Matematická analýza 1 - Sbírka příkladů

Kolektiv autorů

3. května 2023

Obsah

Předmluva

Tato sbírka příkladů z matematické analýzy vznikla původně jako materiál pro cvičící tohoto předmětu. V první fázi se o její vznik nejvíce zasloužil Michal Kozák, který společně s Ondrou Pártlem, Katkou Henclovou, Mirkem Kolářem a Davidem Celným vytvořili kostru sbírky - tj. zadání třiceti příkladů pro každý týden. V další fázi byla tato sbírka rozšířena o vzorové řešení všech příkladů, v tomto bodě patří největší kredit Tomáši Smejkalovi, který odvedl zdaleka nejvíce práce a společně s Jakubem Kořenkem, Petrem Gálisem, Janou Vackovou a Zuzkou Szabovou nakonec i přes mnohá úskalí a neshody, při kterých někdy takřka tekla krev, sbírku dokončili. Vzhledem k obsáhlosti materiálu se bohužel nepodařilo odstranit veškeré překlepy a drobné chyby - jakožto poslední správce této sbírky, se kterou už se pro původní účel nepočítá, předávám sbírku do rukou studentů a prosím je, aby tento poslední úkol dokončili za nás. Pevně věřím, že práce nás všech, co jsme se na sepsání sbírky podíleli, bude zúročena v podobě brilantních výsledků studentů u zkoušky prvácké jaderňácké analýzy.

1. září 2022 Jakub Kořenek

1 První týden

1.1 Přípravný týden

Příklad 1.1 *Sečtěte* $\sum\limits_{k=1}^{n}(ak+b)$, *kde* $a, b \in \mathbb{C}$, *a* $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$, *kde* $q \in \mathbb{C}$ *a* $q \neq 1$ *a* $q \neq 0$.

(Řešení: $a\frac{(n+1)n}{2} + nb$, $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ *)*
Postup řešení:

$$\sum_{k=1}^{n}(ak+b) = \sum_{k=1}^{n} ak + \sum_{k=1}^{n} b = a\sum_{k=1}^{n} k + b\sum_{k=1}^{n} 1 = a\frac{(n+1)n}{2} + nb.$$

V případě geometrické posloupnosti označíme

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Tuto rovnost vynásobíme číslem q. *Tím dostaneme*

$$s_n q = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1}.$$

Odečtením této rovnice od předchozí získáme

$$s_n(1-q) = 1 - q^{n+1}.$$

Tedy

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Příklad 1.2 *Sečtěte* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

(Řešení: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *)*
Postup řešení: Z rovnosti $(k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1$ *přerovnáním dostaneme*

$$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1.$$

Tuto rovnici sečteme pro $k = 1, \ldots, n$. *Tím se členy na levé straně odečtou (tzv. teleskopická řada) a zbyde pouze poslední pro* $k = n$. *Tak dostaneme rovnici*

$$n^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

Jediná neznámá suma je ta s k^2 *a dostáváme tedy výsledek*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Poznámka 1.1 *Zobecnění* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$, *pro* $p \in \mathbb{N}$ *řeší* ***Faulhaberova formule:***

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \sum_{k=2}^{p} \frac{B_k}{k!} \left(\frac{p!}{(p-k+1)!}\right) n^{p-k+1},$$

kde B_k *je* k*-té Bernoulliho číslo definované pomocí křivkového integrálu*

$$B_k = \frac{n!}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_{|z|=1} \frac{z}{e^z - 1} \frac{\mathrm{d}z}{z^{k+1}}.$$

.

Příklad 1.3 *Sečtěte* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(kx)$ *pro pevné* $x \in \mathbb{R} - \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

(Řešení: $S_n = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ *)*
Postup řešení: Jelikož

$$\sin(kx)\sin(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}\left[\cos\left([k-1/2]\,x\right) - \cos\left([k+1/2]\,x\right)\right],$$

platí

$$S_n \sin(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}\left[\cos(\frac{x}{2}) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right] = \sin(\frac{nx}{2})\sin\frac{(n+1)x}{2}.$$

Příklad 1.4 *Dokažte matematickou indukcí binomickou větu.*

Postup řešení: Chceme ukázat identitu

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

pro $x, y \in \mathbb{R}$ *a* $n \geq 1$.

- $n = 1$*:* $LS = x + y$, $PS = x + y$*. Rovnost* $LS = PS$ *platí.*
- $n - 1 \to n$*: Nechť platí* $(x+y)^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{(n-1)-k} y^k$*. Budeme chtít ukázat, že*

vztah platí i pro n. Platí:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)(x+y)^{n-1} \\
&\overset{IP}{=} (x+y)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{(n-1)-k}y^k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{n-k}y^k + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{(n-1)-j}y^{j+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{n-k}y^k + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{(j+1)-1}x^{n-(j+1)}y^{j+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{n-k}y^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{n-k}y^k \\
&= \binom{n-1}{0}x^n y^0 + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{n-k}y^k + \binom{n-1}{n-1}x^0y^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}x^{n-k}y^k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right]x^{n-k}y^k + \binom{n}{n}x^0y^n + \binom{n}{0}x^n y^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k,
\end{aligned}
$$

kde jsme ve třetím řádku použili substituci $k = j + 1$.

Příklad 1.5 *Dokažte matematickou indukcí Moivrovu větu. Nechť $z = |z|(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $z^n = |z|^n(\cos n\theta + \boldsymbol{i}\sin n\theta)$.*

Postup řešení: Nechť $z = |z|(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)$. Pak matematickou indukcí dostáváme

- $n = 1$ *: jasné*
- $n \to n+1$*: Užijeme indukční předpoklad*

$$z^{n+1} = z^n \cdot z \overset{IP}{=} [|z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)] \cdot [|z|(\cos\theta + i\sin\theta)] .$$

Pak

$$
\begin{aligned}
z^{n+1} &= |z|^n|z|(\cos n\theta + i\sin n\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= |z|^{n+1}(\cos n\theta\cdot\cos\theta + \cos n\theta\cdot i\sin\theta + i\sin n\theta\cdot\cos\theta + i^2\sin n\theta\cdot\sin\theta)
\end{aligned}
$$

Jelikož $i^2 = -1$, pak $i^2\sin n\theta\cdot\sin\theta = -\sin n\theta\cdot\sin\theta$. Zároveň platí formule

$$
\begin{aligned}
\sin(n\theta+\theta) &= \sin n\theta\cdot\cos\theta + \cos n\theta\cdot\sin\theta, \\
k\sin(n\theta+\theta) &= k\sin n\theta\cdot\cos\theta + \cos n\theta\cdot k\sin\theta, \\
\cos(n\theta+\theta) &= \cos n\theta\cdot\cos\theta - \sin n\theta\cdot\sin\theta.
\end{aligned}
$$

Použitím těchto identit získáme

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= |z|^{n+1}\left[\cos(n\theta+\theta)+i\sin(n\theta+\theta)\right] \\ &= |z|^{n+1}\left[\cos((n+1)\theta)+i\sin((n+1)\theta)\right]. \end{aligned}$$

Příklad 1.6 *Matematickou indukcí dokažte, že platí*

$$\frac{1\cdot 3\cdot \dots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \dots \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Postup řešení: Pomocí produktu můžeme nerovnici přepsat na tvar

$$\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} < \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Nyní přestoupíme k indukci:

- $n = 1$: $\frac{1}{2} < \frac{1}{1}$. *Tato nerovnost platí.*
- $n \to n+1$: *Vyjdeme z levé strany a pomocí jednoduchých úprav a indukčního předpokladu dostáváme*

$$\frac{\prod_{k=1}^{n+1}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{2n+1}{2(n+1)}\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} \overset{IP}{<} \frac{2n+1}{2(n+1)}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Nyní stačí ukázat $\frac{2n+1}{2n+2}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$. *Umocněním této rovnice na třetí dostáváme*

$$\begin{aligned} \frac{(2n+1)^3}{(2n+2)^3}\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1} &\Leftrightarrow \frac{(2n+1)^3}{n}\frac{1}{2^3(n+1)^3} \leq \frac{1}{n+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{(2n+1)^3}{8n(n+1)^2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 8n^3+12n^2+6n+1 \leq 8n^3+16n^2+8n \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 4n^2+2n-1. \end{aligned}$$

což jistě platí. Důkaz je hotov.

1.2 Rovnice a nerovnice

Příklad 1.7 *Určete všechna* $a \in \mathbb{R}$*, pro která má rovnice*

$$\frac{x}{x-a} = a+1$$

alespoň jeden záporný kořen.

(Řešení: $a \in \{0\} \cup (-\infty, -1)$)

Postup řešení: Výraz má smysl pro $x \neq a$. Vynásobením rovnice číslem $x - a \neq 0$ dostáváme

$$x = ax - a^2 + x - a \Leftrightarrow ax = a(a+1).$$

Nyní rozdělíme výpočet na dvě možnosti: 1. $a = 0$ a 2. $a \neq 0$. V prvém případě rovnici řeší každé reálné číslo různé od 0 (tu jsme vyloučili hned první úpravou) a tedy jistě i záporné. Nula je tedy řešení. V druhém případě můžeme nenulovým a vydělit a získat řešení

$$x = a + 1.$$

To bude záporné, pokud $a < -1$.

Příklad 1.8 *Řešte v $\mathbb{R}^2$ soustavu*

$$\begin{aligned} x + (b-1)y &= 1, \\ (b+1)x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

s reálným parametrem b.
(Řešení: $b = 2$ nemá řešení, $b = -2$ nekonečně řešení ($x = 1 + 3y$, $y \in \mathbb{R}$), v ostatních případech: $x = \frac{1}{2-b}$ a $y = \frac{1}{b-2}$)

Postup řešení: Z první rovnice můžeme vyjádřit $x = 1 - (b-1)y$ a dosadit do druhé:

$$(b+1)(1-(b-1)y) + 3y = -1 \Leftrightarrow (-b^2+4)y = -2 - b.$$

Vydělením výrazem $4 - b^2$ pro $b \neq \pm 2$ dostáváme

$$y = -\frac{2+b}{4-b^2} = \frac{1}{b-2}$$

a zpětným dosazením $x = 1 - \frac{b-1}{b-2} = \frac{1}{2-b}$. Pokud $b = 2$ dostáváme rovnost $0 = -4$, která jistě neplatí, a tedy v tomto případě nemá soustava řešení. V posledním případě $b = -2$ dostáváme rovnost $0 = 0$, a máme tedy nekonečně mnoho řešení.

Poznámka: Dosadíme-li $b = -2$ do zadání, dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} x - 3y &= 1, \\ -x + 3y &= -1, \end{aligned}$$

které jsou až na znaménko identické. Proto máme nekonečně mnoho řešení - viz LA.

Příklad 1.9 *Určete, pro které hodnoty reálného parametru $a \in \mathbb{R}$ má soustava*

$$\begin{aligned} ax - 2y &= 3, \\ 3x + ay &= 4 \end{aligned}$$

množinu řešení S, která je podmnožinou čtvrtého kvadrantu v $\mathbb{R}^2$, tj.

$$S \subset \{(x,y)|x > 0 \wedge y < 0\}.$$

(Řešení: $a \in \left(-\frac{8}{3}; \frac{9}{4}\right)$)

Postup řešení: Rozdělíme na dva případy: 1. pokud $a = 0$ pak $y = \frac{-2}{3}$ a $x = \frac{3}{4}$, tj. máme jedno řešení. 2. Pro nenulové a z první rovnice dostáváme $x = \frac{3+2y}{a}$. Dosazením do druhé získáme

$$\frac{3(3+2y)}{a} + ay = 4.$$

Vynásobením této rovnice číslem a a následnou úpravou dostaneme

$$(6+a^2)y = 4a - 9.$$

Jelikož $6 + a^2 > 0$ a chceme $y < 0$, potřebujeme, aby $4a - 9 < 0$, tj. $a < \frac{9}{4}$. Zpětným dosazením zjistíme x:

$$x = \frac{3 + 2\frac{4a-9}{6+a^2}}{a} = \frac{3a+8}{6+a^2}.$$

Tedy $x > 0$, pokud $a > \frac{-8}{3}$.

Příklad 1.10 *Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici*

$$\frac{(x^2-1)(x-2)^2(x-3)}{x} \geq 0.$$

(Řešení: $x \in (-\infty, -1\rangle \cup (0, 1\rangle \cup \{2\} \cup \langle 3; +\infty)$)
Postup řešení:

Levá strana nerovnice má smysl pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nejjednodušší způsob je graficky přes body, ve kterých funkce mění znaménko. V tomto případě jsou to body $x = -1, 0, 1, 3$. Pro $x < -1$ je výraz na levé straně kladný, a musí být tedy kladný i na intervalu $(0, 1)$ a $(3, +\infty)$. Dále vidíme, že levá strana je rovna nule pro x rovno -1, 1, 2 a 3.

Příklad 1.11 *Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici*

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

kde a, b, c jsou reálné parametry.
(Řešení: Označme $D = b^2 - 4ac$ a $x_1 = (-b + \sqrt{D})/(2a)$ a $x_2 = (-b - \sqrt{D})/(2a)$, pokud $D \geq 0$. Řešení je následující: Pro $a > 0 \wedge D > 0$ je $x \in (-\infty, x_2) \cup (x_1, +\infty)$. Pro $a > 0 \wedge D = 0$ je $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{2a}\}$. Pro $a > 0 \wedge D < 0$ je $x \in \mathbb{R}$. Pro $a < 0 \wedge D > 0$ je $x \in (x_1, x_2)$. Pro $a < 0 \wedge D \leq 0$ řešení neexistuje. Pro $a = 0 \wedge b > 0$ je $x \in (-c/b, +\infty)$. Pro $a = 0 \wedge b < 0$ je $x \in (-\infty, -c/b)$. Pro $a = 0 \wedge b = 0 \wedge c > 0$ je $x \in \mathbb{R}$. Pro $a = 0 \wedge b = 0 \wedge c \leq 0$ řešení neexistuje.)
Postup řešení:

Příklad rozdělíme podle parametru a.

i. *$a = 0$: pak máme lineární nerovnici. Pro $b > 0$ je řešení $x > \frac{-c}{b}$, pro $b = 0 \wedge c > 0$ je řešení $x \in \mathbb{R}$, pro $b < 0$ je řešení $x < -\frac{c}{b}$. V ostatních případech ($b = 0 \wedge c \le 0$) řešení neexistuje.*

ii. *$a > 0$. Zjistíme nulové body. Diskriminant $D = b^2 - 4ac$. Rozlišíme tři případy:*

- *$D > 0$, pak máme dva nulové body $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ a řešení nerovnice $x \in (-\infty, x_2) \cup (x_1, +\infty)$ (platí $x_1 > x_2$).*
- *$D = 0$, pak máme jeden kořen. Protože $a > 0$, parabola $y = ax^2 + bx + c$ je nad osou x a této osy se v jednom bodě dotýká. Řešením jsou proto všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{2a}\}$.*
- *$D < 0$ Pak nemá žádný kořen. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ celá leží nad osou x a řešením jsou všechna reálná čísla $x \in \mathbb{R}$.*

iii. *$a < 0$. Obdobná diskuze jako v předchozím bodě. Pokud $D > 0$, řešení je (x_1, x_2) (platí $x_2 > x_1$). V dalších dvou případech již řešení neexistuje*

Příklad 1.12 *Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici*

$$|ax^2 - b| < a,$$

s reálnými parametry a, b.
(Řešení: Označme $\alpha = b/a$ pro $a > 0$. Řešení je následující: Pro $a \le 0$ a pro $a > 0 \wedge \alpha \le -1$ řešení neexistuje. Pro $a > 0 \wedge \alpha \in (-1, 1)$ je $x \in (-\sqrt{\alpha+1}, \sqrt{\alpha+1})$. Pro $a > 0 \wedge \alpha \ge 1$ je $x \in (-\sqrt{\alpha+1}, -\sqrt{\alpha-1}) \cup (\sqrt{\alpha-1}, \sqrt{\alpha+1})$.)
Postup řešení:

Pro $a \le 0$ řešení neexistuje. Stačí se tedy omezit na $a > 0$. Nejdříve vydělíme nerovnici číslem a a označíme $\alpha = b/a$. Dostaneme

$$|x^2 - \alpha| < 1,$$

čili (jak se můžeme přesvědčit nakreslením situace na číselnou osu) $\alpha - 1 < x^2 < \alpha + 1$. Nyní obě nerovnice vyřešíme.

- *$\alpha - 1 < x^2$. Pro $\alpha - 1 < 0$ (tedy $\alpha < 1$) nerovnost platí vždy. Pro $\alpha - 1 \ge 0$ můžeme psát*

  $$\alpha - 1 < x^2 \;\Leftrightarrow\; 0 < x^2 - \alpha + 1 \;\Leftrightarrow\; 0 < (x - \sqrt{\alpha - 1})(x + \sqrt{\alpha - 1}).$$

  Řešením jsou proto všechna $x \in (-\infty, -\sqrt{\alpha - 1}) \cup (\sqrt{\alpha - 1}, +\infty)$.

- *$x^2 < \alpha + 1$. Pro $\alpha + 1 \le 0$ (tedy $\alpha \le -1$) nerovnice nemá řešení. Pro $\alpha + 1 > 0$ můžeme psát*

  $$x^2 < \alpha + 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - \alpha - 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; (x - \sqrt{\alpha + 1})(x + \sqrt{\alpha + 1}) < 0.$$

  Řešením jsou proto všechna $x \in (-\sqrt{\alpha + 1}, \sqrt{\alpha + 1})$.

Celá soustava výše zmíněných nerovnic (a tedy i původní nerovnice) má proto (pro $\alpha > 0$) následující řešení:

- $\alpha \leq -1$*: žádné řešení.*
- $\alpha \in (-1, 1)$*:* $x \in (-\sqrt{\alpha+1}, \sqrt{\alpha+1})$.
- $\alpha \geq 1$*:* $x \in (-\sqrt{\alpha+1}, -\sqrt{\alpha-1}) \cup (\sqrt{\alpha-1}, \sqrt{\alpha+1})$.

Příklad 1.13 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *rovnici*

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{1-x}} = 1+\sqrt{x}.$$

(Řešení: $x \in \{1\}$)
Postup řešení: Nejprve najdeme množinu přípustných hodnot x. V odmocnině nesmí být záporné číslo. Dostáváme tak podmínky:

$$x+3-4\sqrt{1-x} \geq 0, \qquad 1-x \geq 0, \qquad x \geq 0.$$

Druhá a třetí dávají omezení $x \in \langle 0, 1\rangle$. První po úpravě a umocnění dává

$$(x+3)^2 \geq 16(1-x) \Leftrightarrow x^2+22x-7 \geq 0,$$

tedy $x \in (-\infty, -11-8\sqrt{2}) \cup (-11+8\sqrt{2}, +\infty)$. Obor přípustných hodnot je $x \in \langle -11+8\sqrt{2}, 1\rangle$. Přejdeme nyní k řešení samotné nerovnice. Umocněním získáme

$$\begin{aligned} x+3-4\sqrt{1-x} &= 1+2\sqrt{x}+x, \\ 2\sqrt{1-x}+\sqrt{x} &= +1. \end{aligned}$$

Po opětovném umocnění dostáváme

$$4\sqrt{x(1-x)} = -3+3x.$$

Z této rovnice pozorujeme, že řešení musí splňovat podmínku $x \geq 1$ (aby $-3+3x \geq 0$). Jediné možné řešení je tedy $x = 1$ o čemž se přesvědčíme dalším postupem. Opětovným umocněním dostáváme kvadratickou rovnici

$$16x(1-x) = 9x^2-18x+9$$

s řešením $x = 1$ a $x = \frac{9}{25}$. Řešení $x = \frac{9}{25}$ nevyhovuje podmínce $x \geq 1$, a musíme ho tedy vyloučit. O jeho vyloučení se můžeme přesvědčit i zkouškou.

Příklad 1.14 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *rovnici*

$$\sqrt[3]{\frac{25-x}{3+x}} + 3\sqrt[3]{\frac{3+x}{25-x}} = 4.$$

(Řešení: $x \in \{11, -2\}$)

Postup řešení: Substitucí $y = \sqrt[3]{\frac{25-x}{3+x}}$ pro $x \notin \{-3, 25\}$ přejde původní rovnice na čitelnější tvar

$$y + \frac{3}{y} = 4.$$

Vynásobením y získáme kvadratickou rovnici, která má řešení $y_1 = 1$ a $y_2 = 3$. Zpětným dosazením do substituce získáme řešení $x_1 = 11$ a $x_2 = -2$.

Příklad 1.15 *Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici*

$$\sqrt{x^2 + b^2} + b = x$$

s reálným parametrem b.
(Řešení: Pro $b = 0$ je $x \in \mathbb{R}_0^+$. Pro $b < 0$ je $x = 0$. Pro $b > 0$ nemá řešení.)
Postup řešení: Rovnici přepíšeme na tvar $\sqrt{x^2 + b^2} = x - b$. Aby měl výraz smysl, musí platit $x - b \geq 0$, tj. $x \geq b$. Je-li $b = 0$, pak řešením jsou $x \in \mathbb{R}_0^+$. Pro ostatní b si výraz umocněním upravíme na

$$x^2 + b^2 = x^2 + b^2 - 2bx.$$

Jediným možným řešením může (ale nemusí) být $x = 0$: Je-li $b < 0$, pak řešením je $x = 0$. Pokud $b > 0$, pak řešení $x = 0$ nevyhovuje podmínce $x \geq b$. Celkově tedy

- *$b = 0$ řešením je libovolné $x \in \mathbb{R}_0^+$*
- *$b < 0$ řešení $x = 0$.*
- *$b > 0$ řešení neexistuje.*

Příklad 1.16 *Pro která reálná čísla m bude mít rovnice*

$$4x^2 - 8mx - 6m + 9 = 0$$

jeden kořen roven trojnásobku druhého kořene?
(Řešení: $m \in \{1, -3\}$)
Postup řešení: Využijeme Vietovy vzorce. Pro vztahy mezi kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ platí

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

(snadno se odvodí sečtením/vynásobením obecného vzorce pro kořeny). Dostáváme tak rovnice

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_2, \\ x_1 + x_2 &= \frac{8m}{4}, \\ x_1 x_2 &= \frac{-6m + 9}{4}. \end{aligned}$$

Dosazením první rovnice do druhé a třetí obdržíme:

$$4x_2 = 2m,$$
$$3x_2^2 = \frac{-6m+9}{4} \Leftrightarrow \frac{3m^2}{4} = \frac{-6m+9}{4} \Leftrightarrow 3m^2 + 6m - 9 = 0.$$

Tato rovnice má dvě řešení $m_1 = 1$ a $m_2 = -3$, což jsou řešení i naší úlohy.

