$ . Jeho poloha v čase  $T$  je  $\mathbf{x}(T, \mathbf{X})$ , a proto platí

$$w(T, \mathbf{X}) = W(t(T, \mathbf{X}), \mathbf{x}(t(T, \mathbf{X}))) = W(\Phi(T, \mathbf{X})),$$

kde vnitřní funkce  $\Phi : \mathcal{J} \times V_0 \rightarrow \mathcal{J} \times \mathbb{R}^3$  má tvar

$$\Phi(T, \mathbf{X}) = (t(T, \mathbf{X}), x_1(T, \mathbf{X}), x_2(T, \mathbf{X}), x_3(T, \mathbf{X})) = (T, x_1(T, \mathbf{X}), x_2(T, \mathbf{X}), x_3(T, \mathbf{X})).$$

Je vidět, že první složkou zobrazení  $\Phi$  je funkce  $t$ , jejíž hodnota je z předpokladu nezávislosti plynutí času na volbě souřadnic rovna

$$t(T, \mathbf{X}) = T.$$

Označení složek argumentu  $\Phi$  a složek samotného  $\Phi$  navzájem různými symboly nám však umožní korektně použít pravidlo o derivaci složené funkce. Platí

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial T}(T, \mathbf{X}) &= \sum_{k=1}^4 \frac{\partial W}{\partial \Phi_k}(\Phi(T, \mathbf{X})) \frac{\partial \Phi_k}{\partial T}(T, \mathbf{X}) \\
&= \frac{\partial W}{\partial t}(t(T, \mathbf{X}), \mathbf{x}(T, \mathbf{X})) \frac{\partial t}{\partial T}(T, \mathbf{X}) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial W}{\partial x_k}(t(T, \mathbf{X}), \mathbf{x}(T, \mathbf{X})) v_k(T, \mathbf{X}) \\
&= \frac{\partial W}{\partial t}(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})) + \mathbf{v}(T, \mathbf{X}) \cdot \nabla W(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})) \\
&= \frac{\partial W}{\partial t}(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})) + \mathbf{V}(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})) \cdot \nabla W(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Po poslední úpravě máme všechny funkce na pravé straně (3.12) zapsány ve stejném bodě  $(t, \mathbf{x}) = (T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X}))$ . Proto lze (3.12) ještě přepsat do operátorového tvaru

$$\frac{\partial w}{\partial T}(T, \mathbf{X}) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) W \Big|_{T, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})} =: \frac{DW}{Dt}(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})), \tag{3.13}$$

kde poslední vztah definuje operátor tzv. *materiálové derivace*

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla.$$

Pro vektorové veličiny operátor materiálové derivace definujeme po složkách. Pro funkce

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= (w_1, w_2, w_3) : \mathcal{J} \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}^3, \\
\mathbf{W} &= (W_1, W_2, W_3) : \mathcal{J} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

definujeme

$$\left( \frac{DW}{Dt} \right)_i = \frac{DW_i}{Dt}$$

a jestliže

$$\mathbf{w}(T, \mathbf{X}) = \mathbf{W}(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})),$$

tak potom

$$\frac{\partial w}{\partial T}(T, \mathbf{X}) = \frac{DW}{Dt}(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})).$$

### 3.5 Zrychlení materiálového bodu

Zrychlení materiálového bodu  $\mathbf{a}$  [ $LT^{-2}$ ] budeme stejně jako v mechanice hmotných bodů definovat jako časovou derivaci rychlosti. V materiálovém popisu je proto zrychlení dáno vztahem

$$\mathbf{a}(T, \mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial T}(T, \mathbf{X}) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial T^2}(T, \mathbf{X}). \tag{3.14}$$

S využitím materiálové derivace definované vztahem (3.13) pak lze psát

$$\mathbf{a}(T, \mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial T}(T, \mathbf{X}) = \frac{D\mathbf{V}}{Dt}(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})).$$

Po aplikaci inverzní transformace  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ ,  $T = T(t, \mathbf{x}) = t$  dostáváme

$$\mathbf{a}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x})) = \frac{D\mathbf{V}}{Dt}(t, \mathbf{x}). \tag{3.15}$$

Funkce  $\frac{DV}{Dt}$  podle rovnosti (3.15) představuje zrychlení materiálového bodu  $\mathbf{X}$ , který prochází místem  $\mathbf{x}$  v čase  $t$ . To je však definice funkce  $A$ , která vrací hodnotu zrychlení v prostorových souřadnicích  $t, \mathbf{x}$ . Platí tedy

$$A(t, \mathbf{x}) = \frac{DV}{Dt}(t, \mathbf{x}).$$

*Poznámka.* Tento výsledek lze formulovat i obecně. Jestliže veličina  $\tilde{\mathbf{w}}$  popsána v materiálových souřadnicích funkcí  $\tilde{\mathbf{w}}(T, \mathbf{X})$  souvisí s veličinou  $\mathbf{w}$  vztahem

$$\tilde{\mathbf{w}}(T, \mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial T}(T, \mathbf{X}),$$

potom je tatáž veličina popsána v prostorových souřadnicích funkcí

$$\tilde{\mathbf{W}}(t, \mathbf{x}) = \frac{D\mathbf{W}}{Dt}(t, \mathbf{x}).$$



---

# 4. Rovnice dynamiky kontinua

---

Matematický popis dynamiky kontinua, tj. popis pohybu a deformace daného materiálového tělesa v závislosti na působení vnějších a vnitřních sil, lze jednoznačně odvodit ze zákonů zachování v klasické mechanice, tj.

1. zákona zachování hmoty (Lomonosov 1758, Lavoisier 1774),
2. zákona zachování hybnosti (přímý důsledek tří Newtonových pohybových zákonů)
3. zákona zachování energie (první zákon termodynamiky),

a dále z fyzikálních vlastností materiálu.

V této kapitole popíšeme zákony zachování matematickými rovnicemi, které lze odvodit několika různými způsoby a získat tak formálně rozdílné zápisy stejného faktu. Není proto překvapením, že každou formu zápisu zákona zachování je posléze možné převést na libovolnou jinou jen pomocí matematických úprav. Vlastnosti materiálu, které jsou důležité pro popis dynamiky materiálového tělesa, mají rovněž svůj matematický zápis ve formě tzv. *konstitutivních vztahů*, jak uvidíme v části 4.2.2.

Ke konci kapitoly v části 4.5 se věnujeme odvození analytických řešení výsledných soustav rovnic. Tato řešení lze získat jen ve speciálních případech a s aplikací omezujících předpokladů. Přesto jsou užitečná a ve výkladu se použije řada postupů z matematické analýzy, teorie diferenciálních rovnic, Fourierových řad atd.

## 4.1 Zákon zachování hmoty

Jako první odvodíme matematickou reprezentaci zákona zachování hmoty. Ukážeme si zde několik přístupů, s jejichž pomocí lze výsledek získat, a zároveň se přesvědčíme, že všechny vedou k témuž cíli.

### 4.1.1 Eulerův přístup s použitím konečného objemu

Jak jsme již nastínili v části 3.2.1, *Eulerův přístup* k popisu dynamiky kontinua spočívá v popisu zákonitostí, které mají vliv na vývoj fyzikálních veličin v pevně daném bodě prostoru  $\mathbf{x}$ , resp. v pevně daném (nehybném) objemu  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$  s hranicí  $\partial\mathcal{V}$  (obr. 4.1). Zákon zachování hmoty v objemu  $\mathcal{V}$  lze formulovat tak, že

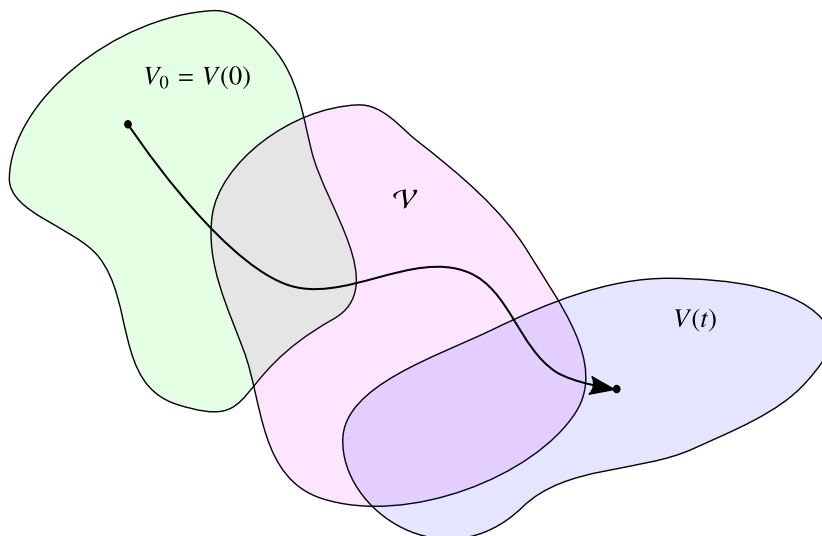
úbytek hmoty v objemu  $\mathcal{V}$  je roven toku hmoty přes hranici  $\partial\mathcal{V}$  ve směru ven z  $\mathcal{V}$ .

Jestliže  $\varrho(t, \mathbf{x})$  [ $ML^{-3}$ ] je veličina popisující hustotu materiálu v prostorovém bodě  $\mathbf{x}$  a v čase  $t$ , potom celková hmota  $M$  [ $M$ ] obsažená v objemu  $\mathcal{V}$  je

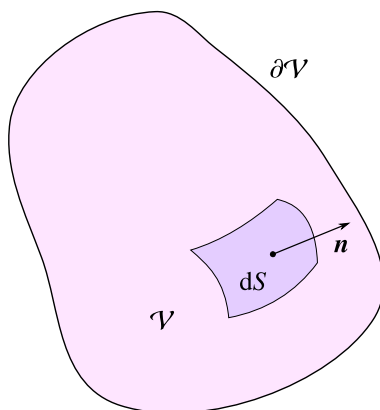
$$M(t) = \int_{\mathcal{V}} \varrho(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

a její *úbytek* za jednotku času je roven

$$-\frac{dM}{dt}(t). \tag{4.1}$$



Obrázek 4.1: Eulerův přístup: pevně zvolený objem  $\mathcal{V}$  a materiálové těleso  $V(t)$  pohybující se v čase.



Obrázek 4.2: Eulerův přístup: pevně zvolený objem  $\mathcal{V}$  s hranicí  $\partial\mathcal{V}$ , ploška  $dS$  s vnější normálou  $\mathbf{n}$ .

Nyní uvažujme nekonečně malou plošku  $dS \subset \partial\mathcal{V}$  s normálou  $\mathbf{n}$ , která směřuje ven z objemu  $\mathcal{V}$  (obr. 4.2). Pro všechny body  $\mathbf{x} \in dS$  uvažujeme stejnou rychlost proudění  $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ . Složka rychlosti ve směru kolmém na  $dS$  je potom  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  a hmota, která projde ploškou  $dS$  za jednotku času, je rovna

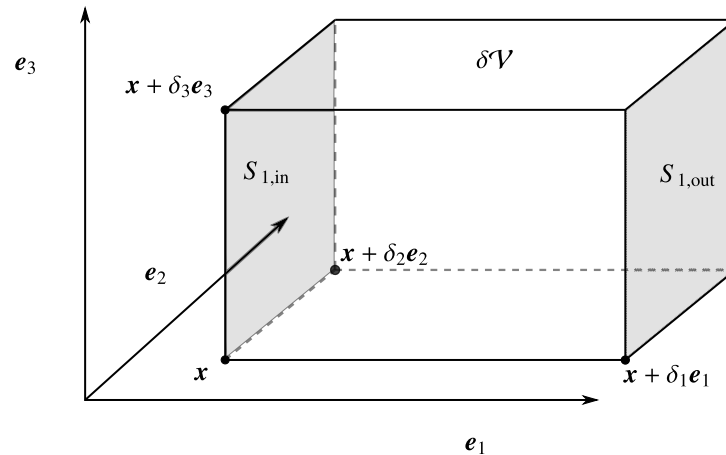
$$\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Celkový tok hmoty ven z objemu  $\mathcal{V}$  přes hranici  $\partial\mathcal{V}$  za jednotku času je roven plošnému integrálu II. druhu

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.2)$$

Matematické vyjádření zákona zachování hmoty tedy dává do rovnosti vztahy (4.1) a (4.2) a vede k rovnici kontinuity v integrálním konzervativním tvaru

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathbf{x} + \int_{\partial\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (4.3)$$

Obrázek 4.3: Eulerův přístup: malý objem  $\delta\mathcal{V}$ .

Tuto rovnici lze dále upravit nejprve použitím Gaussovy věty (věta 5, kapitola 2) a věty o derivaci integrálu podle parametru (věta 2) postupně na

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \varrho dx + \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\varrho \mathbf{V}) dx &= 0, \\ \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{V}) \right] dx &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Když uvážíme, že objem  $\mathcal{V}$  je volen zcela libovolně, může nulovost integrálu (4.4) zaručit pouze nulovost integrandu v celé oblasti, kde se nachází materiálové těleso, tj.

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{V}) = 0. \quad (4.5)$$

Rovnice (4.5) je parciální diferenciální rovnice a nazývá se *rovnicí kontinuity v konzervativním* (diferenciálním) tvaru.

*Poznámka 7.* Rovnice v integrálním tvaru (4.3) je ekvivalentní s rovnicí (4.5), ovšem pouze v případě, že funkce  $\varrho$  a  $\varrho \mathbf{V}$  splňují podmínky diferencovatelnosti tak, aby výraz na levé straně (4.5) vůbec dával smysl. Například v proudění tekutin mohou nastat nespojitosti v rychlosti, tlaku atd., které mají charakter rázových vln. Jde o situace, které se v realitě běžně vyskytují a nelze je tedy pominout předpokladem typu „nechť je všechno spojitě a všechny derivace existují“. Pro libovolné soustavy parciálních diferenciálních rovnic (ať už byly odvozeny jakkoliv) však lze oslabit požadavky na regularitu (hladkost, diferencovatelnost) jejich řešení přechodem k tzv. *slabé formulaci*.

#### 4.1.2 Eulerův přístup s použitím infinitezimálního objemu

Rovnici (4.5) lze odvodit přímo v diferenciálním tvaru, jestliže uvažujeme místo konečného objemu  $\mathcal{V}$  malý krychlový objem  $\delta\mathcal{V}$  (obr. 4.3). Souřadnice jeho dvou protilehlých vrcholů nechť jsou  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  a  $\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta} = (x_1 + \delta_1, x_2 + \delta_2, x_3 + \delta_3)^T$ . Předpokládejme rovněž spojitou diferencovatelnost veličin  $\varrho$  a  $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)^T$  alespoň do 1. řádu<sup>1</sup>. Potom celková hmota v objemu  $\delta\mathcal{V}$  je podle věty o

<sup>1</sup>Funkce  $\varrho(t, \mathbf{x})$  představuje hustotu jako funkci prostorových souřadnic. Hustotu v materiálových souřadnicích označíme  $\rho(t, \mathbf{X})$ .

střední hodnotě rovna

$$\delta M(t) = \int_{\delta \mathcal{V}} \varrho(t, \tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{\mathbf{x}} = \varrho(t, \xi_\delta) \delta_1 \delta_2 \delta_3 \quad (4.6)$$

kde  $\xi_\delta \in \delta \mathcal{V}$  a  $\delta_1 \delta_2 \delta_3$  je objemová míra množiny  $\delta \mathcal{V}$ . Množství hmoty, které do objemu vstoupí za jednotku času ve směru osy  $x_1$  levou stěnou  $S_{1,\text{in}}$  o ploše  $\delta_2 \delta_3$ , je rovno (opět podle věty o střední hodnotě)

$$\int_{S_{1,\text{in}}} \varrho(t, \tilde{\mathbf{x}}) V_1(t, \tilde{\mathbf{x}}) dS = \varrho(t, \xi_{1,\text{in}}) V_1(t, \xi_{1,\text{in}}) \delta_2 \delta_3$$

kde  $\xi_{1,\text{in}} \in S_{1,\text{in}}$  a množství hmoty, které vystoupí ve směru osy  $x_1$  pravou stranou  $S_{1,\text{out}}$ , je rovno

$$\int_{S_{1,\text{out}}} \varrho(t, \tilde{\mathbf{x}}) V_1(t, \tilde{\mathbf{x}}) dS = \varrho(t, \xi_{1,\text{out}}) V_1(t, \xi_{1,\text{out}}) \delta_2 \delta_3$$

kde  $\xi_{1,\text{out}} \in S_{1,\text{out}}$ . Celkové množství hmoty za jednotku času, které v objemu  $\delta \mathcal{V}$  ubude v důsledku proudění skrze stěny kolmé na osu  $x_1$ , je tedy

$$\left[ \varrho(t, \xi_{1,\text{out}}) V_1(t, \xi_{1,\text{out}}) - \varrho(t, \xi_{1,\text{in}}) V_1(t, \xi_{1,\text{in}}) \right] \delta_2 \delta_3. \quad (4.7)$$

Analogicky pro směr  $x_2$  dostaneme úbytek hmoty za jednotku času skrze horní a spodní stěnu

$$\left[ \varrho(t, \xi_{2,\text{out}}) V_2(t, \xi_{2,\text{out}}) - \varrho(t, \xi_{2,\text{in}}) V_2(t, \xi_{2,\text{in}}) \right] \delta_1 \delta_3. \quad (4.8)$$

a pro směr  $x_3$  úbytek hmoty za jednotku času skrze přední a zadní stěnu

$$\left[ \varrho(t, \xi_{3,\text{out}}) V_3(t, \xi_{3,\text{out}}) - \varrho(t, \xi_{3,\text{in}}) V_3(t, \xi_{3,\text{in}}) \right] \delta_1 \delta_2. \quad (4.9)$$

Celkový úbytek hmoty  $-\frac{d}{dt}(\delta M(t))$  v objemu  $\delta \mathcal{V}$  je tedy roven součtu úbytků (4.7)–(4.9), což lze po vydělení součinem  $\delta_1 \delta_2 \delta_3$  vyjádřit rovnicí

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(t, \xi_\delta) + \sum_{\ell=1}^3 \frac{\varrho(t, \xi_{\ell,\text{out}}) V_\ell(t, \xi_{\ell,\text{out}}) - \varrho(t, \xi_{\ell,\text{in}}) V_\ell(t, \xi_{\ell,\text{in}})}{\delta_\ell} = 0. \quad (4.10)$$

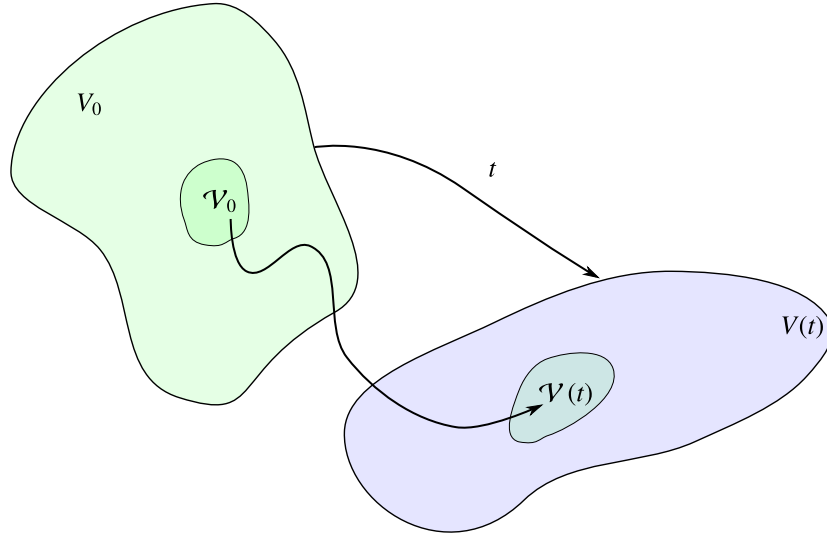
Limitním přechodem  $\delta \rightarrow 0$  se z konečného objemu  $\delta \mathcal{V}$  stane infinitezimální objem  $d\mathcal{V}$ , bod  $\xi_\delta$  přejde do bodu  $\mathbf{x}$  a limity zlomků na pravé straně (4.10) přejdou v hodnoty parciálních derivací  $\frac{\partial}{\partial x_\ell}(\varrho V_\ell)$  v bodě  $\mathbf{x}$ . To lze ověřit výpočtem pomocí parciálních (částečných) limit např. pro  $\ell = 1$ :

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varrho(t, \xi_{1,\text{out}}) V_1(t, \xi_{1,\text{out}}) - \varrho(t, \xi_{1,\text{in}}) V_1(t, \xi_{1,\text{in}})}{\delta_1} \\ &= \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \lim_{\delta_3 \rightarrow 0} \frac{\varrho(t, \xi_{1,\text{out}}) V_1(t, \xi_{1,\text{out}}) - \varrho(t, \xi_{1,\text{in}}) V_1(t, \xi_{1,\text{in}})}{\delta_1} \\ &= \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \frac{\varrho(t, \mathbf{x} + \delta_1 \mathbf{e}_1) V_1(t, \mathbf{x} + \delta_1 \mathbf{e}_1) - \varrho(t, \mathbf{x}) V_1(t, \mathbf{x})}{\delta_1} = \frac{\partial(\varrho V_1)}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Bod  $\xi_{1,\text{in}} \in S_{1,\text{in}}$  totiž přejde v limitě  $\delta_2 \rightarrow 0, \delta_3 \rightarrow 0$  do bodu  $\mathbf{x}$  a bod  $\xi_{1,\text{out}} \in S_{1,\text{out}}$  přejde do bodu  $\mathbf{x} + \delta_1 \mathbf{e}_1$ . Rovnost (4.10) má tedy v limitě tvar

$$-\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial(\varrho V_\ell)}{\partial x_\ell} = \nabla \cdot (\varrho \mathbf{V}),$$

což je rovnice kontinuity (4.5).



Obrázek 4.4: Lagrangeův přístup: Materiálové těleso  $V(t)$  a jeho vývoj v čase. V rámci  $V(t)$  je zvolen objem  $\mathcal{V}(t)$ , který se pohybuje spolu s materiálovým tělesem.

### 4.1.3 Lagrangeův přístup s použitím konečného objemu

Nyní přistoupíme k odvození rovnice kontinuity pomocí *Lagrangeova přístupu*, který sleduje vývoj pevně zvoleného materiálového bodu, resp. množiny materiálových bodů  $\mathcal{V}_0 \subset V_0$  (obr. 4.4). Celková hmota v tomto objemu je

$$M = \int_{\mathcal{V}_0} \rho(0, \mathbf{X}) d\mathbf{X} = \int_{\mathcal{V}_0} \varrho(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

V průběhu času množina materiálových bodů s touto (stále stejnou) hmotou  $M$  změní svůj tvar i velikost, takže zároveň platí

$$M = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.11)$$

pro každé  $t \in \mathcal{J}$ . Oblast, přes kterou probíhá integrál v (4.11), se v čase mění, a platí pro ní obecně  $\mathcal{V}(t) \subset V(t)$  (viz část 3.2). Přejdem od prostorových souřadnic  $\mathbf{x}$  k materiálovým souřadnicím  $\mathbf{X}$  však dostaneme integrál přes časově neměnný objem  $\mathcal{V}_0$ :

$$M = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}_0} \varrho(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})) \left| \det \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right| d\mathbf{X} = \int_{\mathcal{V}_0} \rho(t, \mathbf{X}) |\det \mathbf{F}| d\mathbf{X}, \quad (4.12)$$

přičemž Jacobián transformace  $\det \mathbf{F} = \det \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right)$  je z předpokladu (3.3) nenulový a má stejné znaménko pro všechna  $\mathbf{X} \in V_0$ . Lze tedy odstranit absolutní hodnotu a platí

$$\pm M = \int_{\mathcal{V}_0} \rho(t, \mathbf{X}) \det \mathbf{F} d\mathbf{X}.$$

Derivací této rovnosti podle času dostaneme *rovnici kontinuity v nekonzervativním integrálním tvaru*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_0} \rho(t, \mathbf{X}) \det \mathbf{F} d\mathbf{X} = 0. \quad (4.13)$$

Podobně jako v části 4.1.1 můžeme odvodit příslušný diferenciální tvar této rovnice. Záměnou integrálu a časové derivace podle věty 2 a uvážením, že objem  $\mathcal{V}_0$  byl volen zcela libovolně, dojdeme k rovnosti

$$\frac{\partial(\rho \det \mathbf{F})}{\partial t} = 0, \quad (4.14)$$

což je rovnice kontinuity v nekonzervativním (diferenciálním) tvaru vyjádřená v materiálových souřadnicích.

Ukažme si, že rovnice (4.14) je ekvivalentní s rovnicí (4.5) odvozenou v částech 4.1.1 a 4.1.2. Provedeme časovou derivaci součinu a obdržíme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \det \mathbf{F} + \rho \frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial t} = 0. \quad (4.15)$$

Nyní využijeme vztah

$$\frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial t} = \det \mathbf{F} \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad (4.16)$$

který pro přehlednost dokážeme až na konci sekce. Po vydělení nenulovým  $\det \mathbf{F}$  získáme rovnost

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

a nakonec uplatníme definici materiálové derivace (3.13), čímž rovnice přejde na

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (4.17)$$

což je rovnice kontinuity v nekonzervativním (diferenciálním) tvaru vyjádřená v prostorových souřadnicích. Nyní již lze snadno získat vztah (4.5), když pouze rozepíšeme materiálovou derivaci

$$\frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0.$$

Nakonec dokážeme vztah 4.16. Důkaz spočívá v dosazení do definice determinantu a vhodných úpravách. Není tedy příliš přínosný pro náš výklad. Přesto hravému čtenáři nabízíme dvě jeho varianty. První je exaktní, hojně využívaný zkrácený zápis součtu a součinu. Druhá varianta součty i součiny rozepisuje a konečnou úpravu pouze naznačuje.

*Důkaz.* Za předpokladu dostatečné diferencovatelnosti funkce  $\mathbf{x}(t, \mathbf{X})$  lze vyjít z definice determinantu a (3.10)

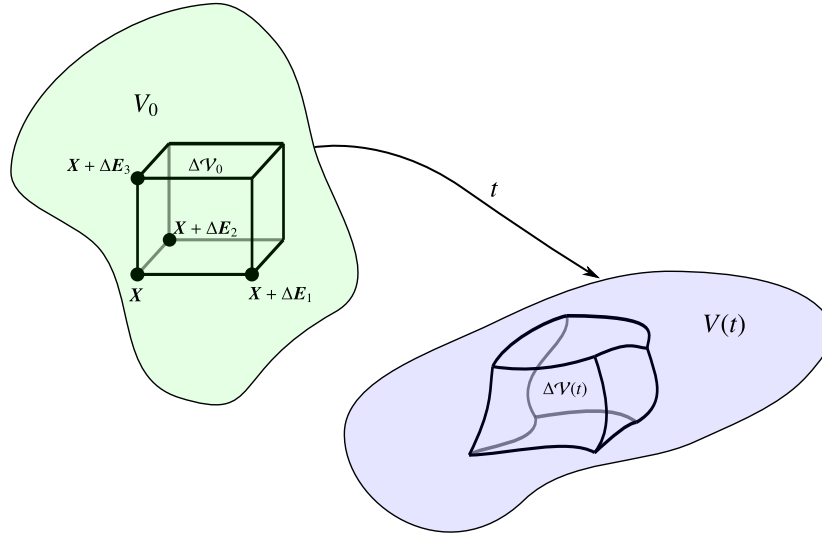
$$\det \mathbf{F} = \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \prod_{\ell=1}^3 \frac{\partial x_{\ell}}{\partial X_{\pi(\ell)}}$$

a upravit s využitím záměny parciálních derivací  $\partial/\partial t$  a  $\partial/\partial X_{\pi(i)}$

$$\frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial t} = \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \prod_{\ell=1}^3 \frac{\partial x_{\ell}}{\partial X_{\pi(\ell)}} = \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial X_{\pi(i)}} \prod_{\ell=1, \ell \neq i}^3 \frac{\partial x_{\ell}}{\partial X_{\pi(\ell)}}.$$

Nyní uvážíme, že pro každé  $i \in \{1, 2, 3\}$  platí dle pravidla pro derivování složené funkce

$$\frac{\partial v_i(t, \mathbf{X})}{\partial X_{\pi(i)}} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial V_i(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X}))}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_{\pi(i)}}(t, \mathbf{X}),$$



Obrázek 4.5: Lagrangeův přístup: V rámci materiálového tělesa  $V_0$  je v čase  $t = 0$  zvolena malá krychlička  $\Delta V_0$ , která se v čase deformuje spolu s tělesem.

takže po dosazení získáme

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial t} &= \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{k=1}^3 \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_{\pi(i)}} \right) \prod_{\ell=1, \ell \neq i}^3 \frac{\partial x_{\ell}}{\partial X_{\pi(\ell)}}, \\
 &= \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_{\pi(i)}} + \sum_{k=1, k \neq i}^3 \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_{\pi(i)}} \right) \prod_{\ell=1, \ell \neq i}^3 \frac{\partial x_{\ell}}{\partial X_{\pi(\ell)}} \\
 &= \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_{\pi(i)}} \prod_{\ell=1, \ell \neq i}^3 \frac{\partial x_{\ell}}{\partial X_{\pi(\ell)}} + \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1, k \neq i}^3 \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_{\pi(i)}} \prod_{\ell=1, \ell \neq i}^3 \frac{\partial x_{\ell}}{\partial X_{\pi(\ell)}} \\
 &= \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V_i}{\partial x_i}}_{=\nabla \cdot \mathbf{V}} \underbrace{\sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \prod_{\ell=1}^3 \frac{\partial x_{\ell}}{\partial X_{\pi(\ell)}}}_{=\det \mathbf{F}} + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1, k \neq i}^3 \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \underbrace{\sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \frac{\partial x_k}{\partial X_{\pi(i)}} \prod_{\ell=1, \ell \neq i}^3 \frac{\partial x_{\ell}}{\partial X_{\pi(\ell)}}}_{=0}.
 \end{aligned}$$

Poslední výraz je roven nule, neboť pro každou permutaci  $\pi$  existuje v sumě ještě permutace  $\tilde{\pi} = \pi \circ \tau_{ik}$ , pro niž platí<sup>2</sup>

$$\operatorname{sgn} \tilde{\pi} \frac{\partial x_k}{\partial X_{\tilde{\pi}(i)}} \prod_{\ell=1, \ell \neq i}^3 \frac{\partial x_{\ell}}{\partial X_{\tilde{\pi}(\ell)}} = -\operatorname{sgn} \pi \frac{\partial x_k}{\partial X_{\pi(i)}} \prod_{\ell=1, \ell \neq i}^3 \frac{\partial x_{\ell}}{\partial X_{\pi(\ell)}}.$$

□

#### 4.1.4 Lagrangeův přístup s použitím infinitesimálního objemu

Nakonec se pokusíme odvodit rovnici kontinuity pomocí malého objemu  $\Delta V$ , který se deformuje a pohybuje spolu s materiálovým tělesem. Uvažujme v čase  $t = 0$  krychličku  $\Delta V_0 \subset V_0$  (obr. 4.5), která má protilehlé vrcholy se souřadnicemi  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  a  $\mathbf{X} + \Delta = (X_1 + \Delta, X_2 + \Delta, X_3 + \Delta)$ . Hmotnost materiálu v této krychličce je podle věty o střední hodnotě rovna

$$\Delta m = \int_{\Delta V_0} \rho(0, \tilde{\mathbf{X}}) d\tilde{\mathbf{X}} = \Delta^3 \rho(0, \Xi_{\Delta})$$

<sup>2</sup> $\tau_{ik}$  je transpozice, tj. permutace, pro niž platí  $\tau_{ik}(i) = k$ ,  $\tau_{ik}(k) = i$  a  $\tau_{ik}(\ell) = \ell$  pro  $\ell \notin \{i, k\}$ .

kde  $\Xi_\Delta \in \Delta\mathcal{V}_0$ . V čase  $t > 0$  se tato krychlička posune a deformuje na útvar  $\Delta\mathcal{V}(t)$ . Rozvineme-li podle Taylorova vzorce

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{X} + \mathbf{H}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}(t, \mathbf{X}) \mathbf{H} + \mathbf{R}(\mathbf{H}),$$

kde

$$\lim_{\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{R}(\mathbf{H})}{\|\mathbf{H}\|} = \mathbf{0}, \quad (4.18)$$

můžeme vyjádřit

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{V}(t) &= \left\{ \mathbf{x}(t, \mathbf{x} + \mathbf{H}) \mid \mathbf{H} \in [0, \Delta]^3 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}(t, \mathbf{X}) \mathbf{H} + \mathbf{R}(\mathbf{H}) \mid \mathbf{H} \in [0, \Delta]^3 \right\} \\ &= \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}(t, \mathbf{X}) \mathbf{H} + \mathbf{R}(\mathbf{H}) \mid \mathbf{H} \in [0, \Delta]^3 \right\} + \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) \\ &= \left\{ H_1 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1}(t, \mathbf{X}) + H_2 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_2}(t, \mathbf{X}) + H_3 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_3}(t, \mathbf{X}) + \mathbf{R}(\mathbf{H}) \mid \mathbf{H} \in [0, \Delta]^3 \right\} + \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) \\ &= \left\{ y_1 \Delta \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1}(t, \mathbf{X}) + y_2 \Delta \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_2}(t, \mathbf{X}) + y_3 \Delta \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_3}(t, \mathbf{X}) + \mathbf{R}(\Delta \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in [0, 1]^3 \right\} + \mathbf{x}(t, \mathbf{X}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

To znamená, že body z  $\Delta\mathcal{V}(t)$  tvoří až na zbytek  $\mathbf{R}(\Delta \mathbf{y})$  rovnoběžnostěn o stranách

$$\mathbf{a}(t; \Delta) = \Delta \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1}(t, \mathbf{X}), \quad \mathbf{b}(t; \Delta) = \Delta \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_2}(t, \mathbf{X}), \quad \mathbf{c}(t; \Delta) = \Delta \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_3}(t, \mathbf{X}). \quad (4.20)$$