1.3 Logaritmy a logaritmické rovnice

Poznámka 1.2 *Jednodušší příklady:*

- *Zjednodušte:* $\log_{25} \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$. *Řešení: -1/6*
- *Zjednodušte* $\log_a \left[\left\{a\left[a\,(a)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]$. *Řešení:* $\frac{17}{24}$

Příklad 1.17 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *rovnici*

$$x^{\log^2 x^2 - 3\log(x) - \frac{9}{2}} = 10^{-2\log(x)}.$$

(Řešení: $x \in \left\{1, 10^{5/4}, 10^{-1/2}\right\}$)

Postup řešení: Výrazy v zadání mají smysl pro $x > 0$. Zlogaritmováním a použitím vztahů pro logaritmus dostaneme

$$\left(\log^2 x^2 - 3\log(x) - \frac{9}{2}\right)\log x = -2\log x \log 10.$$

Vidíme, že jedno řešení je $x_1 = 1$. Pro $x \neq 1$ podělíme $\log x$, čímž získáme

$$4\log^2 x - 3\log(x) - \frac{9}{2} = -2,$$

kde jsme využili vztahy $\log 10 = 1$ a $\log^2(x^2) = (\log(x^2))^2 = (2\log x)^2 = 4\log^2 x$. Dostali jsme kvadratickou rovnici, kterou substitucí $y = \log x$ zjednodušíme na tvar

$$4y^2 - 3y - \frac{5}{2} = 0.$$

Řešení jsou $y_2 = \frac{5}{4}$ a $y_3 = -\frac{1}{2}$. Původní rovnice má tedy řešení $x_2 = 10^{5/4}$ a $x_3 = 10^{-1/2}$.

Příklad 1.18 *Řešte v* $\mathbb{R}^2$ *soustavu rovnic*

$$log_5 x + 3^{log_3 y} = 7,$$
$$x^y = 5^{12}.$$

(Řešení: $(x,y) \in \{(125,4),(625,3)\}$)

Postup řešení: Logaritmováním druhé rovnice logaritmem o základu 5 dostáváme

$$y \log_5 x = 12 \log_5 5 = 12.$$

Dosazením do první rovnice a využitím faktů, že logaritmus a exponenciála (o stejném základu) jsou navzájem inverzní funkce a že platí $y \neq 0$, dostaneme

$$\frac{12}{y} + y = 7.$$

Vynásobením y dostaneme kvadratickou rovnici s řešením $y_1 = 4$ a $y_2 = 3$, kterým ze vztahu $x = 5^{12/y}$ odpovídají $x_1 = 125$ a $x_2 = 625$.

1.4 Goniometrické rovnice

Příklad 1.19 *Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici*

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}.$$

(Řešení: $x \in \left\{\frac{5\pi}{12} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$)

Postup řešení: Protože $\sqrt{3} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{6}$ můžeme levou stranu rovnice přepsat na

$$\sin x + 2\cos(\frac{\pi}{6})\cos x = \sin x + 2\left[\cos(x - \frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{\pi}{6})\sin x\right] = 2\cos(x - \frac{\pi}{6}).$$

Řešenou rovnici lze tedy ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$2\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$$

s řešením

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, \\ x_2 - \frac{\pi}{6} &= -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Příklad 1.20 *Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici*

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 2\cos 2x.$$

(Řešení: $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{12} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$)

Postup řešení: Upravíme levou a pravou stranu:

$$\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \frac{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x},$$
$$2\cos 2x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x).$$

Tím dostáváme

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x).$$

Ihned vidíme řešení $\cos x = \sin x$, *tj.* $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. *Pro ostatní* $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ *můžeme rovnici vydělit* $\cos x - \sin x \neq 0$, *čímž získáme*

$$\frac{1}{2} = (\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \sin 2x.$$

Výsledná rovnice má řešení

$$2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{12} + k\pi,$$
$$2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7\pi}{12} + k\pi.$$

Příklad 1.21 *Řešte v* $\mathbb{R}$

$$|\cos x|^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1.$$

(Řešení: $x \in \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ *)*

Postup řešení: Výraz má smysl pro $\cos(x) \neq 0$, *tj. pro* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, *kde* $k \in \mathbb{Z}$ *(jinak dostáváme nedefinovaný výraz* 0^0*). Rovnici zlogaritmujeme, čímž dostaneme*

$$\left(\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}\right)\log|\cos x| = 0.$$

Dostáváme součin dvou výrazů, který má být roven 0. První výraz po substituci $u = \sin(x)$ *přejde na tvar*

$$u^2 - \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}$$

s kořeny $u_1 = 1$ *a* $u_2 = \frac{1}{2}$. *Po zpětném dosazení do substituce dostáváme*

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$
$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad a \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

Řešení x_1 *musíme vyloučit, neboť jsme se omezili na* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. *Další řešení plynou z podmínky* $\log|\cos(x)| = 0 \Leftrightarrow |\cos(x)| = 1 \Leftrightarrow \cos(x) = \pm 1$, *tj.* $x = k\pi$. *Řešení naší úlohy jsou*

$$x_1 = k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Příklad 1.22 *Řešte rovnici v* $\mathbb{R}$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

(Řešení: $x \in \left\{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$ *)*

Postup řešení: Na členy s $1x$ *a* $3x$ *využijeme vzorce*

$$\begin{aligned}\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right),\\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\end{aligned}$$

Tím dostaneme

$$\begin{gathered}2\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) + \sin(2x) = 2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) + \cos(2x)\\ 2\sin(2x)\cos(-x) + \sin(2x) = 2\cos(2x)\cos(-x) + \cos(2x)\end{gathered}$$

S využitím sudosti $\cos(x) = \cos(-x)$ *a faktorizací dostaneme rovnici*

$$[\sin(2x) - \cos(2x)]\,[2\cos(x) + 1] = 0.$$

Řešením rovnice $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ *dostaneme* $x_1 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ *a* $x_2 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$. *Další řešení získáme z podmínky* $\sin(2x) = \cos(2x) \Leftrightarrow \mathrm{tg}(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, *tj.* $x_3 = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$. *Celkem*

$$x_1 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \quad x_3 = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Příklad 1.23 *Řešte nerovnici v* $\mathbb{R}$

$$2\sin x \leq \frac{1}{\cos x}.$$

(Řešení: $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\langle 0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)\right] \cup \{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ *)*

Postup řešení: Obě funkce jsou 2π *periodické. Stačí se tedy omezit na interval délky* 2π, *např.* $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$. *Na tomto intervalu má výraz smysl, pokud* $x \neq \frac{\pi}{2}$ *a* $x \neq \frac{3\pi}{2}$. *Nyní bychom chtěli nerovnici vynásobit* $\cos x$. *Musíme proto rozlišit případy, kdy je cosinus kladný a kdy záporný.*

- $\cos x > 0 \Leftrightarrow x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. *Vynásobením* $\cos x$ *dostaneme*

  $$2\sin x\cos x = \sin 2x \leq 1$$

  což platí vždy.

- $\cos x < 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. *Vynásobením* $\cos x$ *dostaneme*

$$\sin 2x \geq 1.$$

Protože $\sin\alpha \leq 1$ *řešíme pouze případ* $\sin 2x = 1$, *tj.* $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. *Což je to samé jako* $x \in \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. *Ve zkoumaném intervalu* $x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ *leží pouze body* $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$.

Celkem má množina řešení tvar

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \middle| (\exists k \in \mathbb{Z})(x \in \langle 0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \vee x \in (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi) \right\},$$

neboli

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\langle 0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \cup \{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\} \right].$$

Příklad 1.24 *Řešte v* $\mathbb{R}$

$$16^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{2\cos 2x} = 10.$$

(Řešení: $x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$ *)*

Postup řešení: Úpravami převedeme rovnici na tvar

$$2^{4\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{2\cos^2 x - 2\sin^2 x} = 2^{4\sin^2 x} + 4 \cdot 2^2 2^{-4\sin^2 x} = 10.$$

Použitím substituce $y = 2^{4\sin^2 x} \neq 0$ *dostaneme*

$$y + 16\frac{1}{y} = 10 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 10y + 16 = 0.$$

Tato rovnice má řešení $y = 2$ *a* $y = 8$. *Zpětnou substitucí dostaneme pro* $y = 2$ *rovnici*

$$2 = 2^{4\sin^2 x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} = \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = |\sin x|$$

s řešením $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi$ *a* $x_2 = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. *V druhém případě pro* $y = 8$ *máme*

$$8 = 2^3 = 2^{4\sin^2 x} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} = \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = |\sin x|.$$

Tato rovnice má řešení $x_3 = \frac{\pi}{3} + k\pi$ *a* $x_4 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Příklad 1.25 *Určete všechna čísla* $x \in \mathbb{R}$ *tak, aby čtvrtý člen binomického rozvoje*

$$\left(x^{\frac{1}{2(1+\log x)}} + \sqrt[12]{x} \right)^6$$

byl roven 200.

(Řešení: $x \in \left\{10, 10^{-4}\right\}$)

Postup řešení: Výraz má smysl pro $x > 0$ a zároveň $\log x \neq -1$, tj. $x \neq \frac{1}{10}$. Binomická věta říká $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Čtvrtý člen získáme pro $k = 3$. Proto požadujeme

$$\binom{6}{3} \left(x^{\frac{1}{2(1+\log x)}}\right)^3 \left(\sqrt[12]{x}\right)^3 = 200.$$

Po úpravě dostaneme

$$20x^{\frac{3}{2(1+\log x)}} x^{\frac{1}{4}} = 200 \quad \Rightarrow \quad x^{\frac{3}{2(1+\log x)}+\frac{1}{4}} = 10.$$

Na rovnici aplikujeme dekadický logaritmus

$$\left(\frac{3}{2(1+\log x)} + \frac{1}{4}\right) \log x = 1$$

a zavedeme substituci $\log x = y$

$$\left(\frac{3}{2(1+y)} + \frac{1}{4}\right) y = 1.$$

Převedením na společného jmenovatele a ekvivalentními úpravami převedeme rovnici na kvadratickou

$$y^2 + 3y - 4 = 0,$$

která má kořeny $y_1 = 1$ a $y_2 = -4$. Hledáme nyní x splňující $y = \log x$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \log x_1 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 10, \\ \log x_2 = -4 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 10^{-4}. \end{aligned}$$

Celkově tedy $x \in \{10, 10^{-4}\}$.

1.5 Komplexní čísla

Příklad 1.26 *Zapište číslo $z = \frac{\boldsymbol{i}^{10}-1}{\boldsymbol{i}^5+1}$ v goniometrickém tvaru.*
(Řešení: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + \boldsymbol{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right)$)

Postup řešení: Nejprve číslo upravíme do algebraického tvaru, ze kterého snadno získáme tvar goniometrický. Platí

$$z = \frac{\boldsymbol{i}^{10} - 1}{\boldsymbol{i}^5 + 1} = \frac{(\boldsymbol{i}^5 - 1)(\boldsymbol{i}^5 + 1)}{\boldsymbol{i}^5 + 1} = \boldsymbol{i}^5 - 1 = \boldsymbol{i} - 1.$$

Velikost čísla je $|z| = \sqrt{2}$ a pro jeho úhel φ platí

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \wedge \ \cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{3}{4}\pi.$$

Číslo z v goniometrickém tvaru má proto tvar

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + \boldsymbol{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right).$$

Příklad 1.27 *Řeště v $\mathbb{C}$:*

$$z^2 - 4\boldsymbol{i}z - 3 = 0.$$

(Řešení: $z \in \{\boldsymbol{i}, 3\boldsymbol{i}\}$)

Postup řešení: Diskriminant této kvadratické rovnice je roven

$$D = (-4\boldsymbol{i})^2 - 4 \cdot (-3) = -4.$$

Řešení jsou tedy

$$z_{1,2} = \frac{4\boldsymbol{i} \pm \boldsymbol{i}\sqrt{|-4|}}{2} = \begin{cases} 3\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i} \end{cases}.$$

Alternativní řešení: pomocí Vietových vzorců přepíšeme rovnici na tvar

$$(z - 3i)(z - i) = 0,$$

ze kterého už rovnou vidíme kořeny.

(Hádání kořenů tímto způsobem zrychluje postup řešení kvadratických rovnic).

Příklad 1.28 *Řešte v $\mathbb{C}$:*

$$(5 - \frac{1}{\boldsymbol{i}})\overline{z} + 2z = 22\boldsymbol{i}.$$

(Řešení: $z \in \{1 - 7\boldsymbol{i}\}$)

Postup řešení: Úpravou $\frac{1}{\boldsymbol{i}} = -\boldsymbol{i}$ a dosazením $z = x + \boldsymbol{i}y$, kde $x, y \in \mathbb{R}$, dostaneme

$$\begin{aligned} (5 + \boldsymbol{i})x - \boldsymbol{i}(5 + \boldsymbol{i})y + 2x + \boldsymbol{i}2y &= 22\boldsymbol{i}, \\ (7x + y) + (x - 3y)\boldsymbol{i} &= 0 + 22\boldsymbol{i}. \end{aligned}$$

Porovnáním reálných a imaginárních složek dostaneme dvě rovnice pro dvě neznáme $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 7x + y &= 0, \\ x - 3y &= 22. \end{aligned}$$

Soustava má řešení $x = 1$ a $y = -7$. Řešení původní rovnice je tedy $z = 1 - 7\boldsymbol{i}$.

Příklad 1.29 *V Gaussově rovině zakreslete množinu řešení v* $\mathbb{C}$ *rovnice*

$$(|z-\boldsymbol{i}|-|z+3\boldsymbol{i}|)\,(|z|-2)=0.$$

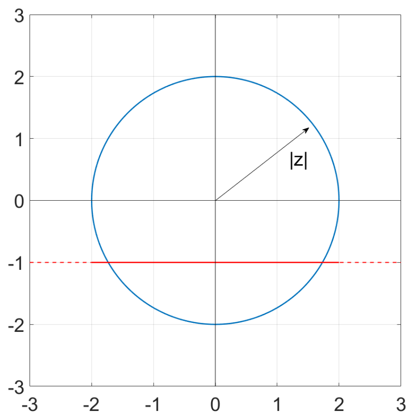
(Řešení: Na Obrázku 1.)
Postup řešení: Prvním řešení je množina bodů $|z|=2$*, což v Gaussově rovině představuje kružnici se středem v počátku a poloměrem 2. V druhém případu dostáváme rovnici*

$$|z-\boldsymbol{i}|=|z+3\boldsymbol{i}| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y+3)^2},$$

kde $z=x+\boldsymbol{i}y$ *pro* $x,y\in\mathbb{R}$*. Po umocnění a roznásobení přejde rovnice na tvar*

$$-2y+1=6y+9$$

s jediným řešením $y=-1$ *(závislost na* x *vypadne). Toto řešení představuje v Gaussově rovině přímku, která je rovnoběžná s osou* x *a která prochází bodem* $[0,-1]$*, viz obrázek 1.*



Obrázek 1: Řešení rovnice $(|z-\mathbf{i}|-|z+3\mathbf{i}|)\,(|z|-2)=0$ v $\mathbb{C}$

Příklad 1.30 *V* $\mathbb{C}$ *řešte rovnici*

$$z^4-z^3+z^2-z+1=0.$$

(Řešení: $z\in\left\{\cos\varphi+\boldsymbol{i}\sin\varphi|\varphi\in\left\{\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\frac{7\pi}{5},\frac{9\pi}{5}\right\}\right\}$ *)*

Postup řešení: jelikož číslo $z=-1$ *není řešení rovnice (jednoduše ověřitelné), můžeme rovnici vynásobit číslem* $(z+1)$ *a získat*

$$z^5=-1.$$

Tuto rovnici vyřešíme pomocí Moivrovy věty. Jelikož $z = |z|(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)$*, platí*

$$z^5 = |z|^5(\cos 5\varphi + \boldsymbol{i}\sin 5\varphi) = -1 = 1(\cos\pi + \boldsymbol{i}\sin\pi).$$

Nyní porovnáme velikost a úhel, které se musejí rovnat. Pro velikost dostáváme

$$|z| = 1$$

a pro úhel

$$5\varphi = \pi + 2k\pi.$$

Zde nesmíme zapomenout na periodu funkce cosinus. Z předcházející rovnice dostáváme pro různé volby $k \in \mathbb{Z}$ *celkem pět různých řešení:*

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{5}, \quad \varphi_1 = \frac{3\pi}{5}, \quad \varphi_2 = \pi, \quad \varphi_3 = \frac{7\pi}{5}, \quad \varphi_4 = \frac{9\pi}{5}.$$

Nyní ale musíme vyloučit φ_2*, ten by totiž dával řešení* $z = -1$*, které jsme již vyloučili z oboru řešení a řešením původní rovnice být nemůže. Tohoto si lze všimnout, jelikož na počátku jsme měli rovnici čtvrtého řádu, musíme proto získat 4 různá řešení. Ne víc nebo méně.*

Poznámka: Jedná se o reciprokou rovnici 4. stupně. Pokud ji jako reciprokou rovnici budeme řešit (speciálními substitucemi), tak vyjdou kořeny $z = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{4} \pm \frac{\sqrt{-1\pm2\sqrt{5}}}{2}$.

2 Druhý týden

2.1 Výroková a predikátová logika

Příklad 2.1 *Znegujte výroky: „Pokud bude hezky a budu-li mít čas, půjdu si zaběhat.“, „Existuje člověk vysoký 2 metry.“, „$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in N, n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon)$“.*
(Řešení:

- *Bude hezky a budu mít čas a nepůjdu si zaběhat.*
- *Neexistuje člověk vysoký 2 metry.*
- $(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \in N, n > n_0)(|a_n - a| \geq \varepsilon)$

)

Příklad 2.2 *Zapište výrok: „Platí A i B nebo neplatí A ani B.“ Výrok zjednodušte. (Pozn: Je důležité uzávorkování?)*
(Řešení: $[(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)] \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$. Uzávorkování důležité je.)

Postup řešení: Výsledek plyne z následující série úprav

$$
\begin{aligned}
(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) &\Leftrightarrow [A \vee (\neg A \wedge \neg B)] \wedge [B \vee (\neg A \wedge \neg B)] \\
&\Leftrightarrow [(A \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B)] \wedge [(B \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B)] \\
&\Leftrightarrow (A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg A) \\
&\Leftrightarrow (B \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B) \\
&\Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B),
\end{aligned}
$$

kde první dvě ekvivalence plynou z distributivního zákona, třetí je důsledek toho, že $(A \vee \neg A)$ a $(B \vee \neg B)$ je vždy pravda, čtvrtá je definice implikace a pátá definice ekvivalence.

Příklad 2.3 *Ukažte, že platí*

$$
\begin{aligned}
(A \vee (B \wedge C)) &\Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)), \\
(A \wedge (B \vee C)) &\Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))
\end{aligned}
$$

(distributivní zákon). Zobecněte vztahy výše pro výrok složený z konečného počtu výroků.
(Řešení: Zobecnění: $(\bigwedge_{i=1}^n A_i) \vee B = \bigwedge_{i=1}^n (A_i \vee B)$, $(\bigvee_{i=1}^n A_i) \wedge B = \bigvee_{i=1}^n (A_i \wedge B)$.)
Postup řešení: Vyřešíme pomocí výrokové tabulky 1. Zobecnění vztahů pro konečnou množinu výroků $\{B, A_1, ..., A_n\}$ mají tvar

$$
\left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i\right) \vee B = \bigwedge_{i=1}^{n} (A_i \vee B)\,, \qquad \left(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\right) \wedge B = \bigvee_{i=1}^{n} (A_i \wedge B)\,.
$$

A	B	C	B ∧ C	A ∨ B	A ∨ C	$(A \vee (B \wedge C))$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C))$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Tabulka 1: Výroková tabulka pro příklad 2.3.

Příklad 2.4 *Ukažte, že*

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B),$$
$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

(De Morgan). Zobecněte vztahy výše pro výrok složený z konečného počtu výroků.
(Řešení: Zobecnění: $\overline{(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i)} = \bigvee_{i=1}^{n} \overline{A_i}$, $\overline{(\bigvee_{i=1}^{n} A_i)} = \bigwedge_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. *)*
Postup řešení: Pomocí výrokové tabulky 2. Zobecnění vztahů pro konečnou množinu výroků $\{A_1, ..., A_n\}$ *mají tvar (čára nad výrazy označuje negaci)*

$$\overline{\left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigvee_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \qquad \overline{\left(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigwedge_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A \vee \neg B)$
0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Tabulka 2: Výroková tabulka pro příklad 2.4.

Příklad 2.5 *Ukažte, že* $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$. *(Tím odvodíme i důležitou ekvivalenci* $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$.*)*

Postup řešení: Vyřešíme výrokovou tabulkou 3.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg(A \wedge \neg B)$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1	1	1

Tabulka 3: Výroková tabulka pro příklad 2.5.

Příklad 2.6 *Zjednodušte výrok* $(A \wedge B) \vee \neg B$.
(Řešení: $B \Rightarrow A$)

Postup řešení: Pomocí distributivního zákona:

$$(A \wedge B) \vee \neg B \Leftrightarrow (A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg B) \Leftrightarrow (A \vee \neg B) \Leftrightarrow B \Rightarrow A.$$

Druhá ekvivalence plyne z faktu, že $(B \vee \neg B)$ *je vždy pravda, a poslední ekvivalence je definicí implikace.*

Příklad 2.7 *Rozhodněte o tranzitivitě implikace a ekvivalence.*
(Řešení: Implikace i ekvivalence jsou tranzitivní.)

Postup řešení:

- *Vyřešíme tranzitivitu implikace, tj.*

$$[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C).$$

Negací získáme

$$[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \wedge (A \wedge \neg C).$$

Druhou negací dostaneme výrok

$$[(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C)] \vee (\neg A \vee C),$$

který vyjadřuje tranzitivitu implikace. Bez hranatých závorek můžeme výrok napsat ve tvaru

$$(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg A \vee C).$$

Tento výrok je vždy pravdivý (tautologie), protože vždy jedna závorka bude pravda, viz. výroková tabulka 4.

- *Nyní se podíváme na tranzitivitu ekvivalence jež můžeme zapsat následovně:*

$$[(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)] \Rightarrow (A \Leftrightarrow C).$$

Z definice ekvivalence dostáváme

$$[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)] \Rightarrow (A \Leftrightarrow C).$$

Na dvojice stejně barevných závorek aplikujeme transitivitu implikace a dostáváme

$$[(A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A)] \Rightarrow (A \Leftrightarrow C),$$

což završuje důkaz.

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$A \wedge \neg B$	$B \wedge \neg C$	$\neg A \vee C$
1	1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1

Tabulka 4: Výroková tabulka pro příklad 2.7.

Příklad 2.8 *Zapište pomocí kvantifikátorů následující výroky. Pozor na správné umístění závorek. Výroky posléze znegujte.*

i. *„Pro všechna reálná čísla x platí, že jejich druhá mocnina je nezáporná.“*

ii. *„Existuje reálné číslo menší než jedna.“*

iii. *„Existují dvě přirozená čísla n a m taková, že jejich součet je 10.“*

iv. *„Pro každé přirozené číslo n existuje právě jedno přirozené číslo m takové, že jejich součet je 10.“*

(Řešení:

i. $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$, $\neg : (\exists x \in R)(x^2 < 0)$

ii. $(\exists x \in \mathbb{R})(x < 1)$, $\neg : (\forall x \in \mathbb{R})(x \geq 1)$

iii. $(\exists m, n \in \mathbb{N})(m + n = 10)$, $\neg : (\forall n, m \in \mathbb{N})(m + n \neq 10)$

iv. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists_1 m \in N)(n + m = 10)$, $\neg : (\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in N)(n + m \neq 10 \vee ((\exists s \in \mathbb{N})(n + s = 10 \wedge m \neq s)))$

)

Příklad 2.9 *Zapište pomocí kvantifikátorů následující výroky. Pozor na správné umístění závorek. Výroky posléze znegujte.*

i. *„Pro každé přirozené číslo platí, že jeho součet i součin se sebou samým je opět přirozené číslo.“*

ii. *„Pro každé racionální číslo r platí, že existuje celé číslo p a přirozené číslo q takové, že r je rovno podílu p a q.“ (Tj. racionální čísla lze psát jako zlomky.)*

iii. *„Pro všechna přirozená čísla n platí, že je-li liché, pak $n + 1$ je sudé.“*

iv. *„Když a dělí b, pak dělí také každý násobek b.“*

(Řešení:

i. $(\forall n \in \mathbb{N})(n+n \in \mathbb{N} \wedge n^2 \in \mathbb{N})$, $\neg: (\exists n \in \mathbb{N})(n+n \notin \mathbb{N} \vee n^2 \notin \mathbb{N})$

ii. $(\forall r \in \mathbb{Q})(\exists p \in \mathbb{Z})(\exists q \in \mathbb{N})(r = \frac{p}{q})$, $\neg: (\exists r \in \mathbb{Q})(\forall p \in \mathbb{Z})(\forall q \in \mathbb{N})(r \neq \frac{p}{q})$

iii. $(\forall n \in \mathbb{N})(2 \not| n \implies 2|(n+1))$, $\neg: (\exists n \in \mathbb{N})(2 \not| n \wedge 2 \not|(n+1))$

iv. $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z})(a|b \implies a|(cb))$, $\neg: (\exists a, b, c \in \mathbb{Z})(a|b \wedge a \not|(cb))$

)

Příklad 2.10 *Zapište pomocí kvantifikátorů následující výroky. Pozor na správné umístění závorek. Výroky posléze znegujte.*

i. *„Je-li a rovno 2 nebo 3, pak je menší než 10.“*

ii. *„Číslo je dělitelné šesti právě tehdy, když je dělitelné dvěma a třemi.“*

iii. *„Pro všechna ϵ kladná existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší než n_0 je n-tý člen posloupnosti (a_n) vzdálen od čísla a méně než o ϵ.“*

(Řešení:

i. $(\forall a \in \mathbb{R})(((a = 2) \vee (a = 3)) \implies a < 10)$, $\neg: (\exists a \in \mathbb{R})(((a = 2) \vee (a = 3)) \wedge a \geq 10)$

ii. $(\forall a \in \mathbb{Z})(6|a \Leftrightarrow (2|a \wedge 3|a))$, $\neg: (\exists a \in \mathbb{Z})((6|a \wedge (2 \not| a \vee 3 \not| a)) \vee ((2|a \wedge 3|a) \wedge 6 \not| a))$

iii. $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon)$, $\neg: (\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|a_n - a| \geq \varepsilon)$

)

Příklad 2.11 *Negujte následující výroky a rozhodněte, jestli platí výrok, nebo jeho negace:*

i. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x^2 + y^2 > 0)$

ii. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{N})\big((y \leq x) \wedge (y + 1 > x)\big)$

iii. $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})\big((0 < |x - 1| < \delta) \Rightarrow (|x - 3| < \epsilon)\big)$

(Řešení:

i. $(\exists x, y \in \mathbb{R})(x^2 + y^2 \leq 0)$,

ii. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{N})((y > x) \vee (y + 1 \leq x))$, *iii.* $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R})(0 < |x-1| < \delta \wedge |x-3| \geq \varepsilon)$

Žádný z výroků neplatí)
Postup řešení: Žádný z výroků neplatí.

- $(\exists x, y \in \mathbb{R})(x^2 + y^2 \leq 0)$, *platí negace pro* $x = y = 0$
- $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{N})((y > x) \vee (y + 1 \leq x))$, *platí negace pro například* $x = -1$. *Nebo si stačí uvědomit, že* y *je přirozené číslo, takže pokud zvolíme* $x < 1$ *pak výrok* $(y \leq x)$ *nebude platit nikdy, a musí tedy platit jeho negace.*
- $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R})(0 < |x-1| < \delta \wedge |x-3| \geq \varepsilon)$

Dokázat negaci třetího výroku je obtížnější. Zkusme např. $\varepsilon = 1$. *Výrok přejde na tvar*

$$(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R})(0 < |x-1| < \delta \wedge |x-3| \geq 1).$$

Důležité je uvědomit si geometrický význam absolutní hodnoty, viz obrázek 2. Obecně pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ *výraz* $|a-b| > c$ *znamená, že číslo* a *je od* b *zdáleno o více než o* c. *V našem případě máme* $|x-3| \geq 1$, *tedy číslo* x *musí být od* 3 *vzdáleno alespoň o* 1. *Lze tedy psát*

$$|x-3| \geq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 4, +\infty).$$

Výrok tedy můžeme přepsat na

$$(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R})(0 < |x-1| < \delta \wedge x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 4, +\infty))$$

či na

$$(\forall \delta > 0)(\exists x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 4, +\infty))(0 < |x-1| < \delta).$$

Nyní již přejdeme k volbě x. *Nepřítel předhodí libovolné* $\delta > 0$. *V závislosti na* δ *volíme:*

$$x = \begin{cases} 1 + \frac{\delta}{2} & \textit{pro } \delta \leq 2, \\ -1 & \textit{pro } \delta > 2 \end{cases}.$$

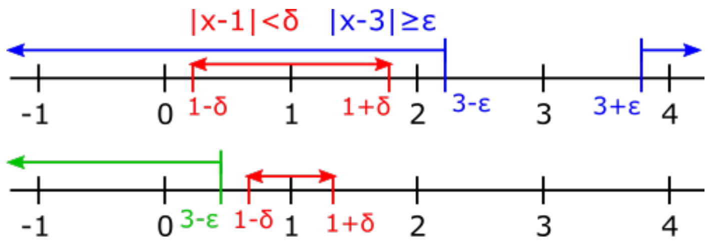
Nyní ověříme, zda jsme volili dobře. V první volbě máme

$$|x-1| = |1 + \frac{\delta}{2} - 1| = \frac{\delta}{2}.$$

A jistě platí, že $0 < \frac{\delta}{2} < \delta$. *Zároveň, pro* $\delta \leq 2$, *také platí, že* $x = 1 + \frac{\delta}{2} \leq 1 + \frac{2}{2} = 2$, *a tedy* $x \leq 2$. *Číslo* x *je tedy v intervalu* $(-\infty, 2\rangle \cup \langle 4, +\infty)$.
Druhý případ, kdy $\delta > 2$, *je jednoduchý, jelikož* x *již nezávisí na* δ. *Jistě* $x = -1$ *leží v intervalu* $(-\infty, 2\rangle$, *stačí tedy ověřit, že* $0 < |x-1| < \delta$. *Dostáváme*

$$0 < |x-1| = |-1-1| = |-2| = 2 < \delta.$$

Obrázek 2: Geometrický význam třetího výroku v příkladu 11. Z obrázku je patrné, že lze volit $\varepsilon \in (0, 2)$, neboť pro taková zůstane bod $x = 3 - \varepsilon$ napravo od 1.



Příklad 2.12 *Zapište pomocí kvantifikátorů následující výrok a jeho negaci; vyšetřete pravdivost obou výroků: „Každá kvadratická rovnice s reálnými koeficienty má kladné řešení."*
(Řešení: výrok: $(\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)(\exists x \in \mathbb{R},\ x > 0)(ax^2 + bx + c = 0)$, negace: $(\exists a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)(\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0)(ax^2 + bx + c \neq 0)$, negace je pravdivý výrok)
Postup řešení:

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)(\exists x \in \mathbb{R},\ x > 0)(ax^2 + bx + c = 0),$$
$$(\exists a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)(\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0)(ax^2 + bx + c \neq 0)).$$

Platí negace. Například pro $a = 1$, $b = 0$ a $c = 1$, což vede na komplexní kořeny. Nebo jiný příklad $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = 0$, který má jediný dvojnásobný kořen $x = -1 < 0$.

Příklad 2.13 *Zapište pomocí kvantifikátorů následující výrok a jeho negaci; výrok dokažte: „Pro každé celé číslo n platí, že pokud n^2 je liché, potom n je rovněž liché."*
(Řešení: výrok: $(\forall n \in \mathbb{Z},\ 2 \nmid n^2)(2 \nmid n)$, negace: $(\exists n \in \mathbb{Z},\ 2 \nmid n^2)(2|n))$.)

Postup řešení:

$$(\forall n \in \mathbb{Z},\ 2 \nmid n^2)(2 \nmid n),$$
$$(\exists n \in \mathbb{Z},\ 2 \nmid n^2)(2|n))$$

Platí původní výrok. Důkaz sporem:
Nechť n^2 je liché. Číslo n^2 si můžeme napsat jako $n^2 = n \cdot n$. Jelikož součin dvou sudých čísel je sudý ($m = 2k \Rightarrow m^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \Rightarrow m^2$ je sudé), musí být n liché, aby $n \cdot n$ bylo liché, což je spor.

Příklad 2.14 *Slovně napište následující výroky zapsané pomocí kvantifikátorů a rozhodněte o jejich pravdivosti:*

i. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x > y)$

ii. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x > y)$

iii. $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})\Big((a+b=1) \Rightarrow \big((a \geq \frac{1}{2}) \vee (b \geq \frac{1}{2})\big)\Big)$

(Řešení:

i. Neexistuje nejmenší reálné číslo. Pravdivé.

ii. Existuje ostře největší reálné číslo. Nepravdivé.

iii. Pro každou dvojici reálných čísel, které se v součtu rovnají jedné, musí být alespoň jedno z nich větší nebo rovno jedné polovině. Pravdivé.

)

Postup řešení: Pro bod 3.: Znegujeme výrok

$$(\exists a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R})\left((a+b=1) \wedge (a < \frac{1}{2}) \wedge (b < \frac{1}{2})\right).$$

Máme tedy

$$a + b < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Negace neplatí. Musí tedy platit původní výrok.

2.2 Důkazy: přímý, sporem a indukce

Příklad 2.15 *Dokažte, že:*

i. pro $\forall n \in \mathbb{N}$ *platí: je-li* n^2 *dělitelné* 9*, potom* n *je dělitelné* 3*.*

ii. pro $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$*, platí AG nerovnost:*

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Postup řešení:

- *Jelikož* n^2 *je dělitelné 9, pak je jistě dělitelné třemi. Stačí tady ukázat, že platí* $3|n^2 \Rightarrow 3|n$*. Dokážeme obměnou, tj.* $3 \nmid n \Rightarrow 3 \nmid n^2$*. Nechť* $n \in \mathbb{N}$ *a předpokládáme* $3 \nmid n$*. Pak* n *lze napsat jedním ze dvou způsobů:*

$$n = 3k+1, \quad n = 3k+2.$$

  Pokud $n = 3k+1$*, pak* $n^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$*, a tedy jistě není dělitelné třemi. V posledním případě* $n = 3k+2$*, pak* $n^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$ *a opět není dělitelné 3. Důkaz je hotov.*

- $0 \leq (x-y)^2 = x^2-2xy+y^2 = x^2+2xy+y^2-4xy = (x+y)^2-4xy \Rightarrow \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy.$

Příklad 2.16 *Ukažte, že množina všech prvočísel je nekonečná. (Při té příležitosti zopakujte, co jsou prvočísla a prvočíselný rozklad.)*

Postup řešení: *Budeme postupovat sporem. Pro spor předpokládejme, že prvočísel je konečně mnoho a označme množinu všech prvočísel*

$$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\},$$

kde p_i pro $i = 1, ..., r$ je prvočíslo. Definujme nyní číslo x vztahem

$$x = p_1 p_2 p_3 \ldots p_r + 1.$$

Číslo x je jistě celé kladné číslo a existuje tedy jeho prvočíselný rozklad, který je jednoznačný. Nechť x má v prvočíselném rozkladu prvočíslo y, pak platí $y|x$. Jelikož množina P obsahuje všechna prvočísla, musí pro nějaké $j \in \hat{r}$ platit, že $y = p_j$. Triviálně $p_j | p_1 p_2 \ldots p_r$. Celkem tedy

$$p_j | x \quad \text{a zároveň} \quad p_j | p_1 p_2 \ldots p_r.$$

Jednoduše z definic lze dokázat, že platí výrok

$$(a|b \wedge a|c) \Rightarrow a|(b - c),$$

tudíž

$$p_j | (x - p_1 p_2 \ldots p_r).$$

Ale $x - p_1 p_2 \ldots p_r = 1$. Předchozí vztah tedy říká, že $p_j | 1$ což je spor, jelikož jedničku nic nedělí.

Příklad 2.17 *Dokažte, že neexistuje nejmenší kladné racionální číslo. (Při té příležitosti raději zopakujte, co je racionální číslo...)*

Postup řešení: *Budeme postupovat sporem. Nechť existuje nejmenší kladné racionální číslo x. Jelikož x je racionální, musí existovat $p, q \in N$ nesoudělné tak, že $x = \frac{p}{q}$. Definujme číslo $y = \frac{p}{q+1}$. Číslo y je jistě racionální, přičemž platí $0 < y < x$. Což je spor s předpokladem, že x je nejmenší.*

Příklad 2.18 *Dokažte, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo (tj. nelze jej zapsat jako zlomek $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$ jsou nesoudělná).*

Postup řešení: *Budeme postupovat sporem. Nechť existují $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$ splňující $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Umocněním této rovnice dostáváme $2 = \frac{p^2}{q^2}$, tedy $p^2 = 2q^2$. Číslo p^2 je tedy sudé, a proto takové musí být i číslo p. Napíšeme ho ve tvaru $p = 2k$. Zpětným dosazením dostaneme rovnici*

$$2 = \frac{(2k)^2}{q^2},$$

ze které vidíme $q^2 = 2k^2$. Číslo q^2, a tedy i q je opět sudé. Což je ovšem spor s nesoudělností čísel p, q (obě jsou sudá, takže jsou určitě soudělná alespoň číslem 2).

Příklad 2.19 *Dokažte, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí:*

$$\sin x + \cos x \neq 1{,}5.$$

Postup řešení: Sporem. Nechť existuje $x \in \mathbb{R}$ splňující $\sin x + \cos x = 1{,}5$. Umocněním této rovnice a použitím vzorce $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dostáváme

$$1 + 2\sin x \cos x = 2,25 \Leftrightarrow \sin 2x = 1{,}25.$$

Předchozí rovnost neplatí pro žádné $x \in \mathbb{R}$, což je spor.

Příklad 2.20 *Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí nerovnost*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$$

Postup řešení: Dokážeme matematickou indukcí:

- $n = 2:$ *Máme ukázat, že $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$. Umocněním dostaneme*

  $$1 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} > 2 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} > 1,$$

  což zjevně platí.

- $n \to n+1$: *Předpokládáme, že vztah platí pro n, a chceme ukázat, že platí i pro $n+1$, tj. chceme ukázat, že platí*

  $$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n+1}.$$

  Začneme od levé strany. S využitím IP dostáváme:

  $$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}(n+1) + \sqrt{n+1}}{n+1}$$

  Nyní stačí ukázat $\frac{\sqrt{n}(n+1)+\sqrt{n+1}}{n+1} > \sqrt{n+1}$. Po úpravách zjistíme, že nerovnost platí:

  $$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}(n+1) + \sqrt{n+1}}{n+1} > \sqrt{n+1} &\Leftrightarrow \sqrt{n}(n+1) + \sqrt{n+1} > (n+1)^{3/2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 > n+1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n}\sqrt{n+1} > n \\ &\Leftrightarrow n(n+1) > n^2 \\ &\Leftrightarrow n > 0. \end{aligned}$$

Příklad 2.21 *Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost*

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

(Pozn.: Slabší odhad s pravou stranou $1/\sqrt{n}$ nelze pro slabost indukčního předpokladu přímo dokázat matematickou indukcí!)

Postup řešení: Budeme postupovat matematickou indukcí:

- $n = 1$*: Máme ukázat* $\frac{2-1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{3}{9} \Leftrightarrow 9 \leq 12$*, což platí.*
- $n \to n+1$*. Vyjdeme z levé strany pro* $n+1$ *a budeme odhadovat:*

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} = \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{2n+1}{2n+2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{2n+1}{2n+2} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}.$$

Stačí ukázat, že $\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2(n+1)+1}}$*. Úpravami dostaneme*

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2(n+1)+1}} &\Leftrightarrow \sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3} \leq 2n+2 \\ &\Leftrightarrow (2n+1)(2n+3) \leq 4n^2+8n+4 \\ &\Leftrightarrow 4n^2+8n+3 \leq 4n^2+8n+4 \\ &\Leftrightarrow 3 \leq 4.\end{aligned}$$

2.3 Zobrazení, funkce, definiční obor, obor hodnot, zobrazení surjektivní, injektivní a bijektivní, skládání zobrazení

Poznámka 2.1 *i. Definiční obor je braný jako ten maximální – proto se pojem maximální ani nepoužívá.*

ii. Zápis $f : A \to B$ znamená striktně, že definiční obor je roven A a obor hodnot je podmnožinou B.

Příklad 2.22 *Definujme množiny $J = \{1, 2\}$ a $H = \{3, 4\}$. Vypište všechny podmnožiny $J \times H$, které definují zobrazení*

i. $f : J \to H$

ii. $f : (J) \to H$

(Řešení:

i. $\{(1, 3), (2, 4)\}$, $\{(1, 4), (2, 3)\}$, $\{(1, 3), (2, 3)\}$, $\{(1, 4), (2, 4)\}$

ii. $\{(1,3),(2,4)\}$, $\{(1,4),(2,3)\}$, $\{(1,3),(2,3)\}$, $\{(1,4),(2,4)\}$, $\{(1,3)\}$, $\{(2,4)\}$, $\{(2,3)\}$, $\{(1,4)\}$

)

Postup řešení: Jedinou podmínkou na podmnožinu $J \times H$ je, aby dva různé obrazy neměly stejné vzory. Zároveň v prvním případě definiční obor je roven právě J, tedy možné podmnožiny jsou

i. $\{(1,3),(2,4)\}$, $\{(1,4),(2,3)\}$, $\{(1,3),(2,3)\}$, $\{(1,4),(2,4)\}$

ii. $\{(1,3),(2,4)\}$, $\{(1,4),(2,3)\}$, $\{(1,3),(2,3)\}$, $\{(1,4),(2,4)\}$, $\{(1,3)\}$, $\{(2,4)\}$, $\{(2,3)\}$, $\{(1,4)\}$

Poznámka 2.2 *Studentům vadí, že není jasné, zda se myslí zobrazení $f\colon J \to H$, což je zobrazení z celého J, nebo $f\colon (J) \to H$, což je zobrazení z podmnožin J.*

Příklad 2.23 *Určete definiční obory funkcí daných předpisem*

$$f(x) = \ln(\sin(2x)), \quad g(x) = \log_2 \log_3 \log_4 x, \quad w(x) = (2x)!, \quad h(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin(\pi x)}.$$

(Řešení: $D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(0 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $D_g = (4, +\infty)$, $D_w = \{k/2, k \in \mathbb{Z}_0^+\}$, $D_h = \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$))

Postup řešení:

- *Jedinou podmínkou na D_f je $\sin 2x > 0$. Tato funce je π periodická, proto ji stačí vyšetřit na intervalu $[0, \pi]$. Na tomto intervalu je $\sin 2x$ kladný pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Celkem $D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.*
- *V případě funkce g požadujeme splnění podmínek*

$$\begin{aligned} &x > 0, \\ &\log_4 x > 0 \Leftrightarrow x > 1, \\ &\log_3 \log_4 x > 0 \Leftrightarrow \log_4 x > 1 \Leftrightarrow x > 4. \end{aligned}$$

  Průnikem podmínek dostaneme $D_g = (4, +\infty)$.
- *V případě funkce w potřebujeme mít celá nezáporná čísla do faktoriálu. Proto $D_w = \{k/2, k \in \mathbb{N}_0\}$.*
- *Poslední funkce vyžaduje splěnění dvou podmínek:*

$$x \geq 0 \wedge \sin(\pi x) \neq 0$$

  Jelikož $\sin(\pi x) = 0 \Leftrightarrow \pi x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$, pak $D_h = \mathbb{R}_0^+ \setminus \mathbb{Z} = \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$

Příklad 2.24 *Určete obory hodnot funkcí f, g a w z předchozí úlohy, tj.:*

$$f(x) = \ln(\sin(2x)), \quad g(x) = \log_2 \log_3 \log_4 x, \quad w(x) = (2x)!.$$

(Řešení: $H_f = (-\infty, 0\rangle$, $H_g = \mathbb{R}$, $H_w = \{k! | k \in \mathbb{N}\}$))
Postup řešení:

- *jelikož pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ je $\sin(2x) \in (0, 1\rangle$. Pak tedy $H_f = (-\infty, 0\rangle$*
- *tip: $H_g = \mathbb{R}$. Musíme tedy ukázat, že k libovolnému $y \in \mathbb{R}$ existuje $x \in D_g$, tak že $y = f(x) = \log_2 \log_3 \log_4 x$. Mocněním dostaneme $x = 4^{3^{2^y}}$. Jistě platí, že $x \in D_g$. Jinak zapsáno*
$$x = 4^{3^{2^y}} > 4^1 \Leftrightarrow 3^{2^y} > 1^0 = 3^0 \Leftrightarrow 2^y > 0,$$
kde poslední nerovnost platí pro všechna $y \in \mathbb{R}$.
- H_w

  .