Pro dostatečně malé  $\Delta$  díky (4.18) zjistíme (podrobně viz obr. 4.6), že existují navzájem podobné rovnoběžnostěny  $\Delta\mathcal{V}(t)_{\text{ext}}$ ,  $\Delta\mathcal{V}(t)_{\text{int}}$  o stranách

$$\alpha \mathbf{a}, \alpha \mathbf{b}, \alpha \mathbf{c}; \quad \alpha = 1 + o(\Delta), \text{ resp.} \quad (4.21)$$

$$\beta \mathbf{a}, \beta \mathbf{b}, \beta \mathbf{c}; \quad \beta = 1 - o(\Delta), \quad (4.22)$$

tak, že  $\Delta\mathcal{V}(t)_{\text{int}} \subset \Delta\mathcal{V}(t) \subset \Delta\mathcal{V}(t)_{\text{ext}}$ . Přitom  $o(\Delta)$ , splňuje

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} o(\Delta) = 0. \quad (4.23)$$

Pro objem útvaru  $|\Delta\mathcal{V}(t)|$  tedy platí

$$|\Delta\mathcal{V}(t)_{\text{int}}| \leq |\Delta\mathcal{V}(t)| \leq |\Delta\mathcal{V}(t)_{\text{ext}}|.$$

Po dosazení do vzorce pro výpočet objemu rovnoběžnostěnu (viz poznámka 8) dostáváme

$$\beta^3 \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right| \leq |\Delta\mathcal{V}(t)| \leq \alpha^3 \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right|, \quad (4.24)$$

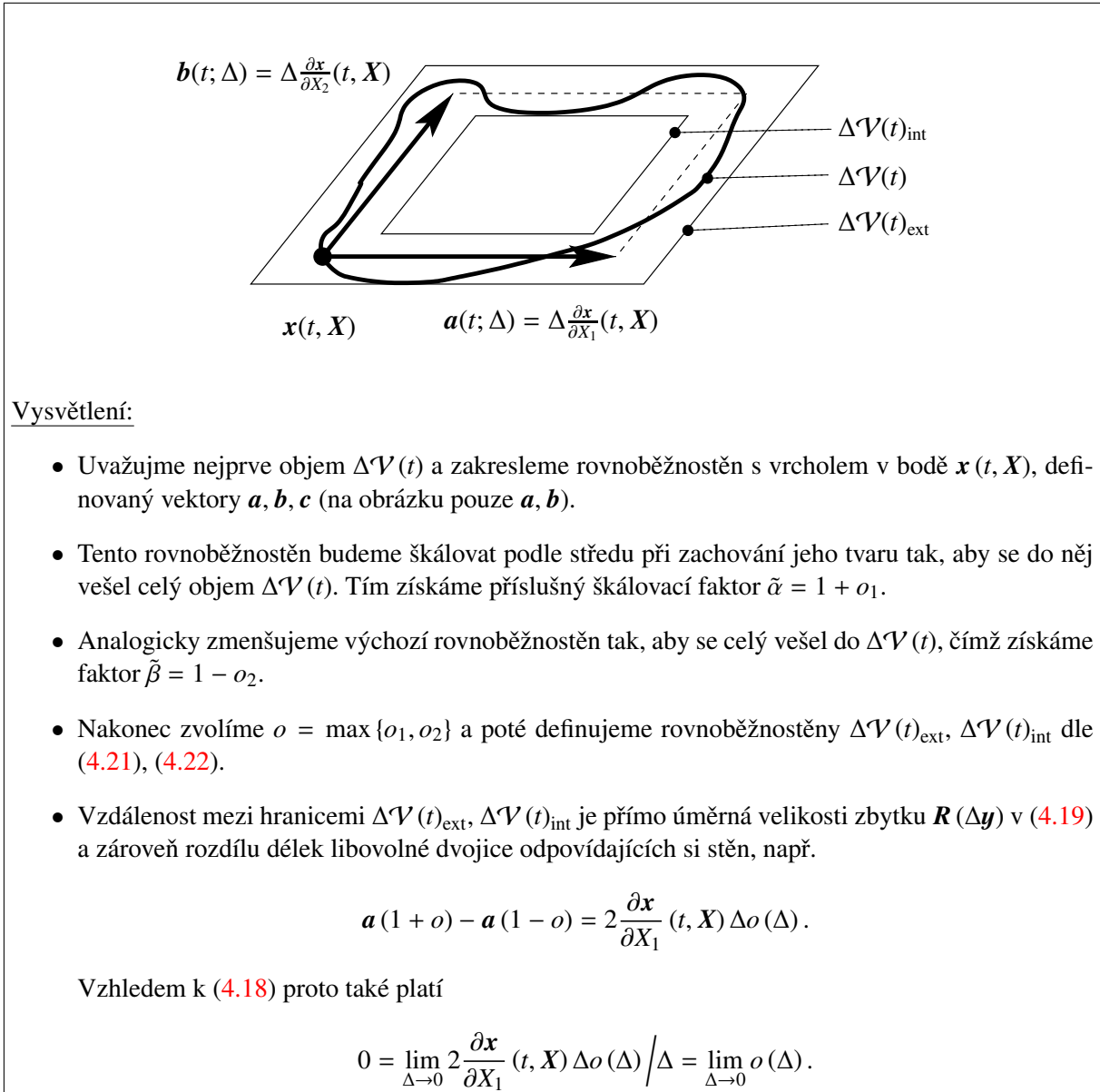
a s použitím rovnic (4.20), (4.21), (4.21) dále

$$(1 - o(\Delta))^3 \Delta^3 |\det \mathbf{F}(t, \mathbf{X})| \leq |\Delta\mathcal{V}(t)| \leq (1 + o(\Delta))^3 \Delta^3 |\det \mathbf{F}(t, \mathbf{X})|$$

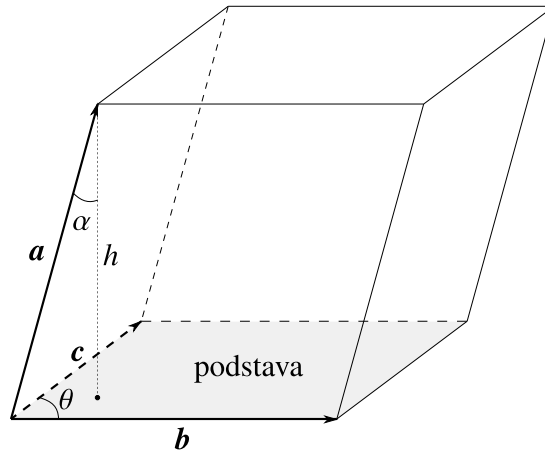
kde  $\mathbf{F}$  je dáno (3.10). Jestliže rovnost vydělíme  $\Delta^3$ , dostaneme

$$(1 - o(\Delta))^3 |\det \mathbf{F}(t, \mathbf{X})| \leq \frac{|\Delta\mathcal{V}(t)|}{\Delta^3} \leq (1 + o(\Delta))^3 |\det \mathbf{F}(t, \mathbf{X})|$$





Obrázek 4.6: Dvourozměrné znázornění deformovaného objemu  $\Delta \mathcal{V}(t)$  a soustředně umístěných navzájem podobných rovnoběžnostěnnů  $\Delta \mathcal{V}(t)_{\text{int}}, \Delta \mathcal{V}(t)_{\text{ext}}$ .



Obrázek 4.7: K odvození objemu rovnoběžnostěnu

a po provedení limity  $\Delta \rightarrow 0$  získáváme z (4.23) a věty o limitě sevřené posloupnosti

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathcal{V}(t)|}{\Delta^3} = |\det \mathbf{F}(t, \mathbf{X})|. \quad (4.25)$$

Nezávisle na  $t$  je množství hmoty obsažené v  $\Delta \mathcal{V}(t)$  rovno podle věty o střední hodnotě

$$\Delta m = \int_{\Delta \mathcal{V}(t)} \varrho(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \varrho(t, \xi_{\Delta,t}) |\Delta \mathcal{V}(t)| = \rho(t, \Xi_{\Delta,t}) |\Delta \mathcal{V}(t)| \quad (4.26)$$

kde  $\xi_{\Delta,t} \in \Delta \mathcal{V}(t)$  a  $\Xi_{\Delta,t} \in \Delta \mathcal{V}_0$  tak, že  $\mathbf{x}(t, \Xi_{\Delta,t}) = \xi_{\Delta,t}$ . V poslední rovnosti v (4.26) jsme přešli od prostorových souřadnic k materiálovým, podobně jako v (4.12). Po vydělení  $\Delta^3$  a provedení limitního přechodu  $\Delta \rightarrow 0$  přejde malý objem  $\Delta \mathcal{V}_0$  v infinitesimální objem  $d\mathcal{V}_0$ ,  $\Delta \mathcal{V}(t)$  v infinitesimální objem  $d\mathcal{V}(t)$ , bod  $\Xi_{\Delta,t}$  přejde nezávisle na  $t$  do bodu  $\mathbf{X}$  a s použitím (4.25) dostaneme

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \rho(t, \Xi_{\Delta,t}) \frac{|\Delta \mathcal{V}(t)|}{\Delta^3} = \rho(t, \mathbf{X}) |\det \mathbf{F}(t, \mathbf{X})|.$$

Vzhledem k tomu, že argument limity není závislý na  $t$ , nemůže být ani její výsledek. Proto

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \det \mathbf{F}) = 0,$$

což je (4.14).

*Poznámka 8.* (odvození vzorce pro objem rovnoběžnostěnu) Uvažujme rovnoběžnostěn označený  $\Delta \mathcal{V}$  daný vektory  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  (viz obr. 4.7). Jeho objem  $|\Delta \mathcal{V}|$  je roven obsahu podstavy

$$|\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \sin \theta = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$$

násobenému jeho výškou

$$h = |\mathbf{a}| \cos \alpha,$$

jak si lze snadno rozmyslet na analogickém případě rovnoběžníku v rovině. Celkem tedy dostáváme

$$|\Delta \mathcal{V}| = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| |\mathbf{a}| \cos \alpha = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|,$$

přičemž poslední rovnost plyne z faktu, že vektor  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  je kolmý na základnu a vektor  $\mathbf{a}$  s ním svírá úhel  $\alpha$ , případně  $\pi - \alpha$ . Výsledný smíšený součin přitom lze zapsat také ve tvaru determinantu

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

*Poznámka 9.* Odvození v sekci 4.1.4 až po (4.25) je stěžejním krokem v důkazu věty o substituci ve vícerozměrném integrálu.

## 4.2 Zákon zachování hybnosti

### 4.2.1 Odvození obecného tvaru rovnic

V této části odvodíme rovnice vyjadřující druhý Newtonův zákon, tedy že změna hybnosti za jednotku času je rovna součtu vnějších sil působících na soustavu. Použijeme již pouze Eulerův přístup a konečný objem  $\mathcal{V}$ . V něm se nachází materiál o celkové hybnosti

$$\mathbf{P}(t) = \int_{\mathcal{V}} \varrho(t, \mathbf{x}) \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Časová změna této hodnoty je dána

1. tokem hybnosti do objemu  $\mathcal{V}$ , tj. hybností, kterou přináší materiál vstupující do  $\mathcal{V}$ , resp. odnáší materiál vystupující z  $\mathcal{V}$ ,
2. působením tlaku okolního materiálu na hranici objemu  $\mathcal{V}$ ,
3. viskózními silami (silami tření) na hranici objemu  $\mathcal{V}$ ,
4. působením objemových sil  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$  na látku v celém objemu  $\mathcal{V}$  (zpravidla gravitační síly a dále sil elektrostatických, magnetických apod.).

Odvodíme nyní rovnici pro změnu složky hybnosti ve směru osy  $\mathbf{e}_i$ , kterou lze definovat jako

$$\dot{P}_i(t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \varrho V_i d\mathbf{x}. \quad (4.27)$$

1. Tok  $i$ -té složky hybnosti způsobený pohybem materiálu přes hranici objemu  $\mathcal{V}$  je dán integrálem

$$- \int_{\partial\mathcal{V}} \varrho V_i \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.28)$$

přičemž výraz  $\mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$  představuje objem materiálu prostupující za jednotku času ploškou  $dS$  ven z objemu  $\mathcal{V}$ .

2. Tlak okolního materiálu  $P$ <sup>3</sup> na objem  $\mathcal{V}$  působí vždy ve směru vnitřní normály na hranici. Síla působící na plošku  $dS$  je rovna  $-P\mathbf{n}dS = -Pd\mathbf{S}$  a její projekce do směru vektoru  $\mathbf{e}_i$  je tedy  $-P\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}dS = -Pn_i dS$ . Celková síla na  $\partial\mathcal{V}$  ve směru osy  $\mathbf{e}_i$  způsobená tlakem je tedy

$$- \int_{\partial\mathcal{V}} P n_i dS. \quad (4.29)$$

3. Působení viskózních sil udává *dynamický tenzor (viskózního) napětí*  $\mathbf{T}_D = (\tau_{ij})$ . Na plošku o jednotkovém povrchu s normálou ve směru  $\mathbf{n}$  působí viskózní síla  $\mathbf{T}_D \mathbf{n}$ . Pro  $i$ -tou složku této síly tedy platí

$$(\mathbf{T}_D \mathbf{n})_i = \sum_{k=1}^3 \tau_{ik} n_k$$

<sup>3</sup>Všechny veličiny jsou v aktuálních souřadnicích a příslušné funkce jsou tedy značeny velkými písmeny: vektor hybnosti  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$  a tlak  $P$ .

a konkrétně pro  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_j$  dostaneme

$$(\mathbf{T}_D \mathbf{e}_j)_i = \sum_{k=1}^3 \tau_{ik} \delta_{kj} = \tau_{ij}.$$

To znamená, že složka tenzoru napětí  $\tau_{ij}$  představuje  $i$ -tou složku síly působící na jednotkovou plošku kolmou na osu  $\mathbf{e}_j$ . Celkové působení viskózních sil na hranici objemu  $\mathcal{V}$  ve směru  $\mathbf{e}_i$  je tedy

$$\int_{\partial \mathcal{V}} (\mathbf{T}_D \mathbf{n})_i dS = \int_{\partial \mathcal{V}} \sum_{k=1}^3 \tau_{ik} n_k dS. \quad (4.30)$$

*Poznámka.* Tlak a viskózní síly se dají zapsat společně pomocí (tzv. úplného) tenzoru napětí

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + \mathbf{T}_D.$$

4. Objemová síla  $\mathbf{F}$  vztažená na jednotku hmotnosti (intenzita síly) přispívá v celém objemu  $\mathcal{V}$  silovým působením ve směru osy  $\mathbf{e}_i$

$$\int_{\mathcal{V}} \rho F_i d\mathbf{x} \quad (4.31)$$

Shrnutím vztahů (4.27)–(4.31) do celkové bilance hybnosti ve směru osy  $\mathbf{e}_i$  dostáváme pro  $i \in \{1, 2, 3\}$  zákon zachování hybnosti v konzervativním integrálním tvaru

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho V_i d\mathbf{x} + \int_{\partial \mathcal{V}} \rho V_i \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{\partial \mathcal{V}} P n_i dS + \int_{\partial \mathcal{V}} (\mathbf{T}_D \mathbf{n})_i dS + \int_{\mathcal{V}} \rho F_i d\mathbf{x}, \quad (4.32)$$

Nyní použijeme záměnu derivace a integrálu (věta 2) a dále Gaussovu větu (věta 5) na plošný integrál na levé straně (4.32). Na plošné integrály na pravé straně této rovnice aplikujeme Greenovu formuli (věta 3) a rovnici převedeme na

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V_i \mathbf{V}) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}} -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial x_3} + \rho F_i d\mathbf{x}.$$

Vzhledem k libovolné volbě objemu  $\mathcal{V}$  musí též platit rovnost integrandů

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V_i \mathbf{V}) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial x_3} + \rho F_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (4.33)$$

což je zákon zachování hybnosti v konzervativním (diferenciálním) tvaru.

Levou stranu (4.33) lze rozepsat užitím pravidla o derivaci součinu podle  $t$  a podle vzorce

$$\nabla \cdot (fg) = f \nabla \cdot g + \nabla f \cdot g,$$

čímž dostaneme

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V_i \mathbf{V}) = \rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \underbrace{\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right)}_{=0} V_i + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla V_i = \rho \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla V_i \right) = \rho \frac{DV_i}{Dt},$$

přičemž nulovost označené závorky plyne z rovnice kontinuity (4.5). Po dosazení dostáváme *zákon zachování hybnosti v nekonzervativním* (diferenciálním) tvaru (který by bylo možné odvodit i přímo s pomocí Lagrangeova přístupu)

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial x_3} + \rho F_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.34)$$

Tuto soustavu rovnic lze zapsat i ve vektorovém tvaru

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \mathbf{T}_D + \rho \mathbf{F}, \quad (4.35)$$

kde operátor divergence  $\nabla \cdot$  je aplikován na formální řádkový vektor složený ze sloupců tenzoru  $\mathbf{T}_D$ , tj.