Příklad 2.25 *Nalezněte obory hodnot následujících funkcí:*

i. $f(x) = x^2, \quad D_f = \langle -1, 2)$

ii. $f(x) = \log x, \quad D_f = (10, 1000\rangle$

iii. $f(x) = x + \lfloor 2x \rfloor, \quad D_f = \langle 0, 1)$

iv. $f(n) = n(-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}$

(Řešení: i. $\langle 0, 4)$, ii. $(1, 3\rangle$, iii. $\langle 0, \frac{1}{2}) \cup \langle \frac{3}{2}, 2)$, iv. $\{2k | k \in \mathbb{N}\} \bigcup \{-2k + 1 | k \in \mathbb{N}\}$)
Postup řešení:

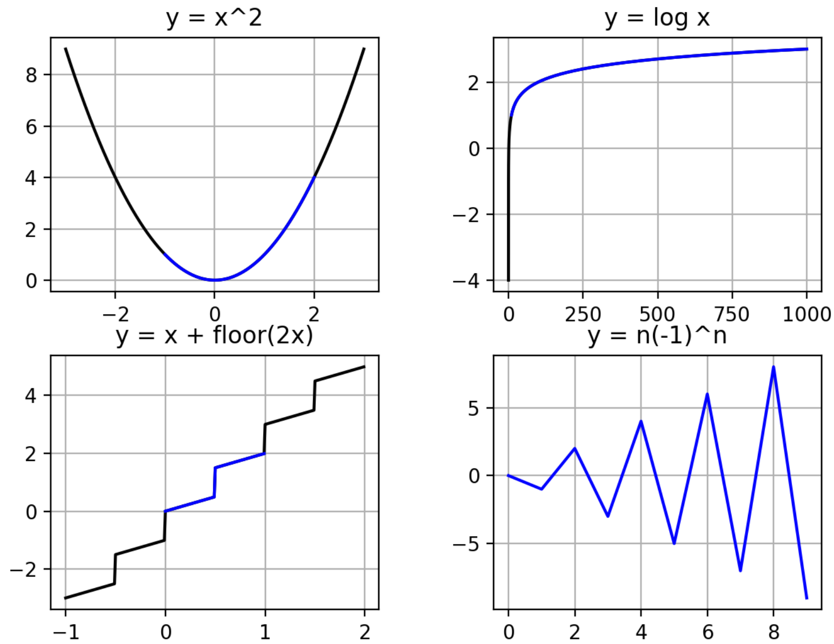
i. *Rozdělíme definiční obor na největší intervaly, na kterých můžeme invertovat vztah $f(x) = y$. Následně jej na těchto intervalech invertujeme. Platí $y = x^2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{y}$ pro $x \in \langle -1, 0)$ a $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ pro $x \in \langle 0, 2)$. Obor hodnot tedy získáme řešením soustavy nerovnic $-1 \le -\sqrt{y} < 0$, $0 \le \sqrt{y} < 2$.*

ii. *Inverzí vztahu $f(x) = y$ dostaneme $\log x = y \Leftrightarrow x = 10^y$, kde $x \in (10, 1000\rangle$. Obor hodnot tedy získáme řešením soustavy nerovnic $10 < 10^y \le 1000$.*

iii. *Nejdříve předpis funkce zjednodušíme. Platí $f(x) = x$ pro $x \in \langle 0, 1/2)$ a $f(x) = x + 1$ pro $x \in \langle 1/2, 1)$. Inverzí vztahu $f(x) = y$ dostaneme $x = y$ pro $x \in \langle 0, 1/2)$ a $x = y - 1$ pro $x \in \langle 1/2, 1)$. Dále postupujeme stejně jako v předchozích případech.*

iv. *Z předpisu funkce f vidíme, že v oboru hodnot jsou záporná lichá čísla a kladná sudá čísla. To lze například zapsat $H_f = \{2k | k \in \mathbb{N}\} \bigcup \{-2k + 1 | k \in \mathbb{N}\}$.*

Obrázek 3: Grafy funkcí $f(x) = x^2$, $f(x) = \log x$, $f(x) = x + \lfloor 2x \rfloor$, $f(n) = (-1)^n n$. Pozor, graf funkce $f(n) = (-1)^n n$ jsou pouze diskrétní body a nikoliv po částech lineární funkce, která je vyzobrazena! Podobně je to s vertikálními čárami ve funkci $f(x) = x + \lfloor 2x \rfloor$, které nepatří do oboru hodnot této funkce (tyto křivky ani nelze popsat žádnou funkcí).



Příklad 2.26 *Nalezněte obory hodnot následujících funkcí:*

i. $f(x) = (x+1)/(x^2+x+1), \quad D_f = \mathbb{R}$

ii. $f(x) = (x+1)/(x^2+3x+1), \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{(-3 \pm \sqrt{5})/2\}$

(Řešení: i. $H_f = \langle -\frac{1}{3}, 1 \rangle$, *ii.* $H_f = \mathbb{R}$ *)*

Postup řešení: Z definice oboru hodnot je $H_f = \{y \in \mathbb{R} | (\exists x \in D_f \cap \mathbb{R})(f(x) = y\})$. *Hledáme tedy* $y \in \mathbb{R}$*, pro která existuje řešení* $x \in D_f \cap \mathbb{R}$ *rovnice* $f(x) = y$.

i. V tomto případě požadujeme, aby $x \in D_f \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$. *Rovnice* $y = f(x)$ *je ve tvaru*

$$y = (x+1)/(x^2+x+1) \Leftrightarrow yx^2 + x(y-1) + y - 1 = 0.$$

Pro $y = 0$ *je* $x = -1 \in \mathbb{R}$. *Pro* $y \neq 0$ *máme kvadratickou rovnici s diskriminantem*

$$D(y) = -3y^2 + 2y + 1 = -3\left(y + \frac{1}{3}\right)(y-1)\,.$$

Aby řešení x *patřilo do* $\mathbb{R}$*, musí být diskriminant nezáporný. To je pro* $y \in \langle -\frac{1}{3}, 1 \rangle$. *Dostáváme tak* $H_f = \langle -\frac{1}{3}, 1 \rangle$.

ii. *Zde požadujeme* $x \in \mathbb{R} \setminus \{(-3 \pm \sqrt{5})/2\}$. *Rovnice* $y = f(x)$ *má tvar*

$$y = (x+1)/(x^2+3x+1) \Leftrightarrow yx^2 + x(3y-1) + y - 1 = 0.$$

Pro $y = 0$ *je* $x = -1 \in D_f$. *Pro* $y \neq 0$ *řešíme kvadratickou rovnici s diskriminantem*

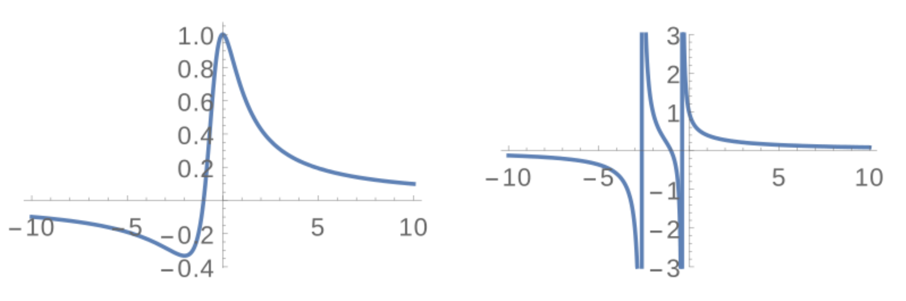
$$D(y) = 5y^2 - 2y + 1.$$

Diskriminant splňuje $D(y) > 0$ *pro všechna* $y \in \mathbb{R}$. *Řešení* x *pro dané* $y \in \mathbb{R}$ *však nemusí patřit do* D_f. *Taková* y*, pro která je* $x = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$*, musíme vyloučit. Řešíme tedy*

$$x = x(y) = \frac{-(3y-1) \pm \sqrt{D(y)}}{2y} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 4y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Tato rovnice nemá reálné kořeny, a tudíž žádná y *nevyloučíme. Proto* $H_f = \mathbb{R}$.

Grafy funkcí f *zachycuje Obrázek 4.*



Obrázek 4: Grafy funkcí $f(x) = (x+1)/(x^2+x+1)$ vlevo a $f(x) = (x+1)/(x^2+3x+1)$ vpravo.

Příklad 2.27 *Určete obor hodnot funkce* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definované vztahem*

$$f(z) = z + 2\bar{z} + z\bar{z} + \boldsymbol{i}z.$$

(Řešení: $H_f = \{a + \boldsymbol{i}b | a, b \in \mathbb{R} \wedge -b^2 - 4b + 2a + 1 \geq 0\}$ *)*
Postup řešení: Z definice $H_f = \{w \in \mathbb{C} | (\exists z \in D_f \cap \mathbb{C})(f(z) = w\})$. *Napíšeme* $z = x + \boldsymbol{i}y$ *a* $w = a + \boldsymbol{i}b$*, kde* $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. *Pak* $\bar{z} = x - \boldsymbol{i}y$. *Po dosazení do rovnice* $f(z) = w$ *dostáváme*

$$w = f(z) \Leftrightarrow a + \boldsymbol{i}b = x^2 + y^2 + 3x - y + \boldsymbol{i}(x - y).$$

Hledáme tedy $a, b \in \mathbb{R}$*, pro která existují* $x, y \in \mathbb{R}$ *tak, že* $z = x + \boldsymbol{i}y \in D_f \cap \mathbb{C}$ *a je splněna předcházející rovnice. Porovnáním reálných a imaginárních složek dostáváme nelineární soustavu dvou rovnic*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 3x - y &= a, \\ x - y &= b. \end{aligned}$$

Po vyjádření $x = b + y$ z druhé rovnice a dosazení do první dostáváme

$$2y^2 + 2y(b+1) + b^2 + 3b - a = 0.$$

Diskriminant je roven

$$D = 4[(b+1)^2 - 2(b^2 + 3b - a)] = 4(-b^2 - 4b + 2a + 1).$$

Požadavek na řešitelnost je, aby $D \geq 0$. Obor hodnot pak můžeme zapsat

$$H_f = \{a + \boldsymbol{i}b | a, b \in \mathbb{R} \wedge -b^2 - 4b + 2a + 1 \geq 0\}.$$

Příklad 2.28 *Buďte $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2^x$, $f_3(x) = \operatorname{sgn} x$. Určete definiční obory a obory hodnot funkcí $f_i \circ f_j$, kde $i, j = 1, 2, 3$, a napočítejte $(f_i \circ f_j)(x)$.*
(Řešení: i. $f_1(f_1(x)) = x^4$, $D_{f_1 \circ f_1} = \mathbb{R}$, $H_{f_1 \circ f_1} = \mathbb{R}_0^+$, ii. $f_2(f_2(x)) = 2^{2^x}$, $D_{f_2 \circ f_2} = \mathbb{R}$, $H_{f_2 \circ f_2} = (1, +\infty)$, iii. $f_3(f_3(x)) = \operatorname{sgn} x$, $D_{f_3 \circ f_3} = \mathbb{R}$, $H_{f_3 \circ f_3} = \{0, 1, -1\}$, iv. $f_1(f_2(x)) = 2^{(2x)}$, $D_{f_1 \circ f_2} = \mathbb{R}$, $H_{f_1 \circ f_2} = \mathbb{R}^+$, v. $f_2(f_1(x)) = 2^{x^2}$, $D_{f_2 \circ f_1} = \mathbb{R}$, $H_{f_2 \circ f_1} = \langle 1, +\infty)$, vi. $f_1(f_3(x)) = (\operatorname{sgn}(x))^2$, $D_{f_1 \circ f_3} = \mathbb{R}$, $H_{f_1 \circ f_3} = \{0, 1\}$, vii. $f_3(f_1(x)) = \operatorname{sgn}(x^2)$, $D_{f_3 \circ f_1} = \mathbb{R}$, $H_{f_3 \circ f_1} = \{0, 1\}$, viii. $f_2(f_3(x)) = 2^{\operatorname{sgn} x}$, $D_{f_2 \circ f_3} = \mathbb{R}$, $H_{f_2 \circ f_3} = \{1, 2, \frac{1}{2}\}$, ix. $f_3(f_2(x)) = \operatorname{sgn}(2^x)$, $D_{f_3 \circ f_2} = \mathbb{R}$, $H_{f_3 \circ f_2} = \{1\}$.)
Postup řešení:

- $f_1(f_1(x)) = (x^2)^2 = x^4$, $\quad D_{f_1 \circ f_1} = \mathbb{R}$, $\quad H_{f_1 \circ f_1} = \mathbb{R}_0^+$,
- $f_2(f_2(x)) = 2^{2^x}$, $\quad D_{f_2 \circ f_2} = \mathbb{R}$, $\quad H_{f_2 \circ f_2} = (1, +\infty)$,
- $f_3(f_3(x)) = \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(x)) = \operatorname{sgn} x$, $\quad D_{f_3 \circ f_3} = \mathbb{R}$, $\quad H_{f_3 \circ f_3} = \{0, 1, -1\}$,
- $f_1(f_2(x)) = (2^x)^2 = 2^{(2x)}$, $\quad D_{f_1 \circ f_2} = \mathbb{R}$, $\quad H_{f_1 \circ f_2} = \mathbb{R}^+$,
- $f_2(f_1(x)) = 2^{x^2}$, $\quad D_{f_2 \circ f_1} = \mathbb{R}$, $\quad H_{f_2 \circ f_1} = \langle 1, +\infty)$,
- $f_1(f_3(x)) = (\operatorname{sgn}(x))^2$, $\quad D_{f_1 \circ f_3} = \mathbb{R}$, $\quad H_{f_1 \circ f_3} = \{0, 1\}$,
- $f_3(f_1(x)) = \operatorname{sgn}(x^2)$, $\quad D_{f_3 \circ f_1} = \mathbb{R}$, $\quad H_{f_3 \circ f_1} = \{0, 1\}$,
- $f_2(f_3(x)) = 2^{\operatorname{sgn} x}$, $\quad D_{f_2 \circ f_3} = \mathbb{R}$, $\quad H_{f_2 \circ f_3} = \{1, 2, \frac{1}{2}\}$,
- $f_3(f_2(x)) = \operatorname{sgn}(2^x)$, $\quad D_{f_3 \circ f_2} = \mathbb{R}$, $\quad H_{f_3 \circ f_2} = \{1\}$,

Příklad 2.29 *Zapište pomocí kvantifikátorů, že zobrazení h je injektivní, resp. M-surjektivní, resp. bijektivní.*
(Řešení:

- *injektivita:* $(\forall x, y \in D_h)(h(x) = h(y) \Rightarrow x = y)$,

- *M-surjektivita:* $(\forall y \in M)(\exists x \in D_h)(h(x) = y)$,
- *bijektivita:* $(\forall y \in M)(\exists_1 x \in D_h)(h(x) = y)$.

)

Postup řešení:

- *injektivita:* $(\forall x, y \in D_h)(h(x) = h(y) \Rightarrow x = y)$,
- *M-surjektivita:* $(\forall y \in M)(\exists x \in D_h)(h(x) = y)$,
- *bijektivita:* $(\forall y \in M)(\exists_1 x \in D_h)(h(x) = y)$.

Příklad 2.30 *Nechť zobrazení* $f : (\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *je definováno vztahem* $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. *Určete*

i. D_f *a* H_f,

ii. $f^{-1}(M)$ *pro* $M = (2, 3)$

iii. $f(N)$ *pro* $N = \langle 3, 4 \rangle$.

(Řešení: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $H_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f^{-1}(M) = M$, $f(N) = \langle \frac{5}{3}, 2 \rangle$ *)*

Postup řešení:

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. *Obor hodnot: budeme hledat, pro jaká* y *má rovnice* $\frac{x+1}{x-1} = y$ *řešení. Jednoduchou úpravou získáme rovnici*

$$x(1 - y) = -1 - y.$$

Tato rovnice má řešení pro všechna $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, *a tedy* $H_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- *Z definice vzoru* $f^{-1}(M) = \{x \in D_f | 2 < \frac{x+1}{x-1} < 3\}$ *musíme vyřešit dvě nerovnice:*

$$2 < \frac{x+1}{x-1}, \quad \frac{x+1}{x-1} < 3.$$

V závislosti na tom, zda $x - 1 > 0$ *nebo* $x - 1 < 0$ *se jedná se o průnik intervalů* $(1, 3)$ *a* $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$, *tj.* $(2, 3)$. *Vzor je proto* $f^{-1}(M) = (2, 3) = M$.

- *V definici obrazu* $f(N) = \{y \in \mathbb{R} | (\exists x \in N)(f(x) = y)\}$ *si ze vztahu* $\frac{x+1}{x-1} = y$ *vyjádříme* x *a dostaneme* $\frac{y+1}{y-1} = x$. *Má platit, že* $x \in N = \langle 3, 4 \rangle$, *což opět vede na soustavu dvou nerovnic:*

$$3 \le \frac{y+1}{y-1}, \quad \frac{y+1}{y-1} \le 4.$$

Výsledkem je interval $\left\langle \frac{5}{3}, 2 \right\rangle$ *a tedy* $f(N) = \left\langle \frac{5}{3}, 2 \right\rangle$.

3 Třetí týden

3.1 Zobrazení, funkce, definiční obor, obor hodnot, zobrazení M-surjektivní, injektivní a bijektivní, skládání zobrazení

Poznámka 3.1 *Pro $f : A \to B$ a M množinu je zobrazení M-surjektivní (nebo-li na M), pokud $M \subset H_f$. Tedy samostatný pojem „surjektivní“ definován není. Podobně „M-bijektivní“ vs. bijektivní.*

Příklad 3.1 *Volte vhodný definiční obor $D_f \subset \mathbb{R}$ pro funkci $f : D_f \to \langle -1, 1\rangle$ danou předpisem $f(x) = \sin x$ tak, aby byla*

i. $\langle -1, 1\rangle$*-surjektivní a současně neinjektivní,*

ii. *injektivní a současně nebyla* $\langle -1, 1\rangle$*-surjektivní,*

iii. $\langle -1, 1\rangle$*-bijektivní,*

iv. *neinjektivní ani nebyla* $\langle -1, 1\rangle$*-surjektivní.*

(Řešení: například: i. $D_f = \mathbb{R}$, ii. $D_f = (-\pi/2, \pi/2)$, iii. $D_f = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, iv. $D_f = \langle 0, \pi\rangle$)
Postup řešení: Možná řešení jsou například

i. $D_f = \mathbb{R}$,

ii. $D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

iii. $D_f = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$,

iv. $D_f = \langle 0, \pi\rangle$.

Příklad 3.2 *Najděte inverzní funkci k funkci*

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

na jejím definičním oboru. Jakou podmínku musí splňovat koeficienty a, b, c, d, aby inverze existovala?
(Řešení: $f^{-1}(y) = \frac{yd-b}{a-yc}$. Podmínka pro existenci inverze je $ad \neq bc$.)
Postup řešení:

Inverzní funkci získáme z výrazu $\frac{ax+b}{cx+d} = y$ vyřešením pro x. Platí

$$ax + b = y(cx + d) \Leftrightarrow x(a - yc) = yd - b \Leftrightarrow x = \frac{yd - b}{a - yc} =: f^{-1}(y).$$

Pro definiční obor $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$.

Inverze neexistuje pokud f není prostá. To nastane, pokud

$$(\exists x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2)(f(x_1) = f(x_2)).$$

Úpravou rovnice $f(x_1) = f(x_2)$ dostaneme

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow (ax_1 + b)(cx_2 + d) = (ax_2 + b)(cx_1 + d) \Leftrightarrow$$
$$0 = ad(x_2 - x_1) + bc(x1 - x_2) \Leftrightarrow 0 = (x_1 - x_2)(bc - ad).$$

Funkce f tedy je prostá právě tehdy, když platí $bc \neq ad$.

Příklad 3.3 *Nechť zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definováno vztahem $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.*

i. Určete H_f a obor hodnot restrikce $f|_{\langle 1,+\infty)}$.

ii. Vyšetřete injektivitu zobrazení f i injektivitu restrikce $f|_{\langle 1,+\infty)}$.

(Řešení: $H_f = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$, f není injektivní, restrikce ano, $H_{f|_{\langle 1,+\infty)}} = \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$)
Postup řešení: Opět budeme zkoumat množinu $y \in \mathbb{R}$, pro která existuje řešení rovnice

$$\frac{x}{x^2 + 1} = y.$$

Hledáme tak všechna možná y, která získáme pokud $x \in \mathbb{R}$. Rovnici upravíme na tvar

$$0 = yx^2 - x + y$$

a její řešení rozdělíme na dva případy:

- $y = 0$: *pak rovnice přejde na tvar $0 = -x \in D_f$ a tedy $y = 0 \in H_f$,*
- $y \neq 0$: *kvadratická rovnice má reálná řešení, pokud $D = 1 - 4y^2 \geq 0$, tj. $|y| \leq \frac{1}{2}$.*

Celkem tedy $H_f = \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.

V případě restrikce musíme ještě ověřit, zda řešení předcházející rovnice nemá řešení mimo definiční obor, tj. musí platit $x \in \langle 1, +\infty)$. Aby řešení bylo v definičním oboru, požadujeme, aby platilo

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4y^2}}{2y} \geq 1 \text{ nebo } x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y^2}}{2y} \geq 1.$$

Řešení nerovnice rozdělíme na dvě části. Nezapomeňme, že v tomto případě jsme vyloučili hodnotu $y = 0$, jíž odpovídá $x = 0$, které nepatří do definičního oboru restrikce.

- $y > 0$:

  Jelikož víme, že $H_{f|_{\langle 1,+\infty)}} \subset H_f$, pak $y \in (0, \frac{1}{2}\rangle$. Dostáváme nerovnici

$$\pm\sqrt{1 - 4y^2} \geq 2y - 1.$$

$\ominus$: *Nerovnice* $-\sqrt{1-4y^2} \geq 2y-1$ *přejde na* $\sqrt{1-4y^2} \leq 1-2y$. *Nerovnici lze umocnit, neb pro* $y \in (0, \frac{1}{2}\rangle$ *se na obou stranách vyskytují nezáporná čísla*

$$1-4y^2 \leq 1+4y^2-4y \Leftrightarrow 0 \leq y(2y-1) \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2}.$$

Nerovnice je tedy splněna pouze pro $y = \frac{1}{2}$.