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_D = \nabla \cdot (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial x_i}.$$

#### 4.2.2 Newtonovské tekutiny a Navierovy-Stokesovy rovnice

Tvar dynamického tenzoru napětí  $\mathbf{T}_D$  neplyne z žádných obecných fyzikálních principů a je závislý na vlastnostech konkrétního materiálu. Velkou většinu reálných *tekutin* (vzduch, voda, atd.) lze považovat za tzv. newtonovské tekutiny, pro které mají složky dynamického tenzoru napětí tvar

$$\tau_{ii} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial V_i}{\partial x_i}, \quad (4.36)$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.37)$$

Uvedené tzv. *konstitutivní vztahy* lze vysvětlit jako efekt viskozity tekutiny, kde různé rychle proudící vrstvy tekutiny se o sebe třou a působí na sebe silou, která je úměrná rozdílu jejich rychlostí. Koeficient  $\mu [ML^{-1}T^{-1}]$  se nazývá *součinitel molekulární viskozity* nebo *dynamická viskozita*. Koeficient  $\lambda$  se nazývá druhý viskózní koeficient, pro nějž se běžně používá Stokesova hypotéza

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu. \quad (4.38)$$

Dosadíme-li vztahy (4.36)–(4.38) do rovnic (4.34), dostaneme tzv. *Navierovy-Stokesovy rovnice*<sup>4</sup> v *nekonzervativním* (diferenciálním) tvaru, které popisují stlačitelné proudění vazké newtonovské tekutiny.

<sup>4</sup>V širším smyslu rozumíme Navierovými-Stokesovými rovnicemi celý systém rovnic popisující proudění, tj. rovnice (4.39)–(4.41) spolu s rovnicí kontinuity a rovnicí energie (viz část 4.3).

$$\rho \frac{DV_1}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \right] + \rho F_1 \quad (4.39)$$

$$\rho \frac{DV_2}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \right) \right] + \rho F_2, \quad (4.40)$$

$$\rho \frac{DV_3}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \mu \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) + \rho F_3. \quad (4.41)$$

### 4.2.3 Nevazké proudění - Eulerovy rovnice

V některých případech lze viskozitu tekutiny zanedbat. Položením  $\mu = \lambda = 0$  v (4.39)–(4.41), resp.  $\tau_{ij} = 0$  v (4.34) dostáváme *Eulerovy rovnice v nekonzervativním* (diferenciálním) tvaru

$$\rho \frac{DV_1}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \rho F_1, \quad (4.42)$$

$$\rho \frac{DV_2}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \rho F_2, \quad (4.43)$$

$$\rho \frac{DV_3}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_3} + \rho F_3. \quad (4.44)$$

Celý systém lze snadno zapsat i vektorově jako

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla P + \rho \mathbf{F},$$

což získáme dosazením  $\mathbf{T}_D = 0$  do (4.35).

### 4.2.4 Nestlačitelné proudění

Jestliže je tekutina nestlačitelná (proudění vody) nebo je proudění natolik pomalé, že nedochází k přílišným změnám hustoty tekutiny, je možné rovnice proudění zjednodušit předpokladem

$$\rho = \text{konst.}$$

Rovnice kontinuity (4.5) tím přejde na

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (4.45)$$

Předpokládejme navíc, že dynamická viskozita  $\mu$  je rovněž konstantní. Přímým dosazením (4.45) do (4.39) získáme

$$\rho \frac{DV_1}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( 2 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \right] + \rho F_1. \quad (4.46)$$

a po provedení derivací (předpokládejme jejich záměnnost)

$$\varrho \frac{DV_1}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu \left[ 2\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + \left( \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \left( \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \right] + \varrho F_1. \quad (4.47)$$

Rovnici kontinuity (4.45) zderivujeme podle  $x_1$  a převedeme na tvar

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} = -\frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1 \partial x_3}.$$

Po dosazení do (4.47) vyjde

$$\begin{aligned} \varrho \frac{DV_1}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu \left[ \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2} \right] + \varrho F_1 \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu \Delta V_1 + \varrho F_1. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Podobně upravíme rovnice (4.40), (4.41) a dostaneme

$$\varrho \frac{DV_2}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \mu \Delta V_2 + \varrho F_2, \quad (4.49)$$

$$\varrho \frac{DV_3}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_3} + \mu \Delta V_3 + \varrho F_3. \quad (4.50)$$

Laplaceův operátor  $\Delta = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$  je definován po složkách i pro vektorové funkce, a proto lze systém (4.48)–(4.50) zapsat ve vektorovém tvaru

$$\varrho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla P + \mu \Delta \mathbf{V} + \varrho \mathbf{F}.$$

Po vydělení hustotou  $\varrho$  získáváme často používaný tvar

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla \tilde{P} + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F}, \quad (4.51)$$

kde  $\nu = \frac{\mu}{\varrho} [L^2 T^{-1}]$  je tzv. kinematická viskozita a  $\tilde{P} = \frac{P}{\varrho}$ .

Za uvedených předpokladů je systém rovnic (4.45), (4.51) doplněný o stavovou rovnici (viz sekce 4.4) uzavřený a řešitelný bez použití zákona zachování energie, který odvodíme v následující sekci. Totéž platí o nevazkém proudění při konstantní teplotě.

## 4.3 Zákon zachování energie

### 4.3.1 Zákon zachování celkové energie

Nyní se budeme zabývat zákonem zachování celkové energie. Tato energie se skládá z kinetické energie pohybující se hmoty a vnitřní energie. Opět použijeme Eulerův přístup a konečný objem  $\mathcal{V}$  pevně zvolený v prostoru. Označíme-li  $E$  vnitřní energii na jednotku hmotnosti (tzv. měrnou vnitřní energii), je množství celkové energie rovno

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathcal{V}} \varrho(t, \mathbf{x}) \left( E(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} V(t, \mathbf{x})^2 \right) d\mathbf{x}. \quad (4.52)$$

Časová změna této hodnoty je dána

1. tokem energie do objemu  $\mathcal{V}$ , tj. energií, kterou přináší či odnáší materiál vstupující do  $\mathcal{V}$ , resp. vystupující z  $\mathcal{V}$ , přes hranici  $\partial\mathcal{V}$ ,
2. výkonem povrchových sil (tlaku a viskózních sil) na hranici objemu  $\partial\mathcal{V}$ ,
3. výkonem objemových sil na látku v celém objemu  $\mathcal{V}$ ,
4. tokem vnitřní energie přes hranici  $\partial\mathcal{V}$  způsobeným difuzí (vedením) tepla materiálem,
5. výkonem objemových zdrojů tepla v objemu  $\mathcal{V}$ .

Na všechny tyto příspěvky se nyní podíváme podrobně.

1. Tok energie způsobený pohybem materiálu přes hranici objemu  $\mathcal{V}$  je dán integrálem

$$-\int_{\partial\mathcal{V}} \rho \left( E + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.53)$$

přičemž výraz  $\mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}dS$  stejně jako v (4.28) představuje objem materiálu prostupující za jednotku času ploškou  $dS$  ven z objemu  $\mathcal{V}$ .

2. Tlaková síla působící na plošku  $dS$  je rovna  $-\mathbf{P}ndS = -PdS$  a práce vykonaná touto silou za jednotku času je dána její projekcí do směru rychlosti pohybu materiálu, tj. po zintegrování přes  $\partial\mathcal{V}$  dostaneme celkový výkon tlakových sil

$$-\int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{V} \cdot (pd\mathbf{S}) = -\int_{\partial\mathcal{V}} P\mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.54)$$

Podobně výkon viskózních sil  $\mathbf{T}_D\mathbf{n}$  působících na plošku  $dS$  lze vyjádřit jako

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{T}_D\mathbf{n}) dS = \int_{\partial\mathcal{V}} \sum_{i=1}^3 V_i (\mathbf{T}_D\mathbf{n})_i dS = \int_{\partial\mathcal{V}} \sum_{i=1}^3 V_i \sum_{k=1}^3 \tau_{ik} n_k dS = \int_{\partial\mathcal{V}} \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 V_i \tau_{ik} \right) n_k dS. \quad (4.55)$$

3. Výkon objemových sil  $\mathbf{F}$  je dán integrálem

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{F} \cdot (\rho\mathbf{V}d\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{V}} \rho\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}d\mathbf{x}. \quad (4.56)$$

4. Tepelný tok směrem *dovnitř* objemu  $\mathcal{V}$  přes plošku  $dS$  s *vnější* normálou  $\mathbf{n}$  v důsledku vedení tepla je dán Fourierovým zákonem

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} dS = k \nabla T \cdot \mathbf{n}dS = k \nabla T \cdot d\mathbf{S} \quad (4.57)$$

kde  $k$  je koeficient tepelné vodivosti. Proto celkový tepelný tok přes hranici  $\partial\mathcal{V}$  způsobený vedením tepla je

$$\int_{\partial\mathcal{V}} k \nabla T \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.58)$$

5. Konečně, je-li tepelný výkon objemových zdrojů tepla na jednotku hmotnosti roven  $\dot{Q}$ , celkový tepelný výkon v objemu  $\mathcal{V}$  je

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \dot{Q} d\mathbf{x}. \quad (4.59)$$



Shrnutím vztahů (4.52)–(4.59) do bilance celkové energie dostáváme *zákon zachování celkové energie v konzervativním integrálním tvaru*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \left( E + \frac{V^2}{2} \right) dx = & - \int_{\partial \mathcal{V}} \rho \left( E + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} - \int_{\partial \mathcal{V}} PV \cdot d\mathbf{S} + \int_{\partial \mathcal{V}} \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 V_i \tau_{ik} \right) n_k dS \\ & + \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} dx + \int_{\partial \mathcal{V}} k \nabla T \cdot d\mathbf{S} + \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{Q} dx. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Použitím Gaussovy věty, resp. Greenovy formule na plošné integrály v (4.60) lze rovnici převést na

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( E + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho \left( E + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \right] dx = & - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (PV) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sum_{i=1}^3 V_i \tau_{ik} \right) dx \\ & + \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho \dot{Q} dx. \end{aligned}$$

S uvážením, že objem  $\mathcal{V}$  lze volit libovolně, musí platit též rovnost integrandů, čímž dostáváme *zákon zachování celkové energie v konzervativním (diferenciálním) tvaru*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( E + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho \left( E + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \right] = & - \nabla \cdot (PV) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sum_{i=1}^3 V_i \tau_{ik} \right) \\ & + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho \dot{Q}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Jestliže použijeme úpravy analogické přechodu od (4.33) k (4.34), je možné vyjádřit zákon zachování energie i v *nekonzervativním (diferenciálním) tvaru* (který by bylo možné odvodit i přímo s pomocí Lagrangeova přístupu)

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left( E + \frac{V^2}{2} \right) = & - \nabla \cdot (PV) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sum_{i=1}^3 V_i \tau_{ik} \right) \\ & + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho \dot{Q}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

### 4.3.2 Zákon zachování vnitřní energie

V následujících úpravách přejdeme od rovnice pro zachování celkové energie k rovnici pro zachování *vnitřní* energie. Úpravy budeme provádět v nekonzervativním tvaru, neboť příslušné rovnice mají jednodušší tvar. Připomeňme si zákon zachování hybnosti (4.34)

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Pro každé  $i$  příslušnou rovnici vynásobíme  $V_i$  a všechny rovnice sečteme. Dostaneme

$$\varrho \sum_{i=1}^3 \frac{DV_i}{Dt} V_i = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial P}{\partial x_i} V_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} V_i + \varrho \sum_{i=1}^3 F_i V_i. \quad (4.63)$$

Pro levou stranu (4.63) platí

$$\varrho \sum_{i=1}^3 \frac{DV_i}{Dt} V_i = \varrho \sum_{i=1}^3 \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} V_i^2 \right) = \varrho \frac{D}{Dt} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{2} V_i^2 \right) = \varrho \frac{D}{Dt} \left( \frac{V^2}{2} \right).$$

Po dalších úpravách na pravé straně lze vztah (4.63) přepsat jako

$$\varrho \frac{D}{Dt} \left( \frac{V^2}{2} \right) = -P \nabla \cdot \mathbf{V} + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} V_i + \varrho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}. \quad (4.64)$$

Odečtením (4.64) od rovnice pro celkovou energii (4.62) obdržíme

$$\begin{aligned} \varrho \frac{DE}{Dt} = & -P \nabla \cdot \mathbf{V} + \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 \tau_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right) \\ & + \nabla \cdot (k \nabla T) + \varrho \dot{Q}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

což je zákon zachování vnitřní energie v nekonzervativním (diferenciálním) tvaru.

### 4.3.3 Zákon zachování energie pro newtonovské tekutiny

Dosadíme-li do (4.65) vztahy (4.36)–(4.37), dostaneme rovnici zákona zachování vnitřní energie pro newtonovskou tekutinu. Postupně upravíme

$$\begin{aligned} \varrho \frac{DE}{Dt} = & -P \nabla \cdot \mathbf{V} + \sum_{k=1}^3 \left( \tau_{kk} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} + \sum_{i=1, i \neq k}^3 \tau_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right) \\ & + \nabla \cdot (k \nabla T) + \varrho \dot{Q}. \\ = & -P \nabla \cdot \mathbf{V} + \sum_{k=1}^3 \left( \left( \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_k}{\partial x_k} + \sum_{i=1, i \neq k}^3 \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right) \\ & + \nabla \cdot (k \nabla T) + \varrho \dot{Q} \end{aligned}$$

a po rozepsání sum dostaneme nakonec

$$\begin{aligned}
\rho \frac{DE}{Dt} = & -P\nabla \cdot \mathbf{V} + \lambda \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right)^2 \\
& + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \\
& \mu \left[ \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \\
& + \nabla \cdot (k\nabla T) + \rho \dot{Q}.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

## 4.4 Uzavření systému rovnic pro proudění tekutiny

Dosud jsme odvodili několik rovnic, které v procesu proudění tekutiny vyjadřují zákony zachování fundamentálních fyzikálních veličin. Jde o 1 rovnici pro zákon zachování hmoty (sekce 4.1), 3 rovnice pro zákony zachování složek hybnosti (sekce 4.2) a 1 rovnici pro zákon zachování energie (sekce 4.3). Celkem tedy máme 5 rovnic pro hustotu  $\rho$ , 3 složky hybnosti  $\rho V_i$ , vnitřní energii  $E$ , teplotu  $T$  a tlak  $P$ <sup>5</sup>. Proměnných veličin je tedy 7 a je zřejmé, že pro nalezení jednoznačného řešení bude třeba ještě 2 dalších rovnic.

### 4.4.1 Stavová rovnice

Jednou z chybějících rovnic je *stavová rovnice*, která udává závislost mezi stavovými veličinami uzavřeného systému. Stavové veličiny jsou takové, které závisí pouze na aktuálním stavu systému. Například pro plyny udává stavová rovnice vztah mezi teplotou  $T$ , tlakem  $P$  a objemem  $V$

$$f(T, P, V) = 0.$$

Dobře známá *stavová rovnice ideálního plynu* má tvar

$$PV = nRT,$$

kde  $n$  je molární množství plynu a  $R$  je univerzální (molární) plynová konstanta s hodnotou

$$R \doteq 8.31446 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}\text{K}.$$

Tuto rovnici lze rovněž přepsat do tvaru vztaženého na jednotku objemu

$$P = \frac{n}{V}RT = \frac{nM}{V} \frac{R}{M}T = \rho R_{\text{spec}}T,$$

kde  $M$  [ $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ] je molární hmotnost plynu a  $R_{\text{spec}} = R/M$  je tzv. specifická plynová konstanta.

Pomocí stavové rovnice lze ze systému rovnic vyjádřit jednu z proměnných  $\rho$ ,  $P$  pomocí té druhé.

<sup>5</sup>Symbolika odpovídá eulerovskému přístupu a příslušnému konzervativnímu tvaru rovnic. Toto značení dodržíme v celé sekci (4.4).

#### 4.4.2 Vztah mezi vnitřní energií a teplotou

Poslední rovnice, která ještě schází, dává do souvislosti teplotu a vnitřní energii. Abychom k ní dospěli, vyjdeme z definic měrných tepelných kapacit (tj. vztažených na jednotku hmotnosti) při stálém objemu a stálém tlaku

$$c_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V, \quad c_P = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P, \quad (4.67)$$

kde

$$H = E + \frac{P}{\varrho}$$

je *měrná (specifická) entalpie*. Obvyklé termodynamické značení

$$\left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V$$

v (4.67) je třeba chápat následujícím způsobem. Vnitřní energie je obecně funkcí stavových veličin  $P$ ,  $V$ ,  $T$ . Dolní index  $V$  značí, že proces probíhá při konstantním objemu. Ze stavové rovnice proto plyne, že tlak je již funkcí pouze teploty, tj.  $P = P(T)$  a vnitřní energii lze tedy vyjádřit jako funkci

$$\mathcal{E}(T) = E(\Phi(T)),$$

kde

$$\Phi(T) = (P(T), V, T).$$

Potom změna vnitřní energie systému v závislosti na teplotě je podle věty o derivaci složené funkce dána vztahem

$$c_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V := \frac{d\mathcal{E}(T)}{dT} = \frac{\partial E}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial T} + \frac{\partial E}{\partial V} \underbrace{\frac{\partial V}{\partial T}}_{=0} + \frac{\partial E}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial T} = \frac{\partial E}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial T} + \frac{\partial E}{\partial T}.$$

Analogická úvaha platí pro výpočet  $c_P$ .

Pro kapaliny, které lze považovat za nestlačitelné ( $\varrho = \text{konst.}$ ) platí

$$c_P = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_P + \underbrace{\left( \frac{\partial \left( \frac{P}{\varrho} \right)}{\partial T} \right)_P}_{=0} = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_P.$$

Některé tekutiny lze považovat za tzv. *perfektní* plyny, u nichž vnitřní energie závisí pouze na teplotě. Pro ně lze potom vyjádřit

$$E(T) = \int_{T_{\text{ref},i}}^T c_V(\tau) d\tau, \quad H(T) = \int_{T_{\text{ref},i}}^T c_P(\tau) d\tau \quad (4.68)$$

kde  $T_{\text{ref}}$  je libovolná referenční teplota. Protože nikde v systému rovnic nevystupuje přímo hodnota vnitřní energie, ale pouze její derivace, lze  $T_{\text{ref}}$  volit libovolně, např.  $T_{\text{ref}} = 0$ . V mnoha aplikacích se teplota mění v rozsahu, kdy lze tepelné kapacity považovat za konstantní. Potom z (4.68) plynou vztahy

$$E = c_V T, \quad H = c_P T,$$

které uzavírají celý systém rovnic. Hodnoty  $c_V$  a  $c_P$  pro různé tekutiny jsou změřeny a lze je dohledat v tabulkách.

## 4.5 Analytická řešení vybraných úloh laminárního proudění newtonovské tekutiny

V této kapitole popíšeme analytická řešení úloh stacionárního laminárního proudění nestlačitelné ( $\rho = \text{konst.}$ ) newtonovské tekutiny bez gravitace v následujících případech:

1. mezi dvěma rovnoběžnými deskami (nebo též Hagenovo-Poiseuilleho proudění v dvourozměrné trubce),
2. v dostatečně dlouhé trubce o délce  $L$  s různými průřezy (kruh, elipsa, obdélník, rovnostranný trojúhelník, kruhová výseč).

U stěn desek, resp. trubky předpokládáme neklouzavé (no-slip) okrajové podmínky, které předepisují nulovou rychlost u hranice.

Ve všech případech budeme předpokládat výlučně horizontální proudění. Vektor rychlosti proto bude mít nenulovou pouze první složku

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

Na vstupu, resp. výstupu oblasti je předepsán tlak tekutiny  $P_{in}$ , resp.  $P_{out}$  a pro názornost předpokládáme, že platí  $P_{in} > P_{out}$ , tj. tekutina bude proudit zleva doprava. Za těchto předpokladů přejdou rovnice kontinuity (4.5), resp. Navierova-Stokesova rovnice zákona zachování hybnosti (4.51) bez zdrojových členů do tvaru

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} = 0, \quad (4.70)$$

resp.

$$\underbrace{\frac{D V_1}{D t}}_{=0} = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu \left[ \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2} \right] + \underbrace{\rho F_1}_{=0}. \quad (4.71)$$

Celkem rovnice (4.71) přejde do tvaru

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \mu \left[ \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2} \right], \quad (4.72)$$

kde rovnost nastává pro všechna  $\mathbf{x}$  právě tehdy, když obě strany rovnice jsou konstantní. Proto musí platit, že  $P = C_1 x_1 + C_0$ , přičemž konstanty  $C_0$  a  $C_1$  určíme z okrajových podmínek  $P(0, y, z) = P_{in}$  a  $P(L, y, z) = P_{out}$  pro libovolně zvolené  $y$  a  $z$ , tj.  $C_0 = P_{in}$  a  $C_1 = (P_{out} - P_{in})/L$ .

Rovnici (4.72) můžeme tedy přepsat do tvaru

$$\frac{P_{out} - P_{in}}{\mu L} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2} \quad (4.73)$$

nebo formálně

$$A = \hat{\Delta} V_1, \quad (4.74)$$

kde  $A = \frac{P_{out} - P_{in}}{\mu L}$  a symbolem  $\hat{\Delta}$  rozumíme Laplaceův diferenciální operátor vzhledem k proměnným  $x_2$  a  $x_3$ :

$$\hat{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \quad (4.75)$$

Až sem bylo odvození analytického řešení společně pro všechny uvažované případy. V následujících částech odvodíme řešení (4.74) nejprve pro proudění mezi deskami, a potom v trubce.

### 4.5.1 Mezi deskami

V případě proudění mezi rovnoběžnými deskami předpokládáme, že ve směru  $x_2$  se rychlost nemění, proto

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_2} = 0. \quad (4.76)$$

Z rovnic (4.70) a (4.76) plyne, že  $V_1$  závisí pouze na souřadnici  $x_3$ , tj.

$$V_1(x_1, x_2, x_3) = W(x_3)$$

pro libovolná  $x_1$  a  $x_2$ . Rovnice (4.74) potom přejde do tvaru obyčejné diferenciální rovnice pro  $W$ :

$$A = W'',$$

kterou řeší

$$W(x_3) = \frac{1}{2}Ax_3^2 + Bx_3 + C.$$

Neznámé konstanty  $B$  a  $C$  určíme snadno z okrajových no-slip podmínek v bodech  $x_3 = R$  a  $x_3 = -R$ , tj. z rovnic  $W(R) = 0$  a  $W(-R) = 0$ :  $B = 0$  a  $C = -\frac{1}{2}AR^2$ .

Analytické řešení rychlosti proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami je tedy

$$V_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{P_{\text{out}} - P_{\text{in}}}{2\mu L}(x_3^2 - R^2).$$

### 4.5.2 V trubce s kruhovým průřezem

Při laminárním proudění v trubce o délce  $L$  s kruhovým průřezem o poloměru  $R$  předpokládáme, že je řešení symetrické podle osy trubky (válce) a závisí pouze na vzdálenosti od této osy, tj. na poloměru  $r$ . Osou trubky je osa  $x_1$ . Použijeme válcovou transformaci proměnných, kde v proměnných  $x_2$  a  $x_3$  přejdeme k polárním souřadnicím vztahy

$$\begin{aligned} x_2 &= r \cos \varphi, \\ x_3 &= r \sin \varphi, \end{aligned}$$

kde  $r > 0$  a  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ . Laplaceův diferenciální operátor  $\hat{\Delta}$  v rovnici (4.75) přejde ve válcových souřadnicích do tvaru

$$\hat{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}. \quad (4.77)$$

Celkem za předpokladu výše zmíněné nezávislosti řešení na úhlu  $\varphi$  platí  $V_1(x_1, r, \varphi) = W(r)$  pro libovolná  $x_1$  a  $\varphi$ . Rovnici (4.74) lze přepsat do tvaru obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

$$A = \frac{1}{r}W' + W''$$

pro  $r \in (0, R)$ . Jedná se o lineární diferenciální rovnici 1. řádu pro  $W'$ , kterou lze řešit např. metodou integračního faktoru, čímž dostaneme

$$W'(r) = \frac{1}{2}Ar + \frac{1}{r}B, \quad (4.78)$$

kde neznámou integrační konstantu  $B$  určíme pomocí okrajové podmínky na funkci  $W'$ . Protože však žádnou takovou podmínku zatím nemáme, musíme si pomoci předpokladem, že výsledný rychlostní profil musí mít maximum na ose válce, tj. v bodě  $r = 0$ . Z osové symetrie úlohy a diferencovatelnosti funkce  $W'$  plyne

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} W'(r) = 0. \quad (4.79)$$

Aby podmínka (4.79) byla splněna, musí  $B = 0$  v (4.78), čímž dostáváme

$$W'(r) = \frac{1}{2}Ar. \quad (4.80)$$

Integrací rovnice (4.80) a použitím no-slip okrajové podmínky  $W(R) = 0$  dostaneme analytické řešení

$$W(r) = \frac{1}{4}A(r^2 - R^2),$$

tj. v původních souřadnicích

$$V_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{P_{in} - P_{out}}{4\mu L} (R^2 - x_2^2 - x_3^2).$$

Pro celkový objemový tok  $Q$  (stejný pro každé  $x_1 \in [0, L]$ ) platí

$$Q = \int_{x_2^2 + x_3^2 \leq R^2} V_1(x_1, x_2, x_3) d(x_2, x_3) = \frac{\pi}{8} \frac{P_{in} - P_{out}}{\mu L} R^4.$$

V následujících částech uvedeme vždy nejprve analytické řešení s celkovým objemovým tokem, a poté dokážeme, že řešení splňuje rovnici (4.75) a nulové okrajové podmínky na hranici.

### 4.5.3 V trubce s eliptickým průřezem

Analytické řešení stacionárního nestlačitelného newtonovského laminárního proudění v trubce o délce  $L$ , pro kterou je osa  $x_1$  osou trubky, a s eliptickým průřezem o délkách hlavní a vedlejší poloosy  $a$  a  $b$  je

$$V_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{P_{in} - P_{out}}{2\mu L} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{b^2} \right) \quad (4.81)$$

s celkovým tokem

$$Q = \frac{\pi}{4} \frac{P_{in} - P_{out}}{\mu L} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Z tvaru analytického profilu je zřejmé, že u stěny trubky (o rovnici  $x_2^2/a^2 + x_3^2/b^2 = 1$ ) je rychlost  $V_1$  nulová. Dále se lze snadno přesvědčit, že (4.81) splňuje (4.75).

### 4.5.4 V trubce s obdélníkovým průřezem

Analytické řešení stacionárního nestlačitelného newtonovského laminárního proudění v trubce o délce  $L$ , pro kterou je osa  $x_1$  osou trubky, a s obdélníkovým průřezem o délkách stran  $2a$  (podél osy  $x_2$ ) a  $2b$  (podél osy  $x_3$ ) je

$$V_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{P_{in} - P_{out}}{\mu L} \frac{16a^2}{\pi^3} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)^3} \left( 1 - \frac{\cosh \left[ (2i+1)\pi \frac{x_3}{2a} \right]}{\cosh \left[ (2i+1)\pi \frac{b}{2a} \right]} \right) \cos \left[ \frac{(2i+1)\pi x_2}{2a} \right] \quad (4.82)$$

s celkovým tokem

$$Q = \frac{P_{in} - P_{out}}{\mu L} \frac{4ba^3}{3} \left( 1 - \frac{192a}{\pi^5 b} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i+1)^5} \tanh \left( \frac{(2i+1)\pi b}{2a} \right) \right).$$

K odvození analytického řešení (4.82) se použije metoda řešení parciálních diferenciálních rovnic pomocí Fourierových řad. Předpokládáme nulové okrajové podmínky podél stěn kanálu, tj.  $\forall x_1 \in [0, L]$  a  $\forall x_3 \in [-b, b]$

$$V_1(x_1, \pm a, x_3) = 0, \quad (4.83)$$

a  $\forall x_1 \in [0, L]$  a  $\forall x_2 \in [-a, a]$

$$V_1(x_1, x_2, \pm b) = 0. \quad (4.84)$$

Řešení (4.75) hledáme ve tvaru Fourierovy řady

$$V_1(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x_3) \cos \left[ \frac{\pi n x_2}{2a} \right], \quad (4.85)$$

neboť předpokládané řešení bude symetrické vzhledem k ose  $x_2$  (i ose  $x_3$ ), tj. bude sudou funkcí vzhledem k  $x_2$  (i  $x_3$ ). Zároveň splníme nulové okrajové podmínky (4.83) pro  $x_2 = \pm a$ . Podle tvaru Fourierova rozvoje (4.85) je patrné, že se jedná o rozvoj funkce na intervalu délky  $4a$ , tj. uvažujeme interval  $[-2a, 2a]$ . Dosazením (4.85) do (4.75) dostaneme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n''(x_3) - \frac{\pi^2 n^2}{4a^2} a_n(x_3) \right) \cos \left[ \frac{\pi n x_2}{2a} \right] = A, \quad (4.86)$$

pro  $x_2 \in (-a, a)$  a  $x_3 \in (-b, b)$ .

Konstantu na pravé straně (4.86) můžeme interpretovat jako funkci

$$j(x_2) = \begin{cases} 1, & x_2 \in (-a, a), \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kterou rozvineme do Fourierovy řady na intervalu  $(-2a, 2a)$

$$j(x_2) \approx \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} \cos \left[ \frac{(2i+1)\pi x_2}{2a} \right]. \quad (4.87)$$

Odečtením  $\frac{1}{2}$  z pravé strany a vynásobením 2 rovnice (4.87) lze podle věty o konvergenci Fourierovy řady psát rovnost

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} \cos \left[ \frac{(2i+1)\pi x_2}{2a} \right], \quad (4.88)$$

která ovšem platí pouze pro  $x_2 \in (-a, a)$ .

Rovnici (4.86) lze přepsat do tvaru

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n''(x_3) - \frac{\pi^2 n^2}{4a^2} a_n(x_3) - B_n \right) \cos \left[ \frac{\pi n x_2}{2a} \right] = 0, \quad (4.89)$$

kde

$$B_n = \begin{cases} \frac{4A}{\pi} (-1)^i, & n = 2i + 1, \\ 0, & n = 2i. \end{cases}$$

Aby byla rovnice (4.89) splněná pro všechna  $x_2 \in (-a, a)$  a  $x_3 \in (-b, b)$ , stačí pro každé  $n \in \mathbb{N}$  vyřešit obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu, aby

$$a_n''(x_3) - \frac{\pi^2 n^2}{4a^2} a_n(x_3) = B_n \quad (4.90)$$



s okrajovými podmínkami

$$a_n(\pm b) = 0, \quad (4.91)$$

které plynou z (4.84) a tvaru hledaného řešení (4.85).

Rovnice (4.90) je obyčejnou diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty. Řešení homogenní rovnice (tj. rovnice (4.90) s nulovou pravou stranou), které označme  $a_{n,h}$ , najdeme pomocí řešení charakteristické rovnice (pro  $r$ )

$$r^2 - \frac{\pi^2 n^2}{4a^2} = 0$$

ve tvaru

$$a_{n,h}(x_3) = C_1 \exp\left(\frac{\pi n}{2a} x_3\right) + C_2 \exp\left(-\frac{\pi n}{2a} x_3\right). \quad (4.92)$$

Jelikož očekáváme symetrické řešení podle osy  $x_3$ , je výhodné (4.92) přepsat jako

$$a_{n,h}(x_3) = K_1 \sinh\left(\frac{\pi n}{2a} x_3\right) + K_2 \cosh\left(\frac{\pi n}{2a} x_3\right). \quad (4.93)$$

Jelikož je pravá strana (4.90) konstantní, lze předpokládat konstantní partikulární řešení  $a_{n,p}$  a dostaneme

$$a_{n,p}(x_3) = -\frac{4a^2}{\pi^2 n^2} B_n.$$

Celkem máme řešení  $a_n = a_{n,h} + a_{n,p}$  ve tvaru

$$a_n(x_3) = -\frac{4a^2}{\pi^2 n^2} B_n + K_1 \sinh\left(\frac{\pi n}{2a} x_3\right) + K_2 \cosh\left(\frac{\pi n}{2a} x_3\right)$$

a zbývá určit konstanty  $K_1$  a  $K_2$  z okrajových podmínek (4.91):

$$K_1 = 0$$

a

$$K_2 = B_n \frac{4a^2}{\pi^2 n^2} \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi n}{2a} x_3\right)}.$$

Dosazením tvaru  $a_n$  do Fourierova rozvoje (4.85) dostaneme (4.82).

#### 4.5.5 V trubce s průřezem tvaru rovnostranného trojúhelníku

Analytické řešení stacionárního nestlačitelného newtonovského laminárního proudění v trubce o délce  $L$  položenou souběžně s osou  $x_1$  a s průřezem tvaru rovnostranného trojúhelníku o délce stran  $a$  (konvexní obal bodů  $[0, 0]$ ,  $[-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a]$ ,  $[\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a]$  v rovině  $(x_2, x_3)$ ) je

$$V_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{P_{in} - P_{out}}{\mu L} \frac{\sqrt{3}}{6a} \left(x_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) (3x_2^2 - x_3^2) \quad (4.94)$$

s celkovým tokem

$$Q = \frac{P_{in} - P_{out}}{\mu L} \frac{\sqrt{3}a^4}{320}.$$

Z tvaru (4.94) lze snadno ukázat, že u stěny trubky je rychlost  $V_1$  nulová a že profil splňuje (4.75).