$\oplus$: *Nerovnice* $\sqrt{1-4y^2} \geq 2y-1$ *je splněna vždy, neboť pro* $y \in (0, \frac{1}{2}\rangle$ *je na levé straně vždy nezáporné číslo a na pravé straně vždy nekladné číslo.*

- $y < 0$:

Jelikož víme, že $H_{f|_{\langle 1,+\infty)}} \subset H_f$, *pak* $y \in \langle -\frac{1}{2}, 0)$. *Dostáváme nerovnici*

$$\pm\sqrt{1-4y^2} \leq 2y-1$$

$\ominus$: *Nerovnice* $-\sqrt{1-4y^2} \leq 2y-1$ *přejde na* $\sqrt{1-4y^2} \geq 1-2y$. *Nerovnici umocníme, neb pro* $y \in \langle -\frac{1}{2}, 0)$ *se na obou stranách vyskytují nezáporná čísla. Dostaneme*

$$1-4y^2 \geq 1+4y^2-4y \Leftrightarrow 0 \geq y(2y-1).$$

Vzhledem k podmínce $y < 0$ *tato nerovnice nemá řešení.*

$\oplus$: *Nerovnice* $\sqrt{1-4y^2} \leq 2y-1$ *nemá řešení, neboť pro* $y \in \langle -\frac{1}{2}, 0)$ *je na levé straně vždy nezáporné číslo a na pravé straně vždy záporné číslo.*

Řešení nerovnice existuje pouze pro $(0, \frac{1}{2}\rangle$, *jelikož pro taková* y ***všechna*** x *z kvadratické rovnice splňují podmínku* $x \geq 1$. *Můžeme psát* $H_{f|_{\langle 1,+\infty)}} = (0, \frac{1}{2}\rangle$. *Nula tam nepatří. Její vzor je 0, která není v definičním oboru.*

Nyní přejdeme k vyšetření injektivity. Funkce f *není injektivní, pokud*

$$(\exists x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2)(f(x_1) = f(x_2)).$$

Úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1^2+1} = \frac{x_2}{x_2^2+1} \\ &\Leftrightarrow x_1(x_2^2+1) = x_2(x_1^2+1) \\ &\Leftrightarrow 0 = (x_1-x_2)(x_2x_1-1) \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_2x_1 = 1 \end{aligned}$$

Původní funkce tedy ***není*** *injektivní, můžeme volit například* $x_1 = \frac{1}{2}$ *a* $x_2 = 2$. *Její restrikce už injektivní* ***je***, *jelikož v definičním oboru jsou* $x \geq 1$ *a pro ty již druhá podmínka nikdy platit nebude (platila by pouze pro* $x_1 = x_2 = 1$ *ale rovnost je vyloučena). Proto*

$$H_f = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, H_{f|_{\langle 1,+\infty)}} = \left(0, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad f \text{ není injektivní, restrikce ano.}$$

Příklad 3.4 *Nechť zobrazení* $f : (1,2) \to \langle 0,2\rangle$ *je definováno vztahem* $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$ *a zobrazení* $g : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *vztahem* $g(m,n) = m\cdot n$. *Vyšetřete u funkcí* f *a* g, *zda jsou*

i. *injektivní,*

ii. $\langle 0,2\rangle$*-surjektivní (u funkce* f*), resp* $\mathbb{N}$*-surjektivní (u funkce* g*).*

(Řešení: f *je injektivní, není* $\langle 0,2\rangle$*-surjektivní;* g *není injektivní, je* $\mathbb{N}$*-surjektivní.)*
Postup řešení:

* *Funkce* h *je injektivní, pokud* $(\forall x_1, x_2 \in D_h)(h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.
* *Funkce* h *je* M*-surjektivní, pokud* $(\forall y \in M)(\exists x \in D_h)(y = h(x))$.

- *Funkce* f*:*

  i. *injektivita:*

$$\begin{aligned}\sqrt{x_1(x_1-1)} = \sqrt{x_2(x_2-1)} &\Leftrightarrow x_1(x_1-1) = x_2(x_2-1)\\ &\Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 + x_2 - x_1 = 0\\ &\Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2) + (x_2-x_1) = 0\\ &\Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2-1) = 0\\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_1+x_2 = 1.\end{aligned}$$

  Z druhé podmínky vychází, že kdyby platilo $x_2 = 1 - x_1$, *nemáme injektivitu. Platí ale* $D_f = (1,2)$, *tj.* $x_1 \in (1,2)$. *Pro taková* x_1 *pak platí* $x_2 = 1 - x_1 \notin (1,2) = D_f$, *tj.* x_2 *nebude v definičním oboru. Proto* ***f je injektivní.***

  ii. *surjektivita: Ověřujeme, zda* $(\forall y \in \langle 0,2\rangle)(\exists x \in (1,2))(y = f(x))$. *Protože pro* $D_f = (1,2)$ *jsou obě strany nezáporné, lze umocnit*

$$\sqrt{x(x-1)} = y \Leftrightarrow 0 = x^2 - x - y^2.$$

  Abychom obdrželi reálná řešení, musí platit $D = 1 + 4y^2 \geq 0$, *což platí. Pro dané* y *tak musí příslušné* x *splňovat*

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4y^2}}{2} \in (1,2).$$

  Znaménko $\ominus$ *vede na soustavu nerovnic* $-1 > \sqrt{1+4y^2} > -3$, *která zjevně nemá řešení. Pro* $\oplus$ *dostáváme nerovnice*

$$1 < \frac{1+\sqrt{1+4y^2}}{2} < 2 \Leftrightarrow 2 < 1 + \sqrt{1+4y^2} < 4 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{1+4y^2} < 3.$$

  První nerovnost je splněna vždy. Z druhé nerovnosti dostáváme podmínku

$$1 + 4y^2 < 9 \Leftrightarrow 4y^2 < 8 \Leftrightarrow |y| < \sqrt{2}.$$

  Proto ***f není*** $\langle 0,2\rangle$***-surjektivní,*** *neboť* $\langle 0,2\rangle$ *není podmnožinou* $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

- *Funkce g:*

  i. *injektivita:* ***g není injektivní****, protože např.* $g(1,2) = g(2,1) = 2$.

  ii. $\mathbb{N}$*-surjektivita: Máme vyšetřit, zda platí výrok*

  $$(\forall l \in \mathbb{N})(\exists m, n \in \mathbb{N})(m \cdot n = l)$$

  K libovolnému $l \in N$ *zvolíme* $n = l$ *a* $m = 1$. *Funkce* ***g je*** $\mathbb{N}$***-surjektivní****.*

Příklad 3.5 *Nechť zobrazení* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je definováno vztahem* $f(z) = z^3$. *Určete* $f^{-1}(\mathbb{R})$ *a vyšetřete, jestli* f *je injektivní a* $\mathbb{C}$*-surjektivní.*
(Řešení: $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \left\{a + b\boldsymbol{i} | \, a, b \in \mathbb{R} \wedge \sqrt{3}a = \pm b\right\}$*, není injektivní, je* $\mathbb{C}$*-surjektivní)*
Postup řešení:

- *vzor: Hledáme vzor množiny* $\mathbb{R}$. *Z definice* $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} | z^3 \in \mathbb{R}\}$. *Číslo* $z \in \mathbb{C}$ *zapíšeme jako* $z = a + \boldsymbol{i}b$, *kde* $a, b \in \mathbb{R}$. *Pak*

  $$\begin{aligned}(a + \boldsymbol{i}b)^3 &= a^3 + \boldsymbol{i}^3 b^3 + 3a^2\boldsymbol{i}b + 3a\boldsymbol{i}^2 b^2 \\ &= a^3 - b^3\boldsymbol{i} + 3a^2 b\boldsymbol{i} - 3ab^2 \\ &= (a^3 - 3ab^2) + \boldsymbol{i}(3a^2 b - b^3).\end{aligned}$$

  Aby $z^3 \in \mathbb{R}$ *potřebujeme, aby platilo*

  $$3a^2 b - b^3 = 0 \Leftrightarrow b(3a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee b = \pm\sqrt{3}a.$$

  Celkem tedy $f^{-1}(\mathbb{R}) = \left\{a + \boldsymbol{i}b | a, b \in \mathbb{R} \wedge \left(b = 0 \vee b = \pm\sqrt{3}a\right)\right\}$.

  pozn: Vzor lze také hledat přes goniometrický tvar $z \in \mathbb{C}$.

- *injektivita: Tipneme, že funkce není injektivní, tj.* $(\exists z, w \in \mathbb{C}, z \neq w)(f(z) = f(w))$. *Přes Moivrovu větu budeme hledat* $z, w \in \mathbb{C}$, *pro která platí* $z^3 = w^3$. *Pomocí Moivrovy věty z rovnice dostáváme (rovnost reálné a imaginární složky)*

  $$\begin{aligned}|z|^3 \cos 3\varphi &= |w|^3 \cos 3\psi, \\ |z|^3 \sin 3\varphi &= |w|^3 \sin 3\psi,\end{aligned}$$

  kde $z = |z|(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)$ *a* $w = |w|(\cos\psi + \boldsymbol{i}\sin\psi)$. *Volme například* $|z| = |w| = 1$, $\varphi = 0$ *a* $\psi = \frac{2}{3}\pi$. *Pak jsou předcházející rovnice splněny a přitom zjevně* $z \neq w$. *Proto* ***f není injektivní****.*

- $\mathbb{C}$*-surjektivita: Ověříme, zda* $(\forall w \in \mathbb{C})(\exists z \in \mathbb{C})(z^3 = w)$. *Pomocí Moivrovy věty*

  $$|z|^3(\cos 3\varphi + \boldsymbol{i}\sin 3\varphi) = |w|(\cos\psi + \boldsymbol{i}\sin\psi).$$

  K libovolnému zadanému w *můžeme volit např.* $|z| = \sqrt[3]{|w|}$ *a* $\varphi = \frac{\psi}{3}$. *Proto* ***f je*** $\mathbb{C}$***-surjektivní****.*

Příklad 3.6 *Určete definiční obory funkcí $f \circ g$ a $g \circ f$, kde*

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

Okomentujte, zda se tyto dvě složené funkce rovnají či nikoli.
(Řešení: $D_{f\circ g} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 \middle| \, k \in \mathbb{N}_0 \right\}$, $D_{g\circ f} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. Tyto složené funkce se nerovnají.)
Postup řešení:

- *$f \circ g$: Dostáváme funkci $f \circ g = \operatorname{tg}(\sqrt{x})$. Podmínky na definiční obor tedy jsou:*

$$x \geq 0 \wedge \sqrt{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \neq (\frac{\pi}{2} + k\pi)^2.$$

  Celkem tedy $D_{f\circ g} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \left\{(\frac{\pi}{2} + k\pi)^2 | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- *$g \circ f$: Dostáváme funkci $g \circ f = \sqrt{\operatorname{tg} x}$. Podmínky na definiční obor*

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge \operatorname{tg} x \geq 0.$$

  Celkem tedy $D_{g\circ f} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

Funkce se nerovnají, protože nemají stejný definiční obor (nelze tedy ani zkoumat rovnost ve všech bodech).

3.2 Cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické funkce

Příklad 3.7 *Určete definiční obor, obor hodnot a nakreslete graf následujících funkcí*

i. $f(x) = |\arcsin(-2x)|$,

ii. $f(x) = -2\arcsin(|x + 1|) + \frac{\pi}{4}$,

iii. $f(x) = |\arccos(1 - \frac{x}{2}) - \frac{\pi}{2}|$.

(Řešení: i. $D_f = \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, $H_f = \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, ii. $D_f = \langle -2, 0\rangle$, $H_f = \langle -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\rangle$, iii. $D_f = \langle 0, 4\rangle$, $H_f = \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$)
Postup řešení: Pro číslo $x \in \mathbb{R}$ a množinu M definujme operace

- $M + x = \{y + x | y \in M\}$,
- $|M| = \{|x| : x \in M\}$.

Řešení je následující:

i.
- $D_{arsin} = \langle -1, 1\rangle \Rightarrow -2x \in \langle -1, 1\rangle \Rightarrow x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \Rightarrow D_f = \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$.
- $H_{arsin} = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \Rightarrow H_f = \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

ii.
- *Pro D_f: řešíme nerovnici $|x + 1| \leq 1$, z čehož vidíme, že $D_f = \langle -2, 0\rangle$.*

- *Pro H_f: v argumentu f vystoupí $z = |x+1| \in \langle 0,1\rangle$, proto* $H_f = -2\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle + \frac{\pi}{4} = \langle -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\rangle$.

iii.
- *Pro D_f: řešíme nerovnici $-1 \le 1 - \frac{x}{2} \le 1$ z čehož vidíme, že $D_f = \langle 0, 4\rangle$.*
- $H_f = |\langle 0, \pi\rangle - \frac{\pi}{2}| = |\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle| = \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Příklad 3.8 *Dokažte vztah*

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

Pro která x tato identita platí?
(Řešení: platí pro všechna $x \in \langle -1, 1\rangle$)
Postup řešení:
Aplikací funkce cosinus na obě strany dokazované rovnice dostaneme

$$\cos(\arccos x) = x,$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - \arcsin x) = \cos(\frac{\pi}{2})\cos(\arcsin x) + \sin(\frac{\pi}{2})\sin(\arcsin x) = \sin(\arcsin x) = x.$$

Protože obě strany dokazované rovnosti jsou čísla z intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ a funkce cosinus je na tomto intervalu prostá, platí

$$\cos(\arccos x) = \cos(\frac{\pi}{2} - \arcsin x) \Rightarrow \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

Příklad 3.9 *Odvoďte následující vztahy*

i. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

ii. $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$.

Pro která x tyto identity platí?
(Řešení: platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$)
Postup řešení: Přímo z definice odvodíme

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Obdobně pro druhou identitu úpravou levé a pravé strany dostáváme

$$LS = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}),$$
$$PS = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}).$$

Rovnost tedy platí. Identity platí pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 3.10 *Zjednodušte následující výrazy:*

i. $\sin(\operatorname{arctg} x)$,

ii. $\cos(\arcsin x)$,

iii. $\sinh(\operatorname{arg}\cosh x)$.

Pro která x jsou dané úpravy korektní?
(Řešení: i. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ pro $x \in \mathbb{R}$, ii. $\sqrt{1-x^2}$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$, iii. $\sqrt{x^2-1}$ pro $x \geq 1$)
Postup řešení:

i. *Funkci sinus vyjádříme pomocí funkce tangens. Platí*

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$
$$\Rightarrow \sin^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Protože pro všechna $x \in \mathbb{R}$ má $\sin(\operatorname{arctg} x)$ stejné znaménko jako x, dostáváme odmocněním $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

ii. *Funkce cosinus vyjádříme pomocí funkce sinus. Platí*

$$\cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2.$$

Protože $\arcsin x$ je pro $x \in D_{arcsin} = \langle -1, 1\rangle$ číslo z intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$, na kterém je cosinus nezáporný, dostáváme odmocněním $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

iii. *Hyperbolický sinus vyjádříme pomocí hyperbolického cosinu. Platí*

$$\sinh^2(\operatorname{arg}\cosh x) = \cosh^2(\operatorname{arg}\cosh x) - 1 = x^2 - 1.$$

Protože pro $x \in D_{argcosh} = \langle 1, +\infty)$ je $\sinh(\operatorname{arg}\cosh x) \geq 0$, dostaneme odmocněním $\sinh(\operatorname{arg}\cosh x) = \sqrt{x^2-1}$.

Příklad 3.11 *Definujte funkce $\operatorname{arg}\sinh x$ a $\operatorname{arg}\operatorname{tgh} x$, nalezněte jejich definiční obory a obory hodnot a nakreslete jejich grafy.*
(Řešení: i. $D_{argsinh} = H_{argsinh} = \mathbb{R}$, ii. $D_{argtgh} = (-1, 1)$, $H_{argtgh} = \mathbb{R}$)

Příklad 3.12 *Odvoďte identity*

i. $\operatorname{arg}\sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$,

ii. $\operatorname{arg}\operatorname{tgh} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$.

Pro která x tyto rovnosti platí?

(Řešení: i. pro všechna $x \in \mathbb{R}$, ii. pro všechna $x \in (-1, 1)$)
Postup řešení:

i. *Z rovnice* $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = y$ *vyjádříme* x *v závislosti na* y. *Vynásobením rovnice* $2e^x$ *dostaneme rovnost*

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

Po substituci $z = e^x$ *přejde předcházející rovnice na tvar*

$$z^2 - 2yz - 1 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má diskriminant roven $D = 4y^2 + 4 > 0$. *Odpovídající řešení jsou*

$$z_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$

Kořen s $\ominus$ *je záporný, což je spor s kladností exponenciály (viz substituce). Do substituce dosadíme kořen s* $\oplus$

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

a dostáváme $\arg\sinh y = x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$. *Vztah platí pro každé* $y \in \mathbb{R}$.

ii. *Z definice* $\mathrm{tgh}(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y$ *vyjádříme* x *v závislosti na* y. *Úpravami dostaneme*

$$\begin{aligned} e^{2x} - 1 &= y(e^{2x}+1) = ye^{2x} + y, \\ e^{2x} &= \frac{1+y}{1-y}, \\ x &= \frac{1}{2}\ln(\frac{1+y}{1-y}). \end{aligned}$$

Dostáváme $\arg\mathrm{tgh}\, y = x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+y}{1-y})$. *Vztah platí pro každé* $|y| < 1$.

3.3 Množinové operace, velikost a ekvivalence množin

Poznámka 3.2 *Pojem mohutnosti nebyl na přednášce explicitně definován. V příkladech se budeme ptát, kolik má daná množina prvků.*

Příklad 3.13 *Dokažte De Morganovy zákony pro sjednocení a průnik množin přes indexovou množinu libovolné mohutnosti, tj.*

$$U \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I_\alpha} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I_\alpha} (U \setminus A_\alpha), \quad U \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I_\alpha} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I_\alpha} (U \setminus A_\alpha).$$

Postup řešení:

- *Dokážeme dvě inkluze:*

i. $U \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I_\alpha} A_\alpha\right) \subset \bigcup_{\alpha \in I_\alpha} (U \setminus A_\alpha)$:

Volme $x \in U \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I_\alpha} A_\alpha\right)$. *To implikuje, že* $(x \in U \wedge x \notin \left(\bigcap_{\alpha \in I_\alpha} A_\alpha\right))$. *Čili máme, že* $(\exists \alpha \in I_\alpha)(x \notin A_\alpha)$. *Z toho* $(\exists \alpha \in I_\alpha)(x \in U \setminus A_\alpha)$. *Čili* $x \in \bigcup_{\alpha \in I_\alpha} (U \setminus A_\alpha)$.

ii. $U \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I_\alpha} A_\alpha\right) \supset \bigcup_{\alpha \in I_\alpha} (U \setminus A_\alpha)$:

Volme $x \in \bigcup_{\alpha \in I_\alpha} (U \setminus A_\alpha)$. *To implikuje, že* $(\exists \alpha \in I_\alpha)(x \in (U \setminus A_\alpha))$. *Čili máme, že* $(x \in U \wedge (\exists \alpha \in I_\alpha)(x \notin A_\alpha))$. *Tedy* $x \notin \left(\bigcap_{\alpha \in I_\alpha} A_\alpha\right)$, *ale zároveň* $x \in U$. *Čili máme* $x \in U \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I_\alpha} A_\alpha\right)$.

- $U \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I_\alpha} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I_\alpha} (U \setminus A_\alpha)$:

$$\begin{aligned} x \in U \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I_\alpha} A_\alpha\right) &\Leftrightarrow x \in U \wedge x \notin \bigcup_{\alpha \in I_\alpha} A_\alpha \\ &\Leftrightarrow x \in U \wedge (\forall \alpha \in I_\alpha)(x \notin A_\alpha) \\ &\Leftrightarrow (\forall \alpha \in I_\alpha)(x \in U \setminus A_\alpha) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I_\alpha} (U \setminus A_\alpha). \end{aligned}$$

Příklad 3.14 *Dokažte, že*

$$(A \setminus C) \cap B = A \cap (B \setminus C), \quad (A \setminus B) \cap (B \setminus C) = \emptyset, \quad B \cup (A \cap C) \setminus (A \setminus B) = B.$$

Postup řešení:

- $$\begin{aligned} x \in (A \setminus C) \cap B &\Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \setminus C \\ &\Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \setminus C) \qquad \Leftrightarrow x \in A \cap (B \setminus C) \end{aligned}$$

- *Sporem. Nechť* $x \in (A \setminus B) \cap (B \setminus C)$. *Pak*

$$x \in (A \setminus B) \wedge x \in (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in B \wedge x \notin C,$$

což je spor.

- *Platí*

$$\begin{aligned} x \in B \cup (A \cap C) \setminus (A \setminus B) &\Leftrightarrow x \in B \cup (A \cap C) \wedge x \notin (A \setminus B) \\ &\Leftrightarrow x \in B \cup (A \cap C) \wedge (x \notin A \vee x \in B). \end{aligned}$$

Pomocí této ekvivalence nyní dokážeme obě inkluze v zadání. Pokud je $x \in B$, podle druhého řádku této ekvivalence zřejmě platí i $x \in B \cup (A \cap C) \setminus (A \setminus B)$.

Druhou inkluzi ukážeme sporem. Předpokládejme, že platí $x \in B \cup (A \cap C) \setminus (A \setminus B)$ a zároveň $x \notin B$. Protože $x \notin A \vee x \in B$, musí být $x \notin A$. To znamená, že platí $x \notin (A \cap C)$. Protože ale platí $x \in B \cup (A \cap C)$, musí $x \in B$, což je spor.

Příklad 3.15 *Zjednodušte vyjádření následujících množin:*

i. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, n)$,

ii. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right\rangle$,

iii. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\langle \frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n} \right\rangle$,

iv. $\displaystyle\bigcap_{r\in\mathbb{R}} \left\langle r, \frac{r+1}{r^2+1} \right\rangle$.