### 4.5.6 V trubce s průřezem tvaru kruhové výseče

Analytické řešení stacionárního nestlačitelného newtonovského laminárního proudění v trubce o délce  $L$  položenou souběžně s osou  $x_1$  a s průřezem tvaru kruhové výseče o poloměru  $R$  a úhlu  $\alpha$  s počátkem v bodě  $x_2 = 0, x_3 = 0$ , polární poloosou v kladném směru osy  $x_2$  a předpisem

$$\left\{ (r, \varphi) : r \in (0, R) \wedge \varphi \in \left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \right\}$$

je  $V_1(x_1, x_2, x_3) = W(r, \varphi)$ , kde  $x_2 = r \cos \varphi$  a  $x_3 = r \sin \varphi$  a

$$W(r, \varphi) = \frac{P_{in} - P_{out}}{4\mu L} \left[ r^2 \left( 1 - \frac{\cos 2\varphi}{\cos \alpha} \right) - \frac{16R^2\alpha^2}{\pi^3} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i+1)\left((2i+1)^2 - \frac{4\alpha^2}{\pi^2}\right)} \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{(2i+1)\pi}{\alpha}} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi\varphi}{\alpha}\right) \right] \quad (4.95)$$

a s celkovým tokem

$$Q = \frac{P_{in} - P_{out}}{4\mu L} \left[ \frac{\tan(\alpha) - \alpha}{4} - \frac{32R^4}{\pi^5} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i+1)^2 \left((2i+1)^2 - \frac{4\alpha^2}{\pi^2}\right)} \right].$$

Z tvaru (4.95) nejprve ukážeme, že u stěny trubky ( $r = R$  nebo  $\varphi = \pm\frac{\alpha}{2}$ ) je rychlost  $V_1$  nulová. Pro  $\varphi = \pm\frac{\alpha}{2}$  je rovnou vidět, že  $W(r, \pm\frac{\alpha}{2}) = 0$ . Pro  $r = R$  to lehce vidět není, protože musíme ověřit platnost

$$1 - \frac{\cos 2\varphi}{\cos \alpha} - \frac{16\alpha^2}{\pi^3} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i+1)\left((2i+1)^2 - \frac{4\alpha^2}{\pi^2}\right)} \cos\left[\frac{(2i+1)\pi\varphi}{\alpha}\right] = 0. \quad (4.96)$$

Nejrychlejší způsob ověření vztahu (4.96) je ho dvakrát zderivovat podle  $\varphi$  a dosadit výsledný vztah pro  $\frac{\cos 2\varphi}{\cos \alpha}$  do původní rovnice (4.96), čímž dostaneme

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} \cos\left[\frac{(2i+1)\pi\varphi}{\alpha}\right],$$

což je vztah (4.88) pro  $a = \frac{\alpha}{2}$ .

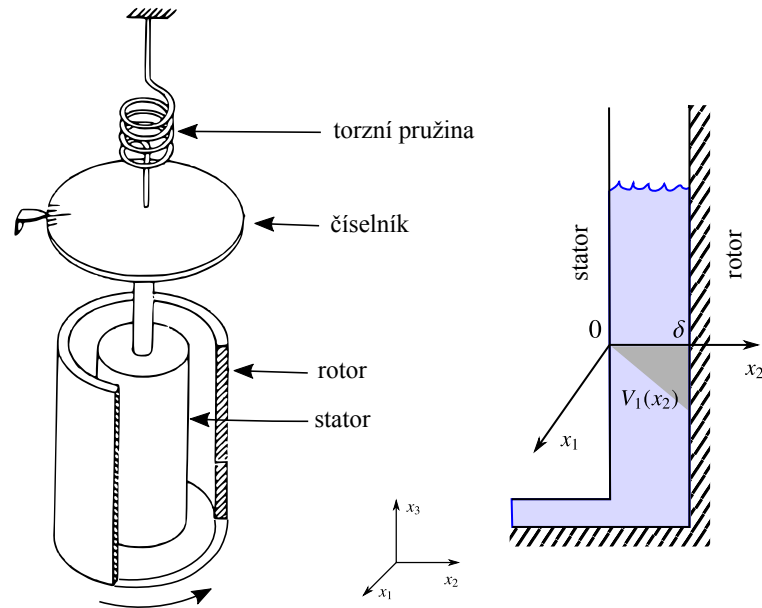
Pomocí derivací (4.95) podle  $r$  a  $\varphi$  zbývá ověřit, že profil splňuje (4.75) s operátorem v cylindrických souřadnicích (4.77).

## 4.6 Nenewtonovské tekutiny

V části 4.2.2 byl zaveden pojem newtonovské tekutiny, která je definována tak, že složky dynamického tenzoru napětí  $\mathbf{T}_D$  závisí lineárně na prostorových derivacích rychlosti vztahu (4.36) a (4.37). Všechny ostatní tekutiny nazýváme nenewtonovskými, tj. takovými, pro které je  $\mathbf{T}_D$  obecně nelineární funkce stavových veličin.

### 4.6.1 Zjednodušený model pro interpretaci nenewtonovských tekutin

Pro zkoumání (ne)newtonovského chování tekutiny lze použít například rotační viskozimetr (viz obrázek 4.8), který se skládá ze dvou do sebe vnořených soustředných válců, mezi kterými je prostor o tloušťce  $\delta$  vyplněný zkoumanou tekutinou. Vnitřní válec (stator) je pevný, vnější (rotující nádoba, rotor) se může otáčet okolo své osy úhlovou rychlostí  $\omega$  [rad s<sup>-1</sup>], přičemž předpokládáme laminární (rychlost otáčení je malá), nestlačitelné proudění bez gravitace. Rotor nechť má vnitřní poloměr  $r$  a předpokládejme, že  $r \gg \delta$ , aby byl minimalizovaný vliv zakřivení meziválcového prostoru. Za těchto předpokladů lze meziválcový prostor považovat za prostor mezi dvěma nekonečně dlouhými deskami.



Obrázek 4.8: Jednoduchý rotační viskozimetr s rotující nádobou a statickým vnitřním válcem. Vpravo je zobrazen průřez zařízení do roviny  $x_1, x_2$  s naznačeným lineárním profilem velikosti rychlosti tekutiny strhávané rotací vnějšího válce.

Nechť je osa  $x_1$  tečná k plášti statoru, přičemž kladný směr je ve směru rotace rotoru. Osa  $x_2$  je položena v radiálním směru a je orientována směrem ven, viz obrázek 4.8 vpravo. Třetí osu v tomto modelu neuvažujeme, zanedbáváme gravitaci. Stěna rotoru se nachází na souřadnici  $x_2 = \delta$  a pohybuje se úhlovou rychlostí  $\omega$ . Díky vazkosti tekutiny s sebou strhává jednotlivé vrstvy tekutiny, čímž vznikne laminární proudění mezi válci. Poznamenejme, že pro nevazkou (ideální) tekutinu by tekutina mezi válci zůstala v klidu nezávisle na otáčení vnějšího válce.

Rychlost proudění tekutiny mezi válci má nenulovou složku pouze ve směru otáčení válce (tj. ve směru osy  $x_1$ ) a za výše uvedených předpokladů je tato rychlost lineární funkcí od  $x_2$ :

$$V_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{\omega r}{\delta} x_2.$$

neboť  $\Delta V_1 = 0$ ,  $V_1(x_1, 0, x_3) = 0$  a  $V_1(x_1, \delta, x_3) = \omega r$ . Jelikož tento profil vzniká výhradně díky tření (tj. disipaci energie otáčení do tekutiny, čímž dochází k jejímu ohřívání) jednotlivých vrstev tekutiny o sebe, lze pro tuto úlohu zavést smykové tření (též smykové napětí)  $\tau$  [ $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ ] jako

$$\tau = \frac{F}{A},$$

kde  $F$  [ $\text{kg m s}^{-2}$ ] je síla působící na plochu  $A$  [ $\text{m}^2$ ] mezi vrstvami. Poznamenejme, že se jedná o jednoduchý smyk, viz část 5.8.5.

Označíme-li  $\phi$  úhlem otočení rotoru, lze zavést smykovou deformaci  $\gamma$  vztahem

$$\gamma = \frac{r\phi}{\delta}.$$

Pro popis (ne)newtonovského chování je potom hlavním východiskem smyková rychlost (*shear rate*, nebo *rate of shear strain*)  $\dot{\gamma}$  [ $\text{s}^{-1}$ ], v tomto případě definovaná jako

$$\dot{\gamma} = \frac{r\omega}{\delta} = \frac{\partial V_1}{\partial x_2}.$$

V obecném případě se  $\dot{\gamma}$  zavádí pomocí Frobeniovy maticové normy tenzoru rychlosti deformace  $\mathbf{D}$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2}\|\mathbf{D}\|_F = \sqrt{2}\left(\sum_{i,j=1}^3 D_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

kde

$$D_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right).$$

Newtonovské tekutiny splňují v geometrii uvažované úlohy Newtonův zákon ve tvaru

$$\tau = \mu\dot{\gamma} = \mu\frac{\partial V_1}{\partial x_2},$$

kde  $\mu$  je již dříve definovaný dynamický koeficient vazkosti.

Jak již bylo řečeno, v případě nenewtonovských tekutin je  $\tau$  obecnou funkcí, např.  $\tau = \tau(\gamma)$ ,  $\tau = \tau(\gamma, \dot{\gamma})$ ,  $\tau = \tau(\gamma, \dot{\gamma}, \text{historie vývoje systému})$  apod.

#### 4.6.2 Zobecněné newtonovské tekutiny a mocninný model

Většinu z nenewtonovských tekutin lze pak zařadit mezi tzv. zobecněné newtonovské tekutiny, pro které se zavádí zdánlivá viskozita  $\eta$  tak, aby splňovaly

$$\tau = \eta\dot{\gamma},$$

tj.  $\eta = \tau/\dot{\gamma}$ , přičemž  $\eta$  je obecně nelineární funkce stavových veličin. Existuje celá řada empiricky odvozených modelů  $\eta$  pro různé nenewtonovské tekutiny, např. mocninný model (Ostwald-de Waele), Cassonův model, Carreaův-Yassudův model, Luův-Kungův model, Quemadův model a další.

V této kapitole si představíme mocninný model (*power law model*), který uvažuje zdánlivou viskozitu  $\eta = \eta(\dot{\gamma})$ , a to ve tvaru

$$\eta(\dot{\gamma}) = K|\dot{\gamma}|^{n-1},$$

kde  $K > 0$  a  $n > 0$  jsou empiricky zjištěné parametry pro jednotlivé tekutiny. Podle hodnoty  $n$  lze v tomto modelu rozdělit tekutiny takto:

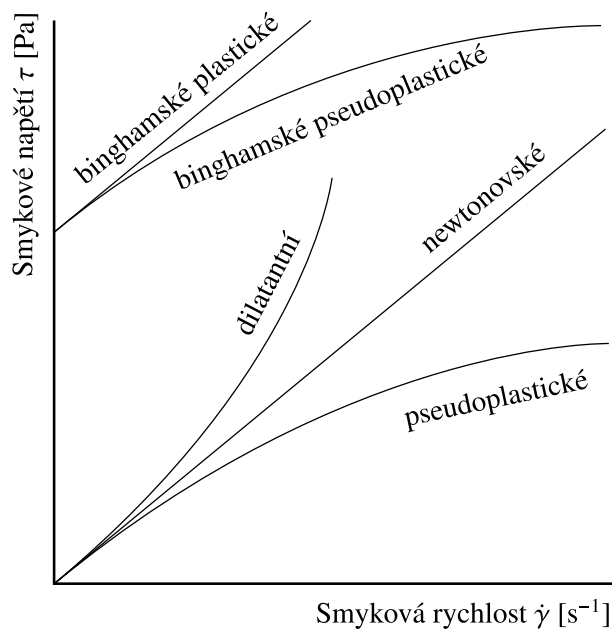
- $n < 1$ : **pseudoplastické tekutiny** (*shear-thinning*), což jsou tekutiny, jejichž chování nezávisí na čase a které mají nízkou (zdánlivou) viskozitu pro velké napětí (tj. sílu, kterou na tekutinu působíme), příkladem takových tekutin je kukuřičný sirup, gel na vlasy, kečup, šlehačka, krev, natírací barva apod.,
- $n = 1$ : **newtonovské tekutiny** (voda, vzduch apod.)
- $n > 1$ : **dilatantní tekutiny** (*shear-thickening*), což jsou tekutiny, které při působení napětí zvyšují zdánlivou viskozitu, příkladem je roztok škrobu a vody, inteligentní plastelína (*Silly putty*) apod.,

viz obrázek 4.9.

#### 4.6.3 Další skupiny nenewtonovských tekutin

Dále lze nenewtonovské tekutiny dělit takto:

- **čistě elastické**:  $\tau = \tau(\gamma) = G\gamma$ , kde  $G$  je modul pružnosti ve smyku,
- **viskoelastické**:  $\tau = \tau(\gamma, \dot{\gamma})$ , při působení síly tečou, ale udržují si tvar a po skončení působení se částečně vrátí do původního tvaru,



Obrázek 4.9: Klasifikace neneutronovských tekutin.

- **binghamské**: pro nízké napětí se chová jako pevné těleso, pro vysoké teče (např. majonéza).

Neneutronovské chování lze pozorovat i v čase, přičemž rozlišujeme chování:

- **tixotropní**: s dobou působení napětí viskozita klesá (např. laky, nátěrová hmota),
- **reopexní**: s dobou působení napětí viskozita roste (např. inkoust, sádra).



## 5. Základy teorie deformace

V této kapitole se budeme zabývat obecnou teorií deformace kontinua a výsledkem bude zavedení základních tenzorů deformace a příklady jejich použití při popisu evoluce materiálového tělesa. V kapitole 3 jsme zavedli materiálový (referenční) a prostorový (aktuální) popis materiálového bodu v čase přičemž Jacobiho tenzor přechodu mezi souřadnicemi  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{x}$  jsme nazývali též jako deformační gradient  $\mathbf{F}$ .

Obecnou deformaci kontinua popíšeme zkoumáním evoluce dvou materiálových bodů  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$ , které mají v materiálovém popisu souřadnice  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$ , přičemž nás bude z pohledu infinitezimálního popisu kontinua zajímat především takový bod  $\mathbf{Q}$ , který leží nekonečně blízko bodu  $\mathbf{P}$  tak, že vektor vzájemné polohy  $\mathbf{PQ} = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$  je nekonečně malý co do velikosti - takový vektor budeme označovat symbolem  $d\mathbf{P}$ .

### 5.1 Vektor $c_j$

Nejprve se zaměříme na popis neinfinitesimalní, kde vektor vzájemné polohy má nenulovou velikost a pro jednoduchost zápisu ho v materiálovém popisu označme symbolem  $\Delta$  (po složkách  $\Delta = \sum_{k=1}^3 \Delta_k \mathbf{e}_k$ ), tj. platí  $\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \Delta$ . Vlivem deformace materiálového tělesa dojde ke změně vzájemné polohy bodů  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$ , které jsou v prostorových souřadnicích vyjádřeny vektory  $\mathbf{x}(t, \mathbf{P})$  a  $\mathbf{x}(t, \mathbf{P} + \Delta)$ . V prostorovém popisu označme vzájemný polohový vektor symbolem  $\delta = \delta(t, \mathbf{P}, \Delta) = \sum_{k=1}^3 \delta_k(t, \mathbf{P}, \Delta) \mathbf{e}_k$  tak, že

$$\delta(t, \mathbf{P}, \Delta) = \mathbf{x}(t, \mathbf{P} + \Delta) - \mathbf{x}(t, \mathbf{P}). \quad (5.1)$$

Podle věty o střední hodnotě aplikovanou v  $\mathbb{R}^3$  platí, že pro každou složku  $k \in \hat{3}$  existují čísla  $\alpha_k \in [0, 1]$  taková, že lze rovnici (5.1) přepsat po složkách do tvaru

$$\begin{aligned} \delta(t, \mathbf{P}, \Delta) &= \sum_{k=1}^3 \delta_k(t, \mathbf{P}, \Delta) \mathbf{e}_k \\ &= \sum_{k=1}^3 (x_k(t, \mathbf{P} + \Delta) - x_k(t, \mathbf{P})) \mathbf{e}_k \\ &= \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial x_k}{\partial \Delta} (t, \mathbf{P} + \alpha_k \Delta) \right) \mathbf{e}_k \\ &= \sum_{k=1}^3 (\nabla x_k(t, \mathbf{P} + \alpha_k \Delta) \cdot \Delta) \mathbf{e}_k \\ &= \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial X_j} (t, \mathbf{P} + \alpha_k \Delta) \Delta_j \right) \mathbf{e}_k \\ &= \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial X_j} (t, \mathbf{P} + \alpha_k \Delta) \mathbf{e}_k \right) \Delta_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \mathbf{c}_j(t, \mathbf{P}, \Delta) \Delta_j, \end{aligned} \quad (5.2)$$

kde koeficient  $\alpha_k$  udává pozici nějakého bodu na spojnici bodů  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{P} + \Delta$  a  $k$ -tá složka vektoru  $\mathbf{c}_j(t, \mathbf{P}, \Delta)$  je definována jako

$$(\mathbf{c}_j)_k(t, \mathbf{P}, \Delta) = \frac{\partial x_k}{\partial X_j} (t, \mathbf{P} + \alpha_k \Delta). \quad (5.3)$$

Při zkoumání deformace infinitezimálně malé změny polohy materiálového bodu  $\mathbf{P}$  pak položíme  $\Delta = d\mathbf{P}$  a  $\delta = d\mathbf{p}$ . Za předpokadu, že vektory vzájemné polohy  $d\mathbf{P}$  a  $d\mathbf{p}$  mají nekonečně malou velikost, nelze rozlišit polohu bodů  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{P} + \alpha_k d\mathbf{P}$  v předchozích rovnicích. Proto rovnice (5.2) má v infinitezimálním vyjádření tvar

$$d\mathbf{p}(t, \mathbf{P}, d\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{c}_j(t, \mathbf{P}) dP_j, \quad (5.4)$$

kde s využitím rovnice (5.3) je vektor  $\mathbf{c}_j(t, \mathbf{P}) = \mathbf{c}_j(t, \mathbf{P}, \mathbf{0})$ , tj. po složkách

$$(\mathbf{c}_j)_k(t, \mathbf{P}) = \frac{\partial X_k}{\partial X_j}(t, \mathbf{P}), \quad (5.5)$$

odkud je patrné, že vektor  $\mathbf{c}_j$  označuje  $j$ -tý sloupec deformačního gradientu  $\mathbf{F}$ .

## 5.2 Vektor $\mathbf{C}_j$

Analogicky můžeme odvodit vztah mezi prostorovými a materiálovými souřadnicemi studiem dvou pevných prostorových bodů  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{q}$ , které mají prostorové souřadnice  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{q}$ . Vektor vzájemné polohy označme stejně jako v předchozím odstavci symbolem  $\delta$ , tj.  $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \delta$ . Oba body v materiálovém popisu mají souřadnice  $\mathbf{X}(t, \mathbf{p})$ , resp.  $\mathbf{X}(t, \mathbf{p} + \delta)$  a proto pro vyjádření jejich vzájemné polohy  $\Delta$  v materiálové konfiguraci platí

$$\Delta(t, \mathbf{p}, \delta) = \mathbf{X}(t, \mathbf{p} + \delta) - \mathbf{X}(t, \mathbf{p}),$$

kde obdobně jako v rovnici (5.2) aplikujeme větu o střední hodnotě pro každou složku vektoru  $\Delta$  s následujícím výsledkem

$$\Delta(t, \mathbf{p}, \delta) = \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{k=1}^3 \frac{\partial X_k}{\partial x_j}(t, \mathbf{p} + \beta_k \delta) \mathbf{e}_k \right) \delta_j = \sum_{j=1}^3 \mathbf{C}_j(t, \mathbf{p}, \delta) \delta_j, \quad (5.6)$$

kde  $\beta_k \in [0, 1]$  pro každou složku  $k \in \hat{3}$ . Složky vektoru  $\mathbf{C}_j(t, \mathbf{p}, \delta)$  jsou pro všechny indexy  $j, k \in \hat{3}$  dány vztahem

$$(\mathbf{C}_j)_k(t, \mathbf{p}, \delta) = \frac{\partial X_k}{\partial x_j}(t, \mathbf{p} + \beta_k \delta). \quad (5.7)$$

Pro zápis infinitezimálně malé změny polohy položíme  $\delta = d\mathbf{p}$  a  $\Delta = d\mathbf{P}$ , přičemž opět předpokládáme, že poloha bodů  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{p} + \beta_k d\mathbf{p}$  splývá pro všechna  $\beta_k \in [0, 1]$ . Proto rovnice (5.6) má v infinitezimálním vyjádření tvar

$$d\mathbf{P}(t, \mathbf{p}, d\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{C}_j(t, \mathbf{p}) dp_j, \quad (5.8)$$

kde s využitím rovnice (5.7) je vektor  $\mathbf{C}_j(t, \mathbf{p}) = \mathbf{C}_j(t, \mathbf{p}, \mathbf{0})$ , tj. po složkách

$$(\mathbf{C}_j)_k(t, \mathbf{p}) = \frac{\partial X_k}{\partial x_j}(t, \mathbf{p}). \quad (5.9)$$

Je patrné, že vektor  $\mathbf{C}_j$  označuje  $j$ -tý sloupec inverzního deformačního gradientu  $\mathbf{F}^{-1}$ .



### 5.3 Greenův a Cauchyho tenzor deformace

Výchozím nástrojem pro popis deformace kontinua je popsání vztahu mezi kvadráty eukleidovské normy infinitizimálních vektorů  $d\mathbf{P}$  a  $d\mathbf{p}$ , které budeme značit (skalárními) symboly  $d\mathbf{P}^2$  a  $d\mathbf{p}^2$  a definujeme

$$\begin{aligned} d\mathbf{P}^2 &= \|d\mathbf{P}\|^2 = d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = d\mathbf{P}^T d\mathbf{P} = \sum_{k=1}^3 dP_k^2, \\ d\mathbf{p}^2 &= \|d\mathbf{p}\|^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = d\mathbf{p}^T d\mathbf{p} = \sum_{k=1}^3 dp_k^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Pomocí vztahu mezi infinitezimálními vektory (5.4) lze z (5.10) vyjádřit  $d\mathbf{p}^2$  pomocí materiálových souřadnic polohového vektoru  $\mathbf{P}$  a vektoru  $d\mathbf{P}$  jako

$$d\mathbf{p}^2 = d\mathbf{p}^T d\mathbf{p} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{c}_i(t, \mathbf{P})^T \mathbf{c}_j(t, \mathbf{P}) dP_i dP_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{c}_{i,j}(t, \mathbf{P}) dP_i dP_j, \quad (5.11)$$

kde

$$\mathbf{c}_{i,j} = \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j = \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_\ell}{\partial X_j} \delta_{k,\ell} = \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 \mathbf{F}_{k,i} \mathbf{F}_{\ell,j} \delta_{k,\ell}$$

jsou složky tenzoru  $\mathbf{c}$ , který se nazývá *Greenův tenzor deformace*, a platí pro něj definiční vztah

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}.$$

Poznamenejme, že symbol  $\delta_{i,j}$  označuje Kroneckerovo delta, tj.  $\delta_{i,j} = 1$  pro  $i = j$ , jinak  $\delta_{i,j} = 0$ .

Analogicky lze odvodit ze vztahů (5.8) a (5.10) vyjádření  $d\mathbf{P}^2$  pomocí prostorových souřadnic polohového vektoru  $\mathbf{p}$  a vektoru  $d\mathbf{p}$  rovnicí

$$d\mathbf{P}^2 = d\mathbf{P}^T d\mathbf{P} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{C}_i(t, \mathbf{p})^T \mathbf{C}_j(t, \mathbf{p}) dp_i dp_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{C}_{i,j}(t, \mathbf{p}) dp_i dp_j, \quad (5.12)$$

kde

$$\mathbf{C}_{i,j} = \mathbf{C}_i^T \mathbf{C}_j = \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_\ell}{\partial x_j} \delta_{k,\ell} = \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 \mathbf{F}^{-1}_{k,i} \mathbf{F}^{-1}_{\ell,j} \delta_{k,\ell}$$

jsou složky tenzoru  $\mathbf{C}$ , který se nazývá *Cauchyho tenzor deformace*, a platí pro něj definiční vztah

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1T} \mathbf{F}^{-1}.$$

Poznamenejme, že oba tenzory deformace jsou symetrické, ale jsou každý svázan s jinými souřadnicemi;  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t, \mathbf{P})$  s materiálovým bodem  $\mathbf{P}$ , kdežto  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(t, \mathbf{p})$  s prostorovými souřadnicemi bodu  $\mathbf{p}$  a proto mezi tenzory  $\mathbf{c}$  a  $\mathbf{C}$  neexistuje přímý transformační vztah obvyklý při záměně souřadnic (více informací o této problematice viz footnote cite Maršík strana 42).

Ze symetrie deformačních tenzorů plyne, že zápis změny kvadrátů  $d\mathbf{p}^2$ , resp.  $d\mathbf{P}^2$  je kvadratická funkce

$$d\mathbf{p}^2 = d\mathbf{p}^T d\mathbf{p} = d\mathbf{P}^T \mathbf{c} d\mathbf{P},$$

resp.

$$d\mathbf{P}^2 = d\mathbf{P}^T d\mathbf{P} = d\mathbf{p}^T \mathbf{C} d\mathbf{p}.$$

Budeme-li zkoumat kulovou plochu materiálového tělesa  $d\mathbf{P}^2 = R^2$  okolo materiálového bodu  $\mathbf{P}$  v aktuálních souřadnicích, získáme Cauchyho kvadriku, nebo též *materiálovou deformační kvadriku*

$$d\mathbf{P}^2 = d\mathbf{P}^T d\mathbf{P} = d\mathbf{p}^T \mathbf{C} d\mathbf{p} = R^2,$$

kteřá obsahuje takové body v prostorovém popisu, které odpovídají polohám materiálových bodů, které byly v materiálové konfiguraci na kulové ploše.

Analogicky lze definovat *prostorovou deformační kvadriku*

$$d\mathbf{p}^2 = d\mathbf{p}^T d\mathbf{p} = d\mathbf{P}^T \mathbf{c} d\mathbf{P} = r^2,$$

kteřá obsahuje polohy těch bodů, které se budou v aktuální konfiguraci nacházet na kulové ploše se středem v bodě  $\mathbf{p}$  a poloměrem  $r$ .

## 5.4 Eulerův a Lagrangeův tenzor deformace

Tenzory deformace zavedené v předchozím odstavci umožňují vyjádřit *míru lokální deformace kontinua*, kterou vyjadřuje rozdíl mezi velikostmi inifinitesimalních vzájemných vektorů

$$d\mathbf{p}^2 - d\mathbf{P}^2 = \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 2\mathbf{e}_{k,\ell} dP_k dP_\ell = \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 2\mathbf{E}_{k,\ell} dp_k dp_\ell, \quad (5.13)$$

kde tenzor  $\mathbf{e} = \mathbf{e}(t, \mathbf{P})$ , definován pro všechny indexy  $k, \ell \in \hat{3}$  vztahem

$$2\mathbf{e}_{k,\ell}(t, \mathbf{P}) = \mathbf{c}_{k,\ell}(t, \mathbf{P}) - \delta_{k,\ell},$$

se nazývá *Lagrangeův deformační tenzor* a v tenzorovém zápisu platí

$$2\mathbf{e} = \mathbf{c} - \mathbf{I}. \quad (5.14)$$

Tenzor  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{p})$ , definován pro všechny indexy  $k, \ell \in \hat{3}$  vztahem

$$2\mathbf{E}_{k,\ell}(t, \mathbf{p}) = \delta_{k,\ell} - \mathbf{C}_{k,\ell}(t, \mathbf{p}),$$

se nazývá *Eulerův deformační tenzor* a v tenzorovém zápisu platí

$$2\mathbf{E} = \mathbf{I} - \mathbf{C}. \quad (5.15)$$

Je patrné, že oba tenzory jsou symetrické a pomocí vynásobení rovnice (5.14) tenzory  $\mathbf{F}^{-1T}$  zleva a  $\mathbf{F}^{-1}$  zprava, resp. (5.15) tenzory  $\mathbf{F}^T$  zleva a  $\mathbf{F}$  zprava, lze odvodit transformační vztahy v tenzorovém popisu

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^{-1T} \mathbf{e} \mathbf{F}^{-1},$$

resp.

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}^T \mathbf{E} \mathbf{F}.$$

## 5.5 Vektor posunutí

Lagrangeův a Eulerův tenzor deformace lze též vyjádřit pomocí vektoru posunutí  $\mathbf{u}$  (v prostorovém popisu)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) - \mathbf{x}(0, \mathbf{X}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) - \mathbf{X} = \sum_{k=1}^3 (x_k(t, \mathbf{X}) - X_k) \mathbf{e}_k,$$

a platí

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) - \mathbf{u}(t, \mathbf{X}), \quad (5.16)$$

resp.  $\mathbf{U}$  (v materiálovém popisu jako funkce od prostorového bodu  $\mathbf{x}$ )

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x})),$$

a s využitím  $\mathbf{x}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(t, \mathbf{X})$ ,  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x})$  a  $\mathbf{x}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{x}$  platí

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{U}(t, \mathbf{x}). \quad (5.17)$$

Vektor  $\mathbf{c}_j$  definovaný rovnicí (5.5) lze s využitím (5.16) vyjádřit jako

$$(\mathbf{c}_j)_k(t, \mathbf{X}) = \frac{\partial x_k}{\partial X_j}(t, \mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial X_j} (X_k + u_k(t, \mathbf{X})) = \delta_{k,j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j}(t, \mathbf{X}),$$

resp.  $\mathbf{C}_j$  definovaný rovnicí (5.9) lze s pomocí (5.17) napsat jako

$$(\mathbf{C}_j)_k(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial X_k}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (x_k - U_k(t, \mathbf{x})) = \delta_{k,j} - \frac{\partial U_k}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}).$$

Složky Lagrangeova deformačního tenzoru  $\mathbf{e}$  lze proto postupně přepsat do tvaru

$$2\mathbf{e}_{k,\ell} = \mathbf{c}_{k,\ell} - \delta_{k,\ell} = \mathbf{c}_k^T \mathbf{c}_\ell - \delta_{k,\ell} = \sum_{m=1}^3 \left( \delta_{m,k} + \frac{\partial u_m}{\partial X_k} \right) \left( \delta_{m,\ell} + \frac{\partial u_m}{\partial X_\ell} \right) - \delta_{k,\ell}$$

a po úpravě sumy na pravé straně

$$2\mathbf{e}_{k,\ell} = \frac{\partial u_\ell}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_\ell} + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial u_m}{\partial X_k} \frac{\partial u_m}{\partial X_\ell}. \quad (5.18)$$

Analogicky lze odvodit vyjádření složek Eulerova deformačního tenzoru  $\mathbf{E}_{k,\ell}$

$$2\mathbf{E}_{k,\ell} = \frac{\partial U_\ell}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_\ell} - \sum_{m=1}^3 \frac{\partial U_m}{\partial x_k} \frac{\partial U_m}{\partial x_\ell}. \quad (5.19)$$

Říkáme, že pohyb tělesa je *tuhý*, pokud  $d\mathbf{p}^2 = d\mathbf{P}^2$ , tj. pokud  $d\mathbf{p}^2 - d\mathbf{P}^2 = 0$ . Z rovnice (5.13) je zřejmé, že tuhý pohyb tělesa (tj. čistá translace a/nebo rotace tělesa) nastává, jen když  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ , resp.  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ .

## 5.6 Rozklad deformace

Deformaci (křivkového) elementu  $d\mathbf{P}$  kontinua lze vždy rozložit na tři nezávislé procesy: posunutí (translaci), otočení (rotaci) a dilataci (kontrakci). Podle věty o polárním rozkladu lze každou nesingulární matici (lineární tenzor), a tedy i tenzor  $\mathbf{F}$ , rozložit na součin

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R},$$

kde  $\mathbf{R}$  je ortogonální tenzor rotace a tenzory  $\mathbf{U}$ , resp.  $\mathbf{V}$  jsou pozitivně definitní tenzory, které se nazývají *pravý*, resp. *levý tenzor protažení* (angl. *stretching*) a popisují čistou kompresi či expanzi elementu objemu (*protažení*, angl. *stretching*) po, resp. před rotací.

Pro Greenův tenzor deformace platí

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{R}\mathbf{U})^T \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^2,$$

a tudíž je zřejmé, že Greenův deformační tenzor nezávisí na rotaci. Analogicky lze Cauchyho tenzor deformace vyjádřit jako

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1T} \mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{V}\mathbf{R})^{-T} (\mathbf{V}\mathbf{R})^{-1} = \mathbf{V}^{-1T} \mathbf{R}^{-1T} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^{-1T} \mathbf{V}^{-1} = (\mathbf{V}^{-1})^2.$$

Vlastní vektory Greenova tenzoru deformace určují *hlavní směry deformace* kontinua.

## 5.7 Tenzory malých deformací a rotací

Při popisu deformace materiálového tělesa se s využitím (5.11) zavádí pojem *prodloužení*  $\lambda_{\mathbf{t}}$ , které je definované jako podíl velikosti vektorů  $d\mathbf{p}$  a  $d\mathbf{P}$

$$\lambda_{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{p}}{d\mathbf{P}} = \sqrt{\sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 \mathbf{c}_{k,\ell} \mathbf{t}_k \mathbf{t}_\ell},$$

kde  $d\mathbf{p} = \|d\mathbf{p}\|$  a  $d\mathbf{P} = \|d\mathbf{P}\|$  a  $\mathbf{t}$  je normalizovaný (jednotkový) vektor ve směru  $d\mathbf{p}$ , tj.  $d\mathbf{p} = \mathbf{t} d\mathbf{p}$ . Analogicky se dá pojem prodloužení zavést i v materiálovém popisu.

*Relativní prodloužení*  $rel_{\mathbf{t}}$  je potom

$$rel_{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{p} - d\mathbf{P}}{d\mathbf{P}} = \lambda_{\mathbf{t}} - 1.$$

Pokud bude úsečka  $d\mathbf{p}$  položena např. v bazickém směru  $\mathbf{e}_1$ , bude  $\lambda_{\mathbf{e}_1} = \sqrt{\mathbf{c}_{1,1}} = \sqrt{2\mathbf{e}_{1,1} + 1}$  a  $rel_{\mathbf{e}_1} = \sqrt{2\mathbf{e}_{1,1} + 1} - 1$ . Pro hodnoty  $\mathbf{e}_{1,1}$  v okolí 0 lze  $rel_{\mathbf{e}_1}$  aproximovat (pomocí Taylorova rozvoje funkce  $f(x) = \sqrt{1+x}$ ) jako  $rel_{\mathbf{e}_1} \approx \mathbf{e}_{1,1}$ . Diagonální členy Lagrangeova, (resp. Eulerova) tenzoru deformace tedy v geometrické interpretaci vyjadřují velikost relativního prodloužení za předpokladu tzv. *malých deformací*.