(Řešení: i. $\mathbb{R}$, ii. $\{0\}$, iii. $\langle 1/2, 2)$, iv. $\emptyset$)
Postup řešení:

i. *Budeme chtít ukázat, že* $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, n) = \mathbb{R}$. *Chceme tedy ukázat dvě inkluze. Inkluze* $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, n) \subset \mathbb{R}$ *je jasná. Pro důkaz druhé* $\displaystyle\mathbb{R} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, n)$ *si vezmeme libovolné* $x \in \mathbb{R}$. *K němu najdeme* $n \in \mathbb{N}$ *tak, že* $|x| < n$. *Pak jistě platí, že* $x \in (-n, n)$ *a tedy* $\displaystyle x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, n)$.

ii. *Budeme chtít ukázat, že* $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right\rangle = \{0\}$. *Opět máme ukázat dvě inkluze. Inkluze* $\displaystyle\{0\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right\rangle$ *je jasná, jelikož pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí, že* $-\frac{1}{n} \leq 0 < \frac{1}{n}$. *Druhou inkluzi* $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right\rangle \subset \{0\}$ *ukážeme sporem. Nechť tedy* $\displaystyle x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right\rangle$ *a pro spor předpokládejme, že* $x > 0$. *Pak jistě nalezneme* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tak, že* $\frac{1}{n_1} < x$ *(např.* $n_1 = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1$*). Pak ovšem* $x \notin \left\langle -\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_1} \right\rangle$, *což je spor s předpokladem, že* $\displaystyle x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right\rangle$. *Podobně pro* $x < 0$ *(nutné ukázat také).*

iii. *Ukážeme, že* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\langle \frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n} \right) = \left\langle \frac{1}{2}, 2 \right)$. *To se ukáže snadno, jelikož děláme sjednocení intervalů, které jsou do sobe vnořeny: Funkce* $f(n) = \frac{n}{n+1}$ *je rostoucí a funkce* $g(n) = \frac{n+1}{n}$ *je klesající. Proto minimum funkce* f *bude dolní hranice intervalu a maximum funkce* g *bude horní hranice intervalu.*

iv. *Ukážeme, že* $\bigcap_{r\in\mathbb{R}} \left\langle r, \frac{r+1}{r^2+1} \right) = \emptyset$. *Stačí najít dva disjunktní intervaly. Například pro* $r = -1$ *máme interval* $I_{-1} = \langle -1, 0)$ *a pro* $r = 5$ *máme interval* $I_5 = \langle 5, \frac{6}{26})$. *Jelikož* $I_{-1} \bigcap I_5 = \emptyset$, *pak musí i* $\bigcap_{r\in\mathbb{R}} \left\langle r, \frac{r+1}{r^2+1} \right) = \emptyset$, *protože děláme průnik s prázdnou množinou.*

Příklad 3.16 *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Ukažte, že platí*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ x \in \mathbb{R} |\, |f(x)| > \frac{1}{n} \right\} = \{x \in \mathbb{R} |\, f(x) \neq 0\}.$$

Postup řešení: Pro přehlednost označíme $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ x \in \mathbb{R} |\, |f(x)| > \frac{1}{n} \right\}$ *a* $A = \{x \in \mathbb{R} |\, f(x) \neq 0\}$. *Chceme tedy ukázat, že* $A = B$, *tedy dvě inkluze:*

i. $A \subset B$: *Předpokládáme, že* $x \in A$. *Chceme ukázat, že* $x \in B$. *Jelikož* $x \in A$, *platí* $f(x) \neq 0$. *BÚNO:* $f(x) > 0$. *Pak jistě existuje* $n \in \mathbb{N}$ *tak, že* $f(x) > \frac{1}{n}$. *Číslo* n *můžeme definovat jako* $n := \lfloor \frac{1}{f(x)} \rfloor + 1$. *Pak je již jasné, že* $x \in B$

ii. $B \subset A$: *Předpokládáme, že* $x \in B$. *Chceme ukázat, že* $x \in A$. *Pro spor předpokládejme, že* $x \notin A$. *Jelikož* $x \in B$, *pak* $|f(x)| > \frac{1}{n}$ *pro jisté* $n \in \mathbb{N}$. *Zároveň ale* $x \notin A$ *a tedy* $f(x) = 0$, *což je spor.*

Příklad 3.17 *Volte nespočetné množiny* A, B *tak, aby* $A \setminus B$ *byla*

i. *prázdná,*

ii. *konečná,*

iii. *spočetná,*

iv. *nespočetná.*

(Řešení: Například: i. $A = B = \mathbb{R}$, *ii.* $A = \mathbb{R}$ *a* $B = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, *iii.* $A = \mathbb{R}$ *a* $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, *iv.* $A = \mathbb{R}$ *a* $B = \mathbb{R} \setminus (0, 1)$
)

Postup řešení:

pozn: Připomenutí vztahu $C \setminus (B \setminus A) = (C \cap A) \cup (C \setminus B)$.

Příklad 3.18

i. *Kolik prvků mají následující množiny*

$$\{1\}, \quad \{1,1\}, \quad \{n \in \mathbb{N} | \, n < 10\}, \quad \{1, 2, \{1, 2\}, \emptyset\}?$$

ii. *Kolik prvků má prázdná množina? Kolik prvků má množina všech prázdných množin? Kolik prvků má množina všech množin obsahujících pouze prázdnou množinu?*

(Řešení: $1, 1, 9, 4; 0, 1, 1.$*)*
Postup řešení:

i. *Postupně 1, 2,* $\#\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = 9$*, množina má 4 prvky a to: 1,2,* $\{1, 2\}, \emptyset$.

ii. *Prázdná množina neobsahuje žádný prvek. Protože prázdná množina je pouze jedna, množina všech prázdných množin obsahuje právě jeden prvek a to prázdnou množinu. Počet množin, které obsahují pouze prázdnou množinu, je jedna. Proto množina všech množin obsahující pouze prázdnou množinu, obsahuje právě jednu množinu (tu, která obsahuje pouze prázdnou množinu).*

Příklad 3.19 *Dokažte, že*

i. $(a, b) \sim (c, d)$, $\langle a, b\rangle \sim \langle c, d\rangle$, $(a, b) \sim \langle a, b)$,

ii. $(0, 1) \sim (0, \infty) \sim (-\infty, \infty)$,

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$.
Postup řešení:

- *U prvních dvou ekvivalencí volíme příslušnou bijekci* f *jako lineární transformaci jednoho intervalu na druhý, tj. pro*

$$f(x) = \frac{x - a}{b - a}(d - c) + c$$

platí, že $f : (a, b) \to (c, d)$*, nebo* $f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$ *bijektivně (injektivně a surjektivně). V případě třetí ekvivalence pužijeme "**posunutí**". V intervalu* (a, b) *vybereme spočetnou nekonečnou množinu* $M = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$*. Bijekci definujeme následovně*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (a, b) \setminus M, \\ a, & x = x_1, \\ x_{n+1}, & x = x_n, n \geq 1. \end{cases}$$

Pak je vidět, že $f : (a, b) \to \langle a, b)$ *bijektivně (injektivně a surjektivně).*

- *Jelikož ekvivalence je transitivní, stačí ukázat, že* $(0, \frac{\pi}{2}) \sim (0, +\infty)$*. Ekvivalence mezi* $(0,1)$ *a* $(0, \frac{\pi}{2})$ *je ukázána v minulém příkladu. Pro důkaz této ekvivalence stačí vzít např.* $f(x) = \operatorname{tg} x$*. Abychom ukázali ekvivalenci* $(0, \infty) \sim (-\infty, \infty)$*, můžeme vzít např.* $f(x) = \ln(x)$*.*

Příklad 3.20 *Dokažte, že*

i. *množina* $\mathbb{Q}$ *je spočetná,*

ii. *množina* $\mathbb{R}$ *je nespočetná.*

Postup řešení:

i. *Chceme ukázat, že* $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$*. Pro libovolné* $q \in \mathbb{Q}$ *definujme zobrazení* $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ *vztahem*

$$\phi(q) = (p, q),$$

kde $q = \frac{p}{q}$ *je v základním tvaru (* p, q *jsou nesoudělná). Je zřejmé, že definované zobrazen je prosté. Využijeme, že kartézský součin spočetných množin je spočetný. Tedy* $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ *je spočetná množina. Množina* $\phi(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ *je tedy určitě spočetná (nekonečná podmnožina spočetné množiny je spočetná). Protože* ϕ *je prosté zobrazení, dostáváme* $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$*,což jsme chtěli ukázat.*
Jiný způsob: *pomocí Cantorova diagonálního argumentu*

ii. *Ukážeme, že i interval* $(0,1)$ *je nespočetný. Jelikož* $(0,1) \subset \mathbb{R}$ *bude pak jasné, že* $\mathbb{R}$ *je také nespočetné. Budeme postupovat sporem. Nechť interval* $(0,1)$ *je spočetný. Pak existuje bijekce* $\phi : \mathbb{N} \to (0,1)$*. Jinými slovy, můžeme vytvořit list se všemi reálnými čísly z intervalu* $(0,1)$*. Příklad takového listu je uveden v Tabulce 5. Nyní zkonstruujeme reálné číslo* $X \in (0,1)$*, které nebude na seznamu. Pro každé* $n \in N$*, nechť* n*-té desetinné místo čísla* X *je rovno* n*-tému desetinnému číslu* n*-té čísla +1 pokud tato cifra je menší než 9. Pokud tato cifra je 9, definujeme cifru jako 0. V našem případě by číslo vypadalo* $X = 0.1315....$ *Z konstrukce je jasné, že naše číslo nemůže být v našem seznamu a daná bijekce tedy není surjektivní. Což je spor.*

1	0.0234242420905903943493
2	0.3243429342942949243924
3	0.5000000000000000000000
4	0.2034230492094029402949

Tabulka 5: Tabulka pro důkaz, že množina $\mathbb{R}$ je nespočetná.

3.4 Omezenost množin

Příklad 3.21 *Zapište pomocí kvantifikátorů definici omezené a shora či zdola omezené množiny a definici horní/dolní závory.*

(Řešení:

- M *je omezená zdola* $\Leftrightarrow (\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in M)(x \geq K)$.
  Každé takové K *s touto vlastností se nazývá dolní závora množiny* M.
- M *je omezená shora* $\Leftrightarrow (\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in M)(x \leq K)$.
  Každé takové K *s touto vlastností se nazývá horní závora množiny* M.
- M *je omezená* $\Leftrightarrow (\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in M)(|x| \leq K)$.

)
Postup řešení:
pozn: Horních či dolních závor může být více (množiny horních a dolních závor).

Příklad 3.22 *Rozhodněte o omezenosti zdola a shora následujících podmnožin* $\mathbb{R}$

i. $\{2 - n | \, n \in \mathbb{N}\}$,

ii. $\{x > 0| \, \sin(5x) \geq 16 \sin^5 x\}$,

iii. $\{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} | \, n \in \mathbb{N}\}$.

(Řešení: i. omezená pouze shora, ii. omezená pouze zdola iii. omezená zdola i shora)
Postup řešení:

i. *Množina je omezená shora, závorou je například* $K = 1$ *nebo* $K = 1{,}23$. *Množina není omezená zdola, jelikož platí negace omezenosti zdola, tj.*

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(2 - n < K).$$

Jako prvek n *lze například volit* $n := \lfloor |K| \rfloor + 3$.

ii. *Zdola je zjevně omezená nulou. Pro omezenost shora zkoumejme nerovnici*

$$\sin(5x) \geq 16 \sin^5(x).$$

Všechna x *ve tvaru* $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *zjevně splňují nerovnost, jelikož* $\sin(5k\pi) = 0$ *a současně* $\sin^5(k\pi) = 0$, *tj.* $0 \geq 0$. *Množina je tedy shora neomezená, což i formálně dokážeme. Chceme ukázat, že platí*

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}, \sin(5x) \geq 16 \sin^5(x))(x \geq K).$$

Volíme-li např. $x = (\lfloor |K| \rfloor + 1)\pi$, *pak* $\sin(5x) \geq 16 \sin^5(x)$ *a současně splňuje požadovanou nerovnost* $x \geq K$.

iii. *Upravíme předpis prvků množiny*

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n} = (\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})\cdot\frac{(n+1)^{2/3}+\sqrt[3]{(n+1)n}+n^{2/3}}{(n+1)^{2/3}+\sqrt[3]{(n+1)n}+n^{2/3}}$$
$$= \frac{n+1-n}{(n+1)^{2/3}+\sqrt[3]{(n+1)n}+n^{2/3}}$$
$$= \frac{1}{\underbrace{(n+1)^{2/3}}_{\geq 1}+\underbrace{\sqrt[3]{(n+1)n}}_{\geq 1}+\underbrace{n^{2/3}}_{\geq 1}} \leq \frac{1}{3}$$

Množina je tedy omezená shora. Horní závorou je např. $K=\frac{1}{3}$. *Dále platí, že* $\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}>0$. *Množina je tedy omezená zdola. Dolní závorou je např.* $K=0$.

Příklad 3.23 *Rozhodněte o omezenosti zdola a shora pro následujících podmnožin* $\mathbb{R}$

i. $\{x^2+5x-6|\, x\in(-1,+\infty)\}$,

ii. $\{x\in\mathbb{R}|\, x^2+5x-6\in(-1,+\infty)\}$.

(Řešení: i. omezená zdola, ii. není omezená zdola ani shora)
Postup řešení:

i. *Křivka* $y=x^2+5x-6$ *je parabola s vrcholem* $[-5/2,-49/4]$. *Množina je tedy omezená zdola např. číslem* $-49/4$. *Dále dokážeme, že množina není omezená shora. Chceme ukázat, že platí*

$$(\forall K\in R)(\exists x\in(-1,+\infty))(x^2+5x-6>K).$$

Pomocí odhadu $x^2+5x-6\geq 5x-6>K$ *můžeme* x *volit např. jako* $x=\frac{|K|+6}{5}+1$.

ii. *V druhém případě upravíme vyjádření dané množiny. Množina je tvořena takovými* x, *pro která platí*
$$x^2+5x-6>-1 \Leftrightarrow x^2+5x-5>0.$$
Kvadratický výraz má nulové body $x_{1,2}=\frac{-5\pm3\sqrt{5}}{2}$. *Lze tedy psát*

$$\{x\in\mathbb{R}|\, x^2+5x-6\in(-1,+\infty)\} = (-\infty,\frac{-5-3\sqrt{5}}{2})\cup(\frac{-5+3\sqrt{5}}{2},+\infty).$$

Z tohoto zápisu je vidět, že množina není omezená zdola ani shora.

Příklad 3.24 *Rozhodněte o omezenosti zdola a shora pro následující podmnožiny* $\mathbb{R}$. *Pokuste se určit příslušné množiny všech dolních a horních závor.*

i. $\emptyset$

ii. $\{\frac{2n}{3n+1} | \, n \in \mathbb{N}\}$

iii. $\{\frac{x^3}{x^2+10} | \, x \in \mathbb{R}\}$

(Řešení: Nechť M_h je množina horních závor a M_d množina dolních závor. Výsledky: i. omezená, $M_d = M_h = \mathbb{R}$, ii. omezená, přičemž $M_h = \langle \frac{2}{3}, +\infty)$ a $M_d = \big(-\infty, \frac{1}{2}\big\rangle$, iii. není omezená zdola ani shora)
Postup řešení:

i. *Prázdná množina je z definice omezenosti omezená. Každé reálné číslo je horní i dolní závorou.*

ii. *Z definice snadno ukážeme, že prvky množiny tvoří rostoucí posloupnost. Tipneme, že prvky rostou k číslu $\frac{2}{3}$. Jistě, platí, že $\frac{2n}{3n+1} \leq \frac{2}{3}$. Pro důkaz, že žádné číslo menší než $\frac{2}{3}$ není horní závorou, najdeme pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ nějaké $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\frac{2n}{3n+1} > \frac{2}{3} - \varepsilon$, tedy $\frac{2}{3n+1} < \varepsilon$. Pomocí odhadu $\frac{2}{3n+1} < \frac{2}{3n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$ zjistíme, že vhodným n je např. $n = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$. Množina horních závor je proto $M_h = \langle \frac{2}{3}, +\infty)$. Jelikož pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $\frac{2n}{3n+1} \geq \frac{1}{2}$ (kde číslo $\frac{1}{2}$ je první člen výše zmíněné rostoucí posloupnosti), množina dolních závor je $M_d = \big(-\infty, \frac{1}{2}\big\rangle$.*

iii. *Tip: množina je neomezená shora, tj. budeme chtít ukázat, že platí*

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(\frac{x^3}{x^2+10} > K).$$

Předpokládejme, že x je kladné. Pomocí odhadu zdola dostaneme

$$\frac{x^3}{x^2+10} > \frac{x^3}{x^2+x^2} = \frac{x}{2} > K.$$

Tento odhad platí pro $x^2 > 10$. Pokud zvolíme např. $x = 2|K| + 10$, tj. zajistíme $x^2 > 10$, bude předcházející výrok splněn. Dále ukážeme neomezenost zdola, tedy platnost výroku

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(\frac{x^3}{x^2+10} < K).$$

Předpokládejme, že x je záporné. Pomocí odhadu shora dostaneme

$$\frac{x^3}{x^2+10} < \frac{x^3}{2x^2} = \frac{x}{2} < K$$

pro $x^2 > 10$. Stačí proto volit např. $x = -2|K| - 10$.

Příklad 3.25 *Rozhodněte o omezenosti zdola a shora pro následující podmnožiny $\mathbb{R}$. Pokuste se určit příslušné množiny všech dolních a horních závor.*

i. $\{\log_2(x) | \, x \in (0, 5\rangle\}$, *ii.* $\{\operatorname{arctg}\left(\frac{x^5-x}{x^2+x+1}\right) | \, x \in \mathbb{R}\}$.

(Řešení: Nechť M_h je množina horních závor a M_d množina dolních závor. Výsledky: i. omezená shora, přičemž $M_h = \langle \log_2 5, +\infty)$, není omezená zdola, ii. omezená, přičemž $M_d = (-\infty, -\frac{\pi}{2}\rangle$ a $M_h = \langle \frac{\pi}{2}, +\infty)$)

Postup řešení:

- *Logaritmus je rostoucí funkce. Proto* $\log_2 x \le \log_2 5, \forall x \in (0, 5\rangle$. *Množina horních závor je tedy množina* $\langle \log_2 5, +\infty)$. *Množina není omezená zdola, tj. musíme ukázat, že*

$$(\forall K \in R)(\exists x \in (0, 5\rangle)(\log_2 x < K)$$

  Pro důkaz výroku, můžeme pro dané K volit např. $x = e^{-|K|-1}$.

- *Funkce $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ je sudá, takže stačí uvažovat $x \in \mathbb{R}_0^+$. Z definice snadno ukážeme, že na intervalu $\langle 0, +\infty)$ je ostře klesající s maximem $f(0) = 1$. Množina horních závor je proto $\langle 1, +\infty)$.*

  Pro každé $x \in \langle 0, +\infty)$ je $f(x) > 0$. Množina je tedy omezená i zdola. Ještě ukážeme, že žádné kladné číslo není dolní závorou, tedy pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ najdeme $x \in \mathbb{R}_0^+$ takové, že platí $\frac{1}{1+x^2} < \varepsilon$. Pomocí odhadu $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2} < \varepsilon$ zjistíme, že takovým x je např. $x = 1/\sqrt{\varepsilon} + 1$. Množina dolních závor je proto $(-\infty, 0\rangle$.

- *Jelikož $H_{\operatorname{arctg}} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, je množina omezená zdola i shora. Ukážeme, že žádné číslo $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ není horní závorou, tedy že pro každé takové α najdeme $x \in \mathbb{R}$ splňující $\operatorname{arctg}\left(\frac{x^5-x}{x^2+x+1}\right) > \alpha$. Zvolme takové α a vyjádřeme ho ve tvaru $\alpha = \operatorname{arctg} y$, kde $y \in \mathbb{R}$. Protože funkce arctg je ostře rostoucí, stačí najít x, které vyhovuje nerovnosti $\frac{x^5-x}{x^2+x+1} > y$. To nalezneme pomocí odhadu $\frac{x^5-x}{x^2+x+1} > \frac{3x^5}{3x^2} = x^3 > y$, který platí pro $x > 1$. Zvolíme např. $x = |y| + 10$.*

  Ještě ukážeme, že žádné číslo $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ není dolní závorou, tedy že pro každé takové α najdeme $x \in \mathbb{R}$ splňující $\operatorname{arctg}\left(\frac{x^5-x}{x^2+x+1}\right) < \alpha$. Vyjádřeme α opět jako $\alpha = \operatorname{arctg} y$ a využijme růst funkce artcg. Hledané x nalezneme pomocí odhadu $\frac{x^5-x}{x^2+x+1} < \frac{x^5-x^5/3}{x^2+1} < \frac{(2/3)x^5}{2x^2} = x^3/3 < y$, který platí např. pro $x < -3$. Zvolíme např. $x = -3|y| - 30$.

  Množina horních závor je proto $\langle \frac{\pi}{2}, +\infty)$ a množina dolních závor $(-\infty, -\frac{\pi}{2}\rangle$.

Příklad 3.26 *Rozhodněte o omezenosti následujících podmnožin $\mathbb{C}$:*

i. $\{5 + \cos\varphi + \boldsymbol{i}(3 + \sin\varphi) | \, \varphi \in \mathbb{R}\}$,

ii. $\{100z + z^{20} | \, |z| < 2\}$.

(Řešení: i. omezená, ii. omezená)

Postup řešení:

i. *Platí*

$$\begin{aligned}|5+\cos\varphi+\boldsymbol{i}(3+\sin\varphi)|^2 &= (5+\cos\varphi)^2+(3+\sin\varphi)^2\\ &= 25+10\cos\varphi+\cos^2\varphi+9+6\sin\varphi+\sin^2\varphi\\ &= 35+10\cos\varphi+6\sin\varphi\le 51<64.\end{aligned}$$

Pro prvky $z=5+\cos\varphi+\boldsymbol{i}(3+\sin\varphi)$ *množiny platí, že* $|z|<8$. *Množina je tedy omezená.*

ii. *Opět ukážeme, že množina je omezená. Pomocí trojúhelníkové nerovnosti dostáváme*

$$|z^{20}+100z|\le|z|^{20}+100|z|<2^{20}+100\cdot 2.$$

Množina je tedy omezená.

Příklad 3.27 *Rozhodněte o omezenosti následujících podmnožin* $\mathbb{C}$*:*

i. $\{z^{-1}|\,|z+\boldsymbol{i}-3|<1\}$,

ii. $\{a+\boldsymbol{i}b|\,a,b\in\mathbb{R},\,(a+b)(a-b)=1\}$.

(Řešení: i. omezená, ii. neomezená)
Postup řešení:

i. *Rozepsáním pro* $z=a+\boldsymbol{i}b\in\mathbb{C}$, *kde* $a,b\in\mathbb{R}$, *dostaneme*

$$|z+i-3|<1\Leftrightarrow|(a-3)+\boldsymbol{i}(b+1)|<1\Leftrightarrow\sqrt{(a-3)^2+(b+1)^2}<1\Leftrightarrow(a-3)^2+(b+1)^2<1.$$

Vidíme, že body $z\in\mathbb{C}$ *množiny* $|z+i-3|<1$ *tvoří kruh se středem v bodě* $[3,-1]$ *a jednotkovým poloměrem. Pro* $z\in\mathbb{C}$ *splňující* $|z+i-3|<1$ *tedy platí, že* $|z|\ge 2$, *protože vzdálenost od nuly k hranici (okraji) tohoto kruhu je určitě větší než 2 (tj. velikost takového komplexního čísla je* $|z|>2$*). Prvky vyšetřované množiny proto splňují* $|\frac{1}{z}|<\frac{1}{2}$ *a množina je tedy omezená.*

ii. *Pro prvky vyšetřované množiny, kterou nazveme* M, *platí* $(a+b)(a-b)=1\Leftrightarrow a^2-b^2=1\Leftrightarrow a^2=b^2+1$. *Ukážeme, že množina* M *není omezená, tj. platí výrok*

$$(\forall K\in\mathbb{R})(\exists z\in M)(|z|\ge K).$$

Ekvivalentní nerovnost je $|z|^2\ge K^2$. *Pro modul platí* $|z|^2=|a+\boldsymbol{i}b|^2=a^2+b^2=2b^2+1$, *kde jsme využili vlastnost prvků množiny M. Chceme ukázat, že* $2b^2+1\ge K^2\Leftrightarrow b^2\ge\frac{K^2-1}{2}$. *Odhadem dostaneme*

$$b^2\ge K^2\ge\frac{K^2-1}{2}.$$

Stačí volit $b=|K|+1$. *Dosazením dostaneme* $a=\sqrt{(|K|+1)^2+1}$. *Pro takové* $z=a+\boldsymbol{i}b$ *tvrzení platí. Množina je proto neomezená.*

Příklad 3.28 *Rozhodněte o omezenosti množiny*

$$\{x \in \mathbb{R} | \, (\exists n \in \mathbb{N})(\log_x n = n)\} \, .$$

(Řešení: omezená)

Postup řešení: Přepíšeme rovnost $\log_x n = n$ *do jiného tvaru. Použitím vztahu* $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ *dostáváme*

$$n = \log_x n = \frac{\ln n}{\ln x} \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{n} \ln n = \ln n^{1/n}.$$

V množině jsou tedy obsaženy takové x*, ke kterým nalezneme* $n \in \mathbb{N}$ *splňující*

$$x = n^{1/n}.$$

x *musí být kladné. Množina je proto omezená zdola. Omezení shora ukážeme pomocí odhadu* $n^{1/n} \leq 2 \Leftrightarrow n \leq 2^n$*. Tento odhad se snadno dokáže pomocí matematické indukce. Z odhadu vidíme, že množina je omezena horní závorou* 2*. Množina je omezená i shora. Celkem je omezená.*

Příklad 3.29 *Rozhodněte o omezenosti následujících množin:*

i. $M_1 = \{\frac{1}{1+x^2} | \, x \in \mathbb{R}\}$,

ii. $M_2 = \{\frac{1}{1+z^2} | \, z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}\}$.

(Řešení: M_1 *omezená,* M_2 *neomezená)*
Postup řešení:

- *Množina* M_1 *je omezená, jelikož*

$$\left| \frac{1}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+0} = 1$$

- *Ukážeme, že množina* M_2 *je neomezená. Ověříme, že platí*

$$(\forall K \in \mathbb{R}^+)(\exists z \in \mathbb{C} \setminus \{\boldsymbol{i}, -\boldsymbol{i}\})(|\frac{1}{1+z^2}| > K).$$

  Pro dané K *budeme hledat* z *ve tvaru* $z = 0 + \boldsymbol{i}b$ *pro* $b \in (0, 1)$*. Pak můžeme upravit nerovnici na tvar*

$$\left| \frac{1}{1+z^2} \right| = \left| \frac{1}{1-b^2} \right| = \frac{1}{1-b^2} > K \Leftrightarrow b^2 > \frac{K-1}{K}$$

  Pak b *volíme jako*

$$b = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } K \leq 1, \\ \sqrt{\frac{K-\frac{1}{2}}{K}} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad 3.30 *Buďte*

i. $M_1 = \{z \in \mathbb{C} |\, (z+1)^{10} = (z-1)^{10}\}$,

ii. $M_2 = \{z \in \mathbb{C} |\, |z+1|^{10} = |z-1|^{10}\}$.

Určete v jakém vztahu jsou množiny $M_1,\ M_2$ a rozhodněte o jejich omezenosti.
(Řešení: M_1 omezená, M_2 neomezené M_2, $M_1 \subset M_2$)
Postup řešení:

i. *Prvky této množiny splňují polynomiální rovnost $(z+1)^{10} = (z-1)^{10}$ se stejným znaménkem a koeficientem u nejvyšší mocniny z^{10}. Tato nejvyšší mocnina se proto odečte a zbyde polynom stupně 9. Prvky množiny mají splňovat $\sum\limits_{k=0}^{9} c_k z^k = 0$, kde $c_k \in \mathbb{R}, c_9 \neq 0$. Rovnice má v $\mathbb{C}$ nejvýše 9* ***různých*** *komplexních řešení. Tato řešení jsou prvky množiny. Množina M_1 je proto konečná, a tedy omezená.*

ii. *Množinu M_2 tvoří body komplexní roviny, které mají stejnou vzdálenost od bodů $w = -1 + \boldsymbol{i}b$ a $h = 1 + \boldsymbol{i}b$ (geometricky se jedná o vertikální přímky procházející body $[-1, 0]$ a $[0, 1]$). Body množiny proto musí ležet přesně mezi těmito dvěma přímkami (na vertikální přímce procházející bodem $[0, 0]$). Jedná se tak o množinu ryze komplexních čísel $z = 0 + \boldsymbol{i}b$, tj. $M_2 = \boldsymbol{i}\mathbb{R}$. Množina je neomezená.*

Vztah mezi množinami M_1, M_2 je následující. Je-li $z \in M_1$, tj. platí $(z+1)^{10} = (z-1)^{10}$, pak platí $|(z+1)^{10}| = |(z-1)^{10}| \Leftrightarrow |(z+1)|^{10} = |(z-1)|^{10}$, a proto $z \in M_2$. To znamená, že $M_1 \subset M_2$.

4 Čtvrtý týden

4.1 Supremum a infimum množiny

Příklad 4.1 *Zapište pomocí kvantifikátorů definice minima, maxima, infima a suprema podmnožiny* $\mathbb{R}$. *Čemu se rovná* $\sup \emptyset$ *a* $\inf \emptyset$*?*

Postup řešení: Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Pak

i. $a \in M$ je minimem M, právě když $(\forall x \in M)(a \leq x)$,

ii. $a \in M$ je maximem M, právě když $(\forall x \in M)(a \geq x)$,

iii. $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je infimem (největší dolní závora) M, právě když

$$\begin{aligned} (\forall x \in M)(x \geq a), \\ (\forall b \in \mathbb{R}, b > a)(\exists x \in M)(x < b). \end{aligned}$$

iv. $a \in \overline{R}$ je supremem (nejmenší horní závora) M, právě když

$$\begin{aligned} (\forall x \in M)(x \leq a), \\ (\forall b \in \mathbb{R}, b < a)(\exists x \in M)(x > b). \end{aligned}$$

Pro prázdnou množinu platí $\sup \emptyset = -\infty$ a $\inf \emptyset = +\infty$.

Příklad 4.2 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \left\{ \frac{2n}{3n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(Řešení: $\min M = \inf M = 1/2$*,* $\sup M = 2/3$*, maximum neexistuje)*

Postup řešení: Tipneme si, že minima je nabýváno pro $n = 1$, tento tip následně ověříme. Platí:

$$\begin{aligned} \frac{2n}{3n+1} &\geq \frac{1}{2}, \\ 4n &\geq 3n+3, \\ n &\geq 1. \end{aligned}$$

Minima je tedy opravdu nabýváno pro $n = 1$ a má hodnotu $\frac{1}{2}$. Protože minimum M existuje, pak $\inf M = \min M$. U suprema tipujeme (na základě limitního přechodu) hodnotu $\frac{2}{3}$, tento tip následně ověříme.

i. Nejdříve ukážeme, že $2/3$ je horní závora:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(\frac{2n}{3n+1} \leq \frac{2}{3}\right),$$
$$2n \leq \frac{2}{3}(3n+1),$$
$$2n \leq 2n + \frac{2}{3},$$
$$0 \leq \frac{2}{3}.$$

ii. Nyní ukážeme, že je to nejmenší horní závora:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\left(\frac{2n}{3n+1} > \frac{2}{3} - \varepsilon\right),$$
$$2n > 2n + \frac{2}{3} - 3\varepsilon n - \varepsilon,$$
$$n > \frac{1}{3\varepsilon}\left(\frac{2}{3} - \varepsilon\right) = \frac{2}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}.$$

Nyní stačí volit $n = \lfloor |\frac{2}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}| \rfloor + 1$.

Příklad 4.3 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \left\{ \frac{x^3}{x^2+10} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Řešení: $\inf M = -\infty$, $\sup M = +\infty$, *minimum ani maximum neexistuje)*

Postup řešení:

- $\inf M = -\infty$:

  Ukážeme, že množina je neomezená zdola, tedy

  $$\inf M = -\infty \iff (\forall c \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})\left(\frac{x^3}{x^2+10} < c\right).$$

  Předpokládejme, že x je záporné. Pomocí odhadu shora dostaneme

  $$\frac{x^3}{x^2+10} < \frac{x^3}{2x^2} = \frac{x}{2} < c$$

  pro $x^2 > 10$. Stačí tedy volit například $x = -2|c| - 10$.

- $\sup M = +\infty$:

  Ukážeme, že množina je neomezená shora,

$$\sup M = +\infty \iff (\forall c \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) \left(\frac{x^3}{x^2+10} > c \right).$$

  Opět využijeme vhodného odhadu. Pro $x > 0$, kde $x^2 > 10$, platí

$$\frac{x^3}{x^2+10} > \frac{x^3}{x^2+x^2} = \frac{x}{2} > c.$$

  Stačí tedy volit například $\max\{2c+1, 100\}$.

Minimum ani maximum množiny M neexistuje.

Příklad 4.4 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \left\{ \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} \,\middle|\, x \in (0, +\infty) \right\}.$$

(Řešení: $\inf M = -3/2$, $\sup M = 2$, *minimum ani maximum neexistuje)*

Postup řešení:

- $\inf M = -3/2$*:*

  i. *Nejdříve ukážeme, že -3/2 je dolní závora:*

$$(\forall x \in (0, +\infty)) \left(\frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} \geq -3/2 \right),$$

$$2\sqrt{x} - 3 \geq -\frac{3}{2}(\sqrt{x}+2),$$

$$2\sqrt{x} - 3 \geq -\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3,$$

$$\frac{7}{2}\sqrt{x} \geq 0,$$

$$\sqrt{x} \geq 0.$$

  ii. *Nyní ukážeme, že je to největší dolní závora*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists x \in (0, +\infty))\,, \left(\frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} < -3/2 + \varepsilon \right),$$

$$2\sqrt{x} - 3 < -\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 + \varepsilon\sqrt{x} + 2\varepsilon,$$

$$\left(\frac{7}{2} - \varepsilon \right) \sqrt{x} < 2\varepsilon.$$

Pro $\varepsilon \geq \frac{7}{2}$ nerovnice platí pro libovolné x, volíme tedy například $x = 68$ (#jardajagr). V opačném případě stačí volit $\sqrt{x} = \varepsilon(\frac{7}{2} - \varepsilon)^{-1}$, tedy přesněji, za x volíme druhou mocninu tohoto výrazu. Infimum není nabýváno, tedy minimum neexistuje.

- $\sup M = 2$:

  i. *Nejdříve ukážeme, že 2 je horní závora:*

$$\begin{aligned} (\forall x \in (0, +\infty)) \left(\frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 2} \leq 2 \right), \\ 2\sqrt{x} - 3 \leq 2(\sqrt{x} + 2), \\ 2\sqrt{x} - 3 \leq 2\sqrt{x} + 4, \\ 0 \leq 1. \end{aligned}$$

  ii. *Nyní ukážeme, že je to nejmenší horní závora:*

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0)\, (\exists x \in (0, +\infty)) \left(\frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 2} > 2 - \varepsilon \right), \\ 2\sqrt{x} - 3 > 2\sqrt{x} + 4 - \varepsilon\sqrt{x} - 2\varepsilon, \\ \varepsilon\sqrt{x} > 7 - 2\varepsilon, \\ \sqrt{x} > \frac{7}{\varepsilon} - 2. \end{aligned}$$

  Nyní stačí volit například $\sqrt{x} = \frac{7}{\varepsilon}$, tedy $x = \frac{49}{\varepsilon^2}$. Supremum není nabýváno, maximum tedy neexistuje.

Příklad 4.5 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n}, 2 \right).$$

(Řešení: $\min M = \inf M = 1$, $\sup M = 2$, maximum neexistuje)
Postup řešení: Dokážeme, že $M = \langle 1, 2)$. Inkluze $\langle 1, 2) \subset M$ je jednoduchá. Nechť $x \in \langle 1, 2)$, pak

$$1 \leq x < 2,$$

a tedy jistě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že

$$1 - \frac{1}{n} < x < 2,$$

a celkem tedy $x \in M$. Druhá inkluze $M \subset \langle 1, 2)$. Nechť $x \in M$, pak x musí splňovat dvě nerovnosti:

$$1 - \frac{1}{n} < x, \forall n \in \mathbb{N},$$

a

$$x < 2.$$

Z první podmínky plyne, že $x \geq 1$, že druhé $x < 2$. Celkem $x \in \langle 1, 2)$. Dokázali jsme tedy, že $M = \langle 1, 2)$ a nyní je již úloha jednoduchá. Jednoduše lze ukázat, že $\min M = \inf M = 1$ a $\sup M = 2$. Maximum neexistuje.

Příklad 4.6 *Zkuste uhádnout $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ a následně své tipy dokažte:*

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(0, 2 - \frac{1}{n}\right\rangle.$$

(Řešení: $\inf M = 0$, $\sup M = 2$, minimum ani maximum neexistuje)
Postup řešení: Obdobně jako u minulého příkladu ukážeme, že $M = (0, 2)$. Z toho již plyne, že minimum ani maximum neexistují, $\inf M = 0$ a $\sup M = 2$.

Příklad 4.7 *Zkuste uhádnout $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ a následně své tipy dokažte:*

$$M = \left\{ \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(Řešení: $\min M = \inf M = 3/7$, $\sup M = 1/2$, maximum neexistuje)
Postup řešení: Tipneme si, že prvky množiny tvoří ostře rostoucí posloupnost, a minimum nastane pro $n = 1$. Supremum si tipneme limitním přechodem $n \longrightarrow +\infty$, tj. tipneme $\sup M = \frac{1}{2}$. Důkaz:

i. *Minimum:*

   Ověříme, že minimum je rovno $\frac{3}{7}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2} &\geq \frac{3}{7}, \\
7 &\geq 3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6, \\
1 &\geq 3\left(\frac{1}{3}\right)^n, \\
3^n &\geq 3, \\
n &\geq 1.
\end{aligned}$$

   Minimum je tedy skutečně nabýváno pro $n = 1$ a má hodnotu $\frac{3}{7}$.

ii. *Supremum:*

Nejprve ověříme, zda je $\frac{1}{2}$ horní závorou:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+2} &\leq \frac{1}{2},\\ 2 &\leq \left(\frac{1}{3}\right)^n+2,\\ 0 &\leq \left(\frac{1}{3}\right)^n.\end{aligned}$$

Jedna polovina je tedy skutečně horní závorou. Druhá podmínka suprema:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+2} &> \frac{1}{2}-\varepsilon,\\ \frac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+2} &> 1-2\varepsilon,\\ 2 &> (1-2\varepsilon)\left(2+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right),\\ 3^n &> \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}.\end{aligned}$$

Abychom mohli nerovnici zlogaritmovat, odhadneme výraz jeho absolutní hodnotou a současně v odhadu přičteme jedničku, abychom se vyvarovali logaritmování nuly (pro hodnotu $\varepsilon = \frac{1}{2}$). Platí

$$\begin{aligned}3^n &> \left|\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right|+1 > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon},\\ n &> \log_3\left(\left|\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right|+1\right).\end{aligned}$$

Vhodné n můžeme volit například takto:

$$n = \left\lfloor \left|\log_3\left(\left|\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right|+1\right)\right|\right\rfloor + 1.$$

Příklad 4.8 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \left\{a+\frac{1}{a}\,\middle|\, a \in (0,1)\right\}.$$

(Řešení: $\inf M = 2,\ \sup M = +\infty$*), minimum ani maximum neexistuje)*
Postup řešení: Hypotéza: na intervalu $(0,1)$ by mohla být funkce monotonní. Jdeme-li s a k nule (zprava), výraz jde k plus nekonečnu (tip na supremum), jdeme-li k jedničce, výraz jde ke dvojce (tip na infimum).

i. Infimum: Nejprve ověříme, zda je 2 *dolní závorou:*

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} &\geq 2, \\ a^2 - 2a + 1 &\geq 0, \\ (a-1)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Nerovnost platí, první podmínka infima splněna. Druhá podmínka má tvar

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} &< 2 + \varepsilon, \\ \frac{a^2+1}{a} - 2 &< \varepsilon, \\ \frac{a^2 - 2a + 1}{a} &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Nyní použijeme odhad, $a \in (0,1)$ *platí tedy, že* $a^2 < 1$,

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - 2a + 1}{a} &< \frac{1 - 2a + 1}{a} < \varepsilon, \\ \frac{2-2a}{a} &< \varepsilon, \\ \frac{2}{2+\varepsilon} &< a. \end{aligned}$$

Pro splnění nerovnosti a současně zachování $a \in (0,1)$ *stačí volit* a *jako průměr mezi spodní hranicí a jedničkou, tedy*

$$a = \frac{1 + \frac{2}{2+\varepsilon}}{2} = \frac{\varepsilon + 4}{2(\varepsilon + 2)}.$$

ii. $\sup M = +\infty$*: chceme ukázat, že množina není shora omezená, tj.*

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists a \in (0,1)) \left(a + \frac{1}{a} > K \right).$$

Platí

$$a + \frac{1}{a} > K \;\Leftrightarrow\; \frac{a^2+1}{a} > K.$$

Dále využijeme odhad $a^2 > 0$,

$$\frac{a^2+1}{a} > \frac{1}{a} > K.$$

Stačí tedy volit např. $a = \min\{\frac{1}{2|K|}, \frac{1}{2}\}$.

Příklad 4.9 *Zkuste uhádnout supremum, platnost své domněnky dokažte a rozhodněte, zda je supremum nabýváno:*

$$\sup\left\{\frac{n^2+3n+5}{1-2n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

(Řešení: $-\frac{23}{5}$, nabýváno pro $n=3$.)
Postup řešení:

Množinu označíme M a ukážeme, že $\sup M = -\frac{23}{5}$. Tuto hodnotu můžeme získat vyšetřováním monotonie posloupnosti tvořené prvky M. První podmínka má tvar

$$(\forall n\in N)\left(\frac{n^2+3n+5}{1-2n}\le -\frac{23}{5}\right).$$

Ekvivalentními úpravami dostáváme

$$\frac{n^2+3n+5}{1-2n}\le -\frac{23}{5} \Leftrightarrow 5(n^2+3n+5)\ge -23(1-2n)\Leftrightarrow 5n^2-31n+48\ge 0.$$

Nerovnice má diskriminant $D = 9611 - 5\cdot 4\cdot 48 = 961-960 = 1$. Nulové body tedy jsou $n_1 = 3$ a $n_2 = \frac{16}{5}$. Výše uvedená nerovnost tedy platí pro všechna přirozená čísla a pro $n = 3$ dokonce platí rovnost. Našli jsme tedy maximum dané množiny, které je současně supremem.

Příklad 4.10 *Dokažte následující tvrzení a rozhodněte, zda je infimum nabýváno.*

$$\inf\left\{\frac{3x+1-2x^2}{x^2+5x}\,\middle|\, x\in\mathbb{R}^+\right\} = -2.$$

Postup řešení: Nejprve ukažme, že -2 je dolní závorou, tj. $(\forall x>0)\left(\frac{3x+1-2x^2}{x^2+5x}\ge -2\right)$.

Jednoduchými úpravami dostáváme

$$3x+1-2x^2\ge -2x^2-10x \Leftrightarrow 1\ge -13x,$$

a výrok tedy platí. Rovnost nenastává pro žádná přípustná x. Dále ověřujme druhou podmínku, tj.

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists x>0)(\frac{3x+1-2x^2}{x^2+5x} < -2+\varepsilon).$$

Převedením -2 na levou stranu zjistíme, že máme za úkol nalézt $x>0$ tak, že

$$\frac{3x+1-2x^2+2x^2+10x}{x^2+5x} = \frac{13x+1}{x^2+5x} < \varepsilon.$$

S využitím odhadu dostáváme

$$\frac{13x+1}{x^2+5x}\le\frac{13x+13\cdot 5}{x^2+5x} = \frac{13(x+5)}{x(x+5)} = \frac{13}{x} < \varepsilon.$$

Volíme tedy například $x := \frac{13}{\varepsilon}+1$.

Příklad 4.11 *Zkuste uhádnout infimum a supremum následující množiny, platnost svých domněnek dokažte a rozhodněte, zda supremum a infimum jsou nabývána:*

$$\left\{ (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(Řešení: $\sup M = 1$*,* $\inf M = -1$*, nejsou nabývána)*
Postup řešení:

- *Tipneme, že* $\sup M = 1$*. Musíme ověřit dvě podmínky:*

  i. $(\forall n \in \mathbb{N}) \left((-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \le 1 \right)$*:*
  Pokud bude n *sudé, pak předcházející nerovnost přejde na tvar* $1 - \frac{1}{n} \le 1$*, což jistě platí. Pro* n *liché dostáváme* $-1 + \frac{1}{n} \le 1$*, která opět platí.*

  ii. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \left((-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} > 1 - \varepsilon \right)$*:*
  K danému ε *budeme* n *hledat mezi sudými čísly. Pro ně předcházející rovnice dostane výraz*

  $$1 - \frac{1}{n} - 1 > -\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

  Volme tedy např. $n = 2\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 2$*.*

- *Nyní ukážeme, že* $\inf M = -1$*. Opět musíme ukázat dvě podmínky:*

  i. $(\forall n \in \mathbb{N}) \left((-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \ge -1 \right)$*:*
  Pro n *sudé dostáváme nerovnost* $1 - \frac{1}{n} \ge -1$*, která platí pro každé* $n \in \mathbb{N}$*. Pokud je* n *liché pak dostáváme nerovnici* $-1 + \frac{1}{n} \ge -1$*, která také platí pro každé* n*.*

  ii. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \left((-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} < -1 + \varepsilon \right)$*:*

  Budeme hledat mezi lichými n*. Pak předcházející nerovnost přejde na tvar*

  $$-1 + \frac{1}{n} < -1 + \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

  Volme tedy $n = 2\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$*.*

Příklad 4.12 *Dokažte následující tvrzení a rozhodněte, zda je infimum nebo supremum nabýváno.*

i. $\inf\{x^3 - x^2 - x + 2 \,|\, x \in \langle 0, 2 \rangle\} = 1$,

ii. $\sup\{x^3 - x^2 - x + 2 \,|\, x \in \langle 0, 2 \rangle\} = 4$.

(Řešení: Obě jsou nabývána)
Postup řešení:

i. *První podmínka infima má tvar*

$$x^3 - x^2 - x + 2 \geq 1.$$

Ekvivalentní úpravou lze převést na tvar

$$x^3 - x^2 - x + 1 \geq 0.$$

Pozorujeme, že ± 1 *jsou kořeny, po rozkladu (dělení polynomu polynomem) dostáváme nerovnost*

$$(x-1)^2(x+1) \geq 0.$$

Pro $x \in \langle 0, 2\rangle$ *předcházející nerovnost platí, navíc pro* $x = 1$ *nastává rovnost. Našli jsme tedy minimum (a tedy i infimum).*

ii. *První podmínka suprema má tvar*

$$x^3 - x^2 - x + 2 \leq 4.$$

Ekvivalentní úpravou lze převést na tvar

$$x^3 - x^2 - x - 2 \leq 0.$$

Opět se dá uhádnout kořen $x = 2$*. Po rozkladu na součin dostáváme*

$$(x^2 + x + 1)(x - 2) \leq 0.$$

Pro $x \in \langle 0, 2\rangle$ *je první závorka vždy kladná, druhá vždy nekladná. Rovnost nastává pro* $x = 2$*, našli jsme tedy maximum (a tedy i supremum).*

Příklad 4.13 *Zkuste uhádnout infimum a supremum následující množiny, platnost svých domněnek dokažte a rozhodněte, zda supremum a infimum jsou nabývána:*

$$M = \left\{ \frac{2n^2 + n + 11}{n^2 + 5} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(Řešení: $\inf M = 2$*,* $\sup M = \frac{7}{3}$*, supremum je nabýváno, infimum ne)*

- *Nejprve ukážeme, že* $\inf M = 2$*. Opět ověřujeme dvě podmínky:*

  i. $(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\frac{2n^2+n+11}{n^2+5} \geq 2 \right)$*:*
  ekvivalentními úpravami dostáváme nerovnost $n + 11 \geq 10$*, která platí pro každé* $n \in \mathbb{N}$*. Rovnost nenastává pro žádné přirozené* n*.*

ii. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\left(\frac{2n^2+n+11}{n^2+5} < 2+\varepsilon\right)$:

Nerovnost upravíme na tvar

$$\frac{2n^2+n+11}{n^2+5} < 2+\varepsilon \Leftrightarrow \frac{n+1}{n^2+5} < \varepsilon.$$

Potom pomocí jednoduchých odhadů dostáváme,

$$\frac{n+1}{n^2+5} < \frac{n+1}{n^2} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

Stačí tedy volit $n = \lfloor \frac{2}{\varepsilon} \rfloor + 1$.

- *Nyní ukážeme, že* $\sup M = \frac{7}{3}$. *V tomto případě máme ukázat*

i. $(\forall n \in \mathbb{N})\left(\frac{2n^2+n+11}{n^2+5} \leq \frac{7}{3}\right)$:
Platí

$$\begin{aligned}\frac{2n^2+n+11}{n^2+5} \leq \frac{7}{3} &\Leftrightarrow 6n^2+3n+33 \leq 7n^2+35,\\ &\Leftrightarrow 0 \leq n^2-3n+2.\end{aligned}$$

Polynom na pravé straně má kořeny $n_1 = 1$ *a* $n_2 = 2$. *Vidíme tedy, že výrok platí. Zároveň nastává rovnost pro* $n = 1$ *či* $n = 2$, *a tedy supremum je nabýváno a maximum existuje.*

Příklad 4.14 *Tipněte si supremum a infimum množiny*

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}_0^+ \,\middle|\, \sin x \cos x = 0\right\}.$$

Správnost svých tipů dokažte.
(Řešení: $\sup M = +\infty$, $\inf M = 0$*)*
Postup řešení: Uvažujeme $x \in \mathbb{R}_0^+$, *současně* $x = 0$ *zjevně řeší danou rovnost, minimum (a tedy i infimum) množiny je tedy 0. Rovnici dále vyhovují všechna řešení ve tvaru* $x = k\pi$; $k \in \mathbb{N}$ *(tam je* $\sin(x) = 0$, *všechna řešení rovnice jsou* $x = \frac{k\pi}{2}$*), supremum množiny je tedy plus nekonečno, což formálně dokážeme. Chceme ukázat:*

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}_0^+, \sin x \cos x = 0)(x > K).$$

V tomto případě stačí volit

$$x = (\lfloor |K| \rfloor + 1)\pi.$$

Příklad 4.15 *Buď*

$$M = \left\{ \sin \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Určete, čemu se rovná $\inf M$ *a svou hypotézu dokažte. Může se hodit nerovnost* $\sin x \leq x$ *platná pro* $x \geq 0$.

(Řešení: $\inf M = 0$*)*

Postup řešení: Jdeme-li s $n \to +\infty$ *argument se blíží nule, tedy náš tip je* $\inf M = 0$. *Tuto hypotézu následně ověříme.*

i. *První podmínka má tvar*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\sin\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0).$$

Podmínka je splněna, neboť sinus je funkce kladná na intervalu $(0, \pi)$, *a tedy i na* $(0, 1\rangle$.

ii. *Druhá podmínka má tvar*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in N)(\sin\left(\frac{1}{n}\right) < \varepsilon).$$

S využitím zmíněné nerovnosti dostáváme odhad

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Stačí tedy volit $n = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$.

Příklad 4.16 *Buď*

$$M_a = \{ax^2 + 2x - 3ax - 6 \,|\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Určete, čemu se rovná $\inf M_a$ *a* $\sup M_a$ *v závislosti na parametru* $a \in \mathbb{R}$, *a svou hypotézu dokažte.*

(Řešení:

- $a = 0 : \sup M_a = +\infty, \inf M_a = -\infty,$
- $a > 0 : \sup M_a = +\infty, \inf M_a = -\frac{9a^2+12a+4}{4a},$
- $a < 0 : \sup M_a = -\frac{9a^2+12a+4}{4a}, \inf M_a = -\infty.$

)

Postup řešení:

- $a = 0$: *Množina má tvar*

$$M_0 = \{2x - 6 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$$

Množina je zjevně neomezená, infimum tedy bude $-\infty$ *a supremum* $+\infty$, *což formálně dokážeme. Pro supremum je třeba pro každé* $K \in \mathbb{R}$ *najít* x *tak, aby platilo*

$$2x - 6 > K \Leftrightarrow x > \frac{K+6}{2}.$$

Volíme tedy například $x = \frac{K+6}{2} + 1$. *Podobně u infima pro každé* $D \in \mathbb{R}$ *hledáme* x *splňující*

$$2x - 6 < D \Leftrightarrow x < \frac{D+6}{2}.$$

Volíme tedy například $x = \frac{D+6}{2} - 1$.

- $a > 0$: *Množina představuje konvexní parabolu, její supremum tedy bude jistě* $+\infty$, *což následně ukážeme. Pro každé* $K \in \mathbb{R}$ *chceme najít* x *splňující*

$$ax^2 + 2x - 3ax - 6 > K \;\;\Leftrightarrow\;\; ax^2 + 2x - 3ax - 6 - K > 0.$$

Ze vzorce pro řešení kvadratické rovnice pro $K \geq -6$ *dostaneme, že vhodným* x *je např.*

$$x = \frac{3a - 2 + \sqrt{(2-3a)^2 + 4(6+K)a}}{2a} + 10.$$

Pro $K < -6$ *můžeme volit např.* $x = 0$.

Při hledání infima nejprve nalezneme vrchol paraboly. Ten se nachází v bodě

$$\left[\frac{3a-2}{2a}, -\frac{9a^2+12a+4}{4a}\right],$$

jehož druhá souřadnice je náš kandidát na minimum (infimum). Tento tip dokážeme. První podmínka má tvar

$$\begin{gathered} ax^2 + 2x - 3ax - 6 \geq -\frac{9a^2+12a+4}{4a}, \\ 4a^2x^2 + (8a - 12a^2)x + (3a-2)^2 \geq 0. \end{gathered}$$

Diskriminant nerovnice je roven nule, dosazením zjistíme, že uvedená nerovnost platí. Současně pro $x = \frac{3a-2}{2a}$ *nastává rovnost, našli jsme tedy minimum, a tedy i infimum.*

- $a < 0$ *V tomto případě množina představuje konkávní parabolu, infimum tedy bude* $-\infty$ *a suprema bude nabýváno ve vrcholu paraboly. Formální důkaz by proběhl analogicky jako v případě* $a > 0$.

Příklad 4.17 *Mohou existovat dvě neprázdné podmnožiny $A, B \subset \mathbb{R}$ s vlastnostmi*

$$\sup A = \sup B, \quad \inf A = \inf B, \quad A \cap B = \emptyset?$$

(Řešení: ano, např. $A = \mathbb{Q}$ a $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)
Postup řešení: Ano. Například A lichá celá čísla, B sudá celá čísla. Nebo racionální a iracionální čísla.

Příklad 4.18 *Dokažte, že pro $A, B \subset \mathbb{R}$ platí*

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

Diskutujte zvlášť případy, kdy A nebo B jsou prázdné či shora/zdola neomezené množiny.
Postup řešení:

i. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$*:*
Nejprve diskutujme triviální případy. Pokud alespoň jedna množina je prázdná, např. $A = \emptyset$, pak $A \cup B = B$, $\sup A = -\infty$, $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup B$. Rovnost tedy platí. Pokud jedna množina je neomezená shora, např. A, pak $\sup A = +\infty$, množina $A \cup B$ je taky neomezená a tvrzení opět triviální platí protože $\max\{+\infty, \sup B\} = +\infty$.

Nyní pro přehlednost definujme:

$$\begin{aligned} \sup A &= \alpha, \\ \sup B &= \beta. \end{aligned}$$

Jelikož to jsou suprema, víme, že platí 4 podmínky:

$$\begin{aligned} (\forall x \in A)(x \leq \alpha), && (1) \\ (\forall \alpha' \in \mathbb{R}, \alpha' < \alpha)(\exists x \in A)(x > \alpha'), && (2) \\ (\forall x \in B)(x \leq \beta), && (3) \\ (\forall \beta' \in \mathbb{R}, \beta' < \beta)(\exists x \in A)(x > \beta'). && (4) \end{aligned}$$

Případ ještě rozdělíme na 2 případy - buď $\alpha \geq \beta$ či $\alpha < \beta$. V prvním případě máme $\max\{\alpha, \beta\} = \alpha$ a máme ukázat, že $\sup\{A \cup B\} = \alpha$. Z podmínek (1) a (3) plyne

$$(\forall x \in A \cup B)(x \leq \alpha),$$

jelikož $\beta \leq \alpha$. Máme tedy dokázanou první podmínku suprema. V druhé podmínce máme ukázat, že

$$(\forall \alpha' \in \mathbb{R}, \alpha' < \alpha)(\exists x \in A \cup B)(x > \alpha').$$

Ta je splněna díky podmínce (2)*. Ať nám totiž nepřítel dá libovolné* α' *hledané* $x \in A \cup B$ *najdeme v množině* A *podle podmínky* (2)*, o které víme, že platí. Dokázali jsme tedy, že* $\sup\{A \cup B\} = \alpha$*, což jsme chtěli. V druhém případě, tj. kdy* $\beta > \alpha$ *postupujeme obdobně. Zrychleně tedy: máme dokázat, že* $\sup\{A \cup B\} = \beta$*. Opět spojením podmínek* (1) *a* (3) *dostáváme první podmínku suprema*

$$(\forall x \in A \cup B)(x \leq \beta),$$

jelikož $\beta > \alpha$*. Druhá podmínka suprema nyní plyne z podmínky* (4)*, z ní totiž plyne*

$$(\forall \beta' \in \mathbb{R}, \beta' < \beta)(\exists x \in A \cup B)(x > \beta').$$

ii. $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$
Důkaz formálně stejný jako v případě suprem.

Příklad 4.19 *Buď* $A \subset \mathbb{R}$*. Definujme* $-A := \{-x | \, x \in A\}$*. Dokažte, že*

$$\sup -A = -\inf A, \quad \inf -A = -\sup A.$$

Postup řešení: Dokážeme, že $\sup -A = -\inf A$*. Pro přehlednost označme* $\inf A = \alpha$*. Pak z první podmínky infima máme*

$$(\forall x \in A)(x \geq \alpha).$$

Vynásobením nerovnosti číslem -1*, dostáváme výrok*

$$(\forall x \in A)(-x \leq -\alpha) \Leftrightarrow (\forall x \in -A)(x \leq -\alpha),$$

a tedy $-\alpha$ *je horní závorou množiny* $-A$*. Nyní ukážeme, že tato závora je nejmenší. Druhá podmínka* $\inf A = \alpha$ *říká, že*

$$(\forall \alpha' \in \mathbb{R}, \alpha' > \alpha)(\exists x \in A)(x < \alpha').$$

Tento výrok můžeme ekvivalentně přepsat:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\forall \alpha' \in \mathbb{R}, \alpha' > \alpha)(\exists x \in A)(-x > -\alpha') \\
&\Leftrightarrow (\forall \alpha' \in \mathbb{R}, \alpha' > \alpha)(\exists x \in -A)(x > -\alpha') \\
&\Leftrightarrow (\forall -\alpha' \in \mathbb{R}, -\alpha' < -\alpha)(\exists x \in -A)(x > -\alpha'),
\end{aligned}$$

a tedy $-\alpha$ *je nejmenší horní závora.*

Druhá rovnost se dokáže obdobně.

4.2 Pojem posloupnost, vybraná posloupnost, monotonie posloupnosti

Příklad 4.20 *Pomocí kvantifikátorů zapište definici omezenosti posloupnosti, definici vybrané posloupnosti a definici skorovybrané posloupnosti. Tyto definice znegujte.*
(Řešení:

- *Posloupnost (a_n) je omezená právě tehdy, když platí*

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n| \leq K).$$

  Negace:

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(|a_n| > K)$$

  .

- *Posloupnost (a_n) je vybraná z posloupnosti (b_n) právě tehdy, když platí*

$$(\exists (k_n),\ \{k_n\} \subset \mathbb{N} \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(k_{n+1} > k_n))(\forall n \in \mathbb{N})(a_n = b_{k_n}).$$

  Negace:

$$(\forall (k_n),\ \{k_n\} \subset \mathbb{N} \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(k_{n+1} > k_n))(\exists n \in \mathbb{N})(a_n \neq b_{k_n})$$

  .

- *Posloupnost (a_n) je skorovybraná z posloupnosti (b_n) právě tehdy, když platí*

  $(\exists (k_n),\ \{k_n\} \subset \mathbb{N} \wedge (\forall \alpha \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n > \alpha))(\forall n \in \mathbb{N})(a_n = b_{k_n}).$

  Negace:

  $(\forall (k_n),\ \{k_n\} \subset \mathbb{N} \wedge (\forall \alpha \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n > \alpha))(\exists n \in \mathbb{N})(a_n \neq b_{k_n})$

  .

)

Příklad 4.21 *Rozhodněte o monotonii (ostrá/neostrá) a omezenosti posloupnosti (a_n), kde*

i. $a_n = \dfrac{n}{2^n}$,

ii. $a_n = n^3 - 5n^2$.

(Řešení: i. neostře klesající a omezená, ii. omezená zdola)
Postup řešení:

i. *Řešíme-li monotonii* $a_n = \dfrac{n}{2^n}$*, ptáme se, zda* $(\forall n \in \mathbb{N})(a_{n+1} \leq a_n)$*. Platí*

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \leq \frac{n}{2^n} \Leftrightarrow n+1 \leq 2n \Leftrightarrow n \geq 1.$$

Poslední nerovnost je pravdivá, a tedy pro každé n *přirozené platí* $a_{n+1} \leq a_n$*. Posloupnost je (neostře) klesající, protože platí* $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$*.*

Posloupnost je tedy omezená shora právě hodnotou $\frac{1}{2}$*, současně je omezená zdola, protože se jedná o posloupnost kladných čísel, tedy je omezena zdola nulou. Posloupnost je tedy omezená, neboť je omezená zdola i shora.*

ii. *Řešíme-li monotonii* $a_n = n^3 - 5n^2$*, opět se ptáme zda* $(\forall n \in \mathbb{N})(a_{n+1} \leq a_n)$*. Platí*

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 5(n+1)^2 &> n^3 - 5n^2,\\ n^3 - 2n^2 - 7n - 4 &> n^3 - 5n^2,\\ 3n^2 - 7n - 4 &> 0.\end{aligned}$$

Studujeme, kdy je nerovnost pravdivá. Kvadratický člen má za kořeny $n_+ = 2.81, n_- = -0.47$*. Nerovnost je splněna pro* $n \geq 3$*, a tedy pro tyto hodnoty* n *platí* $a_{n+1} > a_n$*. Takže zde je posloupnost ostře rostoucí. Pro* $n = 1, 2$ *je ostře klesající.* ***Celkově tedy posloupnost není monotonní.***

Posloupnost nabývá minima $a_3 = -18$*, a je tedy omezená zdola. Shora omezená není, neboť platí* $(\forall K \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(n^3 - 5n^2 > K)$*. Pokud odhadneme členy posloupnosti zdola, dostaneme* $n^3 - 5n^2 \geq n^2 > n > K$*. Kde u první nerovnosti požadujeme* $n \geq 6$*. Proto stačí volit* $n = \lfloor K \rfloor + 7$*.*

Příklad 4.22 *Rozhodněte o monotonii (ostrá/neostrá) a omezenosti posloupnosti* (a_n)*, kde*

i. $a_n = \dfrac{2n+3}{n^2+3n+1}$,

ii. $a_n = (n - \sqrt{n})^n$.

(Řešení: i. ostře klesající a omezená, ii. ostře rostoucí a omezená zdola)
Postup řešení:

i. *Nejprve vyřešíme monotonii. Ptáme se, zda platí* $(\forall n \in \mathbb{N})(a_{n+1} \geq a_n)$*, tedy zda*

$$\begin{gathered}\frac{2n+5}{(n+1)^2+3n+4} \geq \frac{2n+3}{n^2+3n+1},\\ n^2+4n+5 \leq 0.\end{gathered}$$

Uvedená nerovnost nenastává pro žádné $n \in \mathbb{N}$*. Pro každé přirozené* n *tedy platí* $a_{n+1} < a_n$ *a z definice je to ostře klesající posloupnost. Maximum nabývá pro*

$n=1$, pro které $a_1 = 1$, a je tedy omezená shora. Posloupnost je zřejmě omezená zdola, a to například nulou - jedná se o posloupnost kladných členů. Posloupnost je tedy omezená.

ii. *Nejprve vyřešíme monotonii. Ptáme se, zda $(\forall n \in \mathbb{N})\,(a_{n+1} \geq a_n)$:*

$$\begin{aligned} a_n = (n-\sqrt{n})^n &= (\sqrt{n}(\sqrt{n}-1))^n \\ &< (\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}-1))^n \\ &= (n+1-\sqrt{n+1})^n \end{aligned} \tag{5}$$

Nyní pro $n \geq 2$ platí, že výraz uvnitř závorky je větší než 1, a tedy platí nerovnost

$$(n+1-\sqrt{n+1})^n < (n+1-\sqrt{n+1})^{n+1} = a_{n+1}.$$

Současně $a_1 = 0$ a $a_2 = (2-\sqrt{2})^2$, což je jistě kladné číslo. Celkově tedy dostáváme, že se jedná o ostře rostoucí posloupnost. Jedná se o posloupnost kladných čísel, tedy je jistě omezena zdola (např. nulou). Zbývá tedy ukázat, že je neomezená shora, tj. $(\forall K \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(a_n > K)$. Platí odhad

$$\left(n-\sqrt{n}\right)^n > n-\sqrt{n} > \sqrt{n}\left(\sqrt{n}-1\right).$$

První nerovnost platí pro $n \geq 3$, poslední výraz pak lze pro $n \geq 5$ odhadnout následovně

$$\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-1\right) > \sqrt{n} > K.$$

Stačí tedy volit $n_0 = \max\{\lfloor K^2 \rfloor + 1, 5\}$. Posloupnost tedy není omezená shora.

Příklad 4.23 *Vyšetřete (stejnými metodami jako u posloupností) monotonii funkce*

$$f(x) = \frac{5x+3}{2x-2}.$$

(Řešení: ostře klesající na $(-\infty, 1)$ a ostře klesající na $(1, +\infty)$)
Postup řešení: Vyšetřujeme monotonii funkce $f(x) = \frac{5x+3}{2x-2}$ na jejím definičním oboru $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Předpokládejme, že $x < y$ a ukážeme, že platí $f(x) > f(y)$:

$$\begin{aligned} \frac{5x+3}{2x-2} &> \frac{5y+3}{2y-2}, \\ \frac{5}{2} + \frac{4}{x-1} &> \frac{5}{2} + \frac{4}{y-1}, \\ \frac{1}{x-1} &> \frac{1}{y-1}. \end{aligned}$$

Monotonii vyšetřujeme zvlášť na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(1, +\infty)$.

- $(-\infty, 1)$:

  Vynásobením nerovnice zápornými čísly $x-1$ a $y-1$ dostáváme $y > x$, což jsme předpokládali. Funkce je tedy na tomto intervalu ostře klesající.

- $(1, +\infty)$:

  Podobně zde dostáváme vynásobením nerovnost $y > x$, a tedy funkce je ostře klesající i na tomto intervalu.

Příklad 4.24 *Vyšetřete (stejnými metodami jako u posloupností) monotonii funkce*

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

(Řešení: ostře rostoucí na $\langle 1, \infty)$ a na $(-\infty, -1\rangle$, ostře klesající na $\langle -1, 0)$ a na $(0, 1\rangle$)

Postup řešení: Funkce je lichá. Zaměříme, se tedy na řešení pro $x, y > 0$ a $x < y$,

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &< y + \frac{1}{y}, \\ x^2y + y &< xy^2 + x, \\ xy(x-y) &< (x-y), \\ (xy-1)(x-y) &< 0. \end{aligned}$$

Jelikož $x < y$, pro platnost nerovnosti stačí, aby $xy > 1$. Řešení se opět rozpadá na dva případy.

i. *$x \geq 1$ a z předpokladu $y > x$ pak zajisté platí, $xy > 1$, a tedy $f(x) < f(y)$. Funkce je ostře rostoucí na $\langle 1, +\infty)$.*

ii. *$x \in (0, 1)$ a $y \in (x, 1\rangle$: $xy < 1$, a funkce je tedy ostře klesající pro $x \in (0, 1\rangle$.*

Z lichosti funkce potom plyne, že na $(-\infty, -1\rangle$ ostře roste a na $\langle -1, 0)$ ostře klesá.

Příklad 4.25 *Vyšetřete (stejnými metodami jako u posloupností) monotonii funkce*

$$f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x.$$

(Řešení: ostře rostoucí na intervalech $\langle -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ a ostře klesající na intervalech $\langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$)

Postup řešení: Funkci můžeme následujícím způsobem zjednodušit:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3}\sin x + \cos x \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) \\ &= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Funkce $\sin(x)$ *je rostoucí na intervalech* $\langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\rangle$*, kde* $k\in\mathbb{Z}$*, a klesající na intervalech* $\langle \frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\rangle$*, kde* $k\in\mathbb{Z}$*. Pak* $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ *je rostoucí na*

$$\langle -\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\rangle,\ k\in\mathbb{Z},$$

a klesající na

$$\langle \frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{4\pi}{3}+2k\pi\rangle,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Příklad 4.26 *Vyšetřete (stejnými metodami jako u posloupností) monotonii funkce*

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{|\ln x|}{\ln x-1}.$$

(Řešení: ostře klesající na $\langle 1,e)$ *a na* $