### 5.7.1 Tenzory malých deformací

Obecně lze za předpokladu malých deformací

$$\left| \frac{\partial u_\ell}{\partial X_k} \right| \ll 1$$

linearizovat Lagrangeův tenzor deformace  $\mathbf{e}$  tak, že jej aproximujeme pomocí Taylorova rozvoje do tvaru

$$\mathbf{e}_{k,\ell} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_\ell} + \frac{\partial u_\ell}{\partial X_k} \right) =: \hat{\mathbf{e}}_{k,\ell}, \quad (5.20)$$

který se nazývá *Lagrangeovým tenzorem malých deformací*  $\hat{\mathbf{E}}$ . Analogicky se zavede též *Eulerův tenzor malých deformací*  $\hat{\mathbf{E}}$ :

$$\mathbf{E}_{k,\ell} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial U_\ell}{\partial x_k} \right) =: \hat{\mathbf{E}}_{k,\ell}. \quad (5.21)$$

Z obou definičních vztahů je zřejmé, že tenzory malých deformací jsou symetrické.

### 5.7.2 Tenzory malých rotací

Společně s tenzory malých deformací se též zavádí (antisymetrické) tenzory malých rotací  $\hat{\mathbf{r}}$ , resp.  $\hat{\mathbf{R}}$  vztahy

$$\hat{\mathbf{r}}_{k,\ell} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_\ell} - \frac{\partial u_\ell}{\partial X_k} \right),$$

resp.

$$\hat{\mathbf{R}}_{k,\ell} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_\ell} - \frac{\partial U_\ell}{\partial x_k} \right),$$

které aproximují (linearizují) tenzor rotace  $\mathbf{r}$ , resp.  $\mathbf{R}$  ve smyslu

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{I} + \hat{\mathbf{r}},$$

resp.

$$\mathbf{R} \approx \mathbf{I} + \hat{\mathbf{R}}$$

a popisují pouze natočení kontinua bez deformace jeho objemu.

## 5.8 Příklady deformace

Význam jednotlivých tenzorů deformace budeme v tomto odstavci ilustrovat na jednoduchých příkladech deformací. Pro jednoduchost nebudeme uvažovat časovou závislost, pouze popíšeme stav po deformaci vzhledem ke stavu v materiálové konfiguraci.

### 5.8.1 Čistá translace

Uvažujme libovolné materiálové těleso, např. jednotkovou krychli, jehož materiálové bod  $\mathbf{X}$  je posunut konstantním vektorem posunutí  $\mathbf{P}$  do pozice  $\mathbf{x}$  v prostorovém popisu

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{P}.$$

Je zřejmé, že deformační gradient translace bude identický tenzor  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$  a dále  $\mathbf{c} = \mathbf{C} = \mathbf{I}$  a  $\mathbf{e} = \mathbf{E} = \mathbf{0}$ .

### 5.8.2 Čistá rotace

Uvažujme jednotkovou krychli v  $\mathbb{R}^3$ , která se otočila okolo osy  $\mathbf{e}_3$  o úhel  $\vartheta$ . Rotaci materiálového bodu krychle  $\mathbf{X}$  lze v prostorových souřadnicích popsat jako

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X},$$

kde

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde  $\mathbf{R}$  je matice (tenzor) rotace. Příslušný deformační gradient  $\mathbf{F} = \mathbf{R}$  a protože matice rotace  $\mathbf{R}$  je unitární matice, platí  $\mathbf{c} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} = \mathbf{C}$  a proto  $\mathbf{e} = \mathbf{E} = \mathbf{0}$ .

### 5.8.3 Čisté roztážení

Uvažujme jednotkovou krychli v  $\mathbb{R}^3$ , která je roztážena (zkrácena) ve všech bazických směrech tak, že každý materiálový bod krychle  $\mathbf{X}$  má v prostorovém popisu souřadnice

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 X_1, \\ x_2 &= \lambda_2 X_2, \\ x_3 &= \lambda_3 X_3, \end{aligned}$$

kde  $\lambda_k$  jsou kladné koeficienty,  $k \in \hat{3}$ . Pro  $\lambda_k > 1$  dochází k prodloužení resp. pro  $\lambda_k < 1$  dochází ke zkrácení krychle ve směru osy  $\mathbf{e}_k$ . Deformační gradient je dán maticí

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

odkud je zřejmé, že čísla  $\lambda_k$  jsou vlastními čísly tenzoru  $\mathbf{F}$ . Polární rozklad tenzoru  $\mathbf{F}$  je

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

tj. tenzor rotace je identita a tenzor protažení  $\mathbf{U} = \mathbf{F}$ . Greenův tenzor  $\mathbf{c} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$ , Cauchyho tenzor  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1T} \mathbf{F}^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-2}, \lambda_2^{-2}, \lambda_3^{-2})$ , Lagrangeův tenzor  $2\mathbf{e} = \mathbf{c} - \mathbf{I} = \text{diag}(\lambda_1^2 - 1, \lambda_2^2 -$

$1, \lambda_3^2 - 1$ ), Eulerův tenzor  $2\mathbf{E} = \mathbf{I} - \mathbf{C} = \text{diag}(1 - \lambda_1^{-2}, 1 - \lambda_2^{-2}, 1 - \lambda_3^{-2})$ . Změna infinitezimálního objemu (resp. celého objemu, protože  $\mathbf{F}$  je v prostoru konstantní) je dána

$$|\det \mathbf{F}| = |\det \mathbf{J}| = |\det \mathbf{c}|^{\frac{1}{2}} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Dále vypočítáme vektory posunutí

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) - \mathbf{x}(0, \mathbf{X}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) - \mathbf{X} = \\ &= \left( \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}, \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x})) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - 1 \end{pmatrix} \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\lambda_1} \\ \frac{x_2}{\lambda_2} \\ \frac{x_3}{\lambda_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3 - 1}{\lambda_3} \end{pmatrix} \mathbf{x}, \end{aligned}$$

pomocí nichž lze též spočítat Eulerův, resp. Lagrangeův tenzor ze vztahu (5.18)

$$\mathbf{e} = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_\ell} + \frac{\partial u_\ell}{\partial X_k} + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial u_m}{\partial X_k} \frac{\partial u_m}{\partial X_\ell} \right) \right]_{k, \ell \in \hat{3}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 - 1 \end{pmatrix},$$

resp. (5.19)

$$\mathbf{E} = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_\ell}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_\ell} - \sum_{m=1}^3 \frac{\partial U_m}{\partial x_k} \frac{\partial U_m}{\partial x_\ell} \right) \right]_{k, \ell \in \hat{3}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\lambda_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\lambda_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{\lambda_3^2} \end{pmatrix}.$$

Ukažme si, jak vypadají tenzory malých deformací definované vztahy (5.20):

$$\hat{\mathbf{e}} = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_\ell} + \frac{\partial u_\ell}{\partial X_k} \right) \right]_{k, \ell \in \hat{3}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - 1 \end{pmatrix},$$

resp. (5.21):

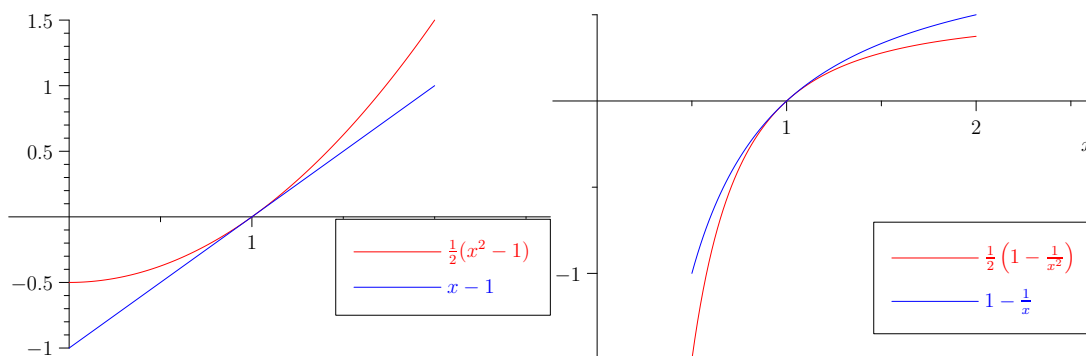
$$\hat{\mathbf{E}} = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial U_\ell}{\partial x_k} \right) \right]_{k, \ell \in \hat{3}} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3 - 1}{\lambda_3} \end{pmatrix}.$$

Z grafů funkcí  $\frac{1}{2}(x^2 - 1)$  a  $x - 1$ , resp.  $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$  a  $1 - \frac{1}{x}$  (viz Obrázek 5.1) je patrné, jakým způsobem tenzory malých deformací aproximují Lagrangeův, resp. Greenův tenzor v okolí identity, tj.  $x = 1$ .

#### 5.8.4 Roztažení s rotací

Uvažujme deformaci jednotkové krychle popsanou pro materiálový bod  $\mathbf{X}$  v aktuálním popisu vztahem

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 - sX_2 \\ x_2 &= sX_1 + X_2, \\ x_3 &= X_3, \end{aligned}$$



Obrázek 5.1: Porovnání grafů funkcí, které se nacházejí na diagonále Lagrangeova tenzoru (červeně), resp. tenzoru malých deformací (modře).

kde  $s$  je reálné číslo. Deformační gradient je roven

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tudíž Greenův deformační tenzor je

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

K určení polárního rozkladu  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$  využijeme rovnosti  $\mathbf{c} = \mathbf{U}^2$  :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \sqrt{1+s^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1+s^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde pravým násobením inverzní maticí k matici  $\mathbf{U}$  dostaneme

$$\mathbf{F} \begin{pmatrix} \sqrt{1+s^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1+s^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \mathbf{R},$$

tj.

$$\begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{R},$$

odkud

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} & \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} & 0 \\ \frac{-s}{\sqrt{1+s^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku o stranách délky 1,  $s$ , a přepony o délce  $\sqrt{1+s^2}$  se dá snadno ukázat, že výrazy v matici  $\mathbf{R}$  je možné napsat pomocí úhlu otočení  $\vartheta$

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \\ \sin \vartheta &= \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}, \\ \tan \vartheta &= s, \end{aligned}$$

tj.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jedná se tedy o deformaci, která se skládá z otočení o úhel  $\vartheta$  okolo osy  $x_3$  a prodloužením v *hlavních osách deformace* s koeficientem  $\sqrt{1+s^2}$ .

Lagrangeův deformační tenzor (míra lokální deformace) je dán maticí

$$2\mathbf{e} = \mathbf{c} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} s^2 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vektor posunutí

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}(\mathbf{X}) - \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -s & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -sX_2 \\ sX_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Lagrangeův tenzor malých deformací

$$\hat{\mathbf{e}} = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_\ell} + \frac{\partial u_\ell}{\partial X_k} \right) \right]_{k,\ell \in \hat{3}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a tenzor malých rotací

$$\mathbf{I} + \hat{\mathbf{r}} = \left[ \delta_{k,\ell} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_\ell} - \frac{\partial u_\ell}{\partial X_k} \right) \right]_{k,\ell \in \hat{3}} = \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z porovnání tenzoru rotace  $\mathbf{R}$  a tenzor malých rotací  $\mathbf{I} + \hat{\mathbf{r}}$  je patrné, že jejich záměna je možná jen pro velmi malé úhly  $\vartheta \in H_0$ , kdy platí  $\sin \vartheta \approx \vartheta \approx s$  a  $\cos \vartheta \approx 1$ .

### 5.8.5 Jednoduchý smyk

Jednoduchým smykem rozumíme takovou deformaci jednotkové krychle v  $\mathbb{R}^3$ , jejíž materiálový bod  $\mathbf{X}$  má po deformaci prostorové souřadnice

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + sX_2 \\ x_2 &= X_2, \\ x_3 &= X_3, \end{aligned}$$

kde  $s$  je kladné reálné číslo. Příslušný deformační gradient  $\mathbf{F}$  má tvar

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a odpovídající Greenův tenzor deformace je

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ s & 1+s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}^2.$$

Oproti předchozímu příkladu nelze snadno odvodit tvar tenzoru protažení  $\mathbf{U}$  a proto výpočet polárního rozkladu tenzoru  $\mathbf{F}$  provedeme pomocí porovnání spekter a vlastních vektorů tenzorů  $\mathbf{c}$  a  $\mathbf{U}$ . Označíme-li



$\lambda_k$  vlastní čísla  $\mathbf{c}$ , pak  $\mathbf{U}$  bude mít vlastní čísla  $\sqrt{\lambda_k}$ , přičemž příslušné vlastní vektory (a tudíž i ortogonální matice přechodu  $\mathbf{S}$  z těchto vektorů sestavená) budou mít stejné. Vlastní čísla tenzoru  $\mathbf{c}$

$$\lambda_1 = 1 + \frac{s^2}{2} + s\sqrt{1 + \frac{s^2}{4}}, \quad \lambda_2 = 1 + \frac{s^2}{2} - s\sqrt{1 + \frac{s^2}{4}}, \quad \lambda_3 = 1,$$

se dají snadno odmocnit, čímž dostaneme spektrum tenzoru  $\mathbf{U}$

$$\sqrt{\lambda_1} = \frac{s}{2} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{4}}, \quad \sqrt{\lambda_2} = -\frac{s}{2} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{4}}, \quad \sqrt{\lambda_3} = 1.$$

Označíme-li  $s = 2 \tan \vartheta$ , lze spektrum tenzoru  $\mathbf{U}$  zapsat jako

$$\sqrt{\lambda_1} = \frac{1 + \sin \vartheta}{\cos \vartheta}, \quad \sqrt{\lambda_2} = \frac{1 - \sin \vartheta}{\cos \vartheta}, \quad \sqrt{\lambda_3} = 1.$$

Po nalezení vlastních vektorů tenzoru (**TODO**)  $\mathbf{c}$  má ortogonální matice přechodu  $\mathbf{S}$  tvar

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{2(1+\sin \vartheta)}} & \frac{-\cos \vartheta}{\sqrt{2(1-\sin \vartheta)}} & 0 \\ \sqrt{\frac{1+\sin \vartheta}{2}} & \sqrt{\frac{1-\sin \vartheta}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a proto můžeme konečně vypočítat tenzor protažení  $\mathbf{U}$  ze vztahu

$$\mathbf{U} = \mathbf{S} \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}) \mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \frac{1+\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní zbývá nalézt tenzor rotace  $\mathbf{R}$  z polárního rozkladu vyřešením soustavy  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ . Budeme postupovat stejně jako v předchozím příkladě, tj. rovnost  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$  zprava vynásobíme inverzí  $\mathbf{U}^{-1}$  k tenzoru protažení  $\mathbf{U}$ ,

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} & -\sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

čímž dostaneme

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je tedy patrné, že se jednoduchý smyk skládá z rotace s úhlem  $-\vartheta$  a dále z protažení popsané tenzorem  $\mathbf{U}$ .

Protože velikost determinantu tenzoru  $\mathbf{F}$  je rovná 1, nedochází při jednoduchém smyku ke změně objemu.

### 5.8.6 Čistý smyk

Čistým smykem rozumíme takovou deformaci jednotkové krychle v  $\mathbb{R}^3$ , jejíž materiálový bod  $\mathbf{X}$  má po deformaci prostorové souřadnice

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + sX_2 \\ x_2 &= sX_1 + X_2, \\ x_3 &= X_3, \end{aligned}$$

kde  $s$  je kladné reálné číslo. Příslušný deformační gradient má tvar

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Greenův tenzor deformace

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+s^2 & 2s & 0 \\ 2s & 1+s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}^2.$$

Obdobně jako v předchozím příkladě určíme vlastní čísla tenzoru  $\mathbf{c}$

$$\lambda_1 = (1+s)^2, \quad \lambda_2 = (1-s)^2, \quad \lambda_3 = 1,$$

resp. tenzoru protažení  $\mathbf{U}$

$$\sqrt{\lambda_1} = 1+s, \quad \sqrt{\lambda_2} = 1-s, \quad \sqrt{\lambda_3} = 1.$$

Z příslušných vlastních vektorů opět vytvoříme ortogonální matici přechodu  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pomocí které vypočítáme tenzor protažení

$$\mathbf{U} = \mathbf{S} \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}) \mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{F}.$$

Z definice polárního rozkladu  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$  a identické rovnosti  $\mathbf{F} = \mathbf{U}$  plyne, že tenzor rotace je identita a tudíž při čistém smyku nedochází k rotaci, ale jen k roztážení materiálu ve směru vlastního vektoru příslušnému k vlastnímu číslu  $\sqrt{\lambda_1}$ , resp. ke zkrácení ve směru vlastního vektoru příslušnému k vlastnímu číslu  $\sqrt{\lambda_2}$ . Relativní změna objemu je pak

$$|\det \mathbf{J}| = |\det \mathbf{F}| = 1 - s^2.$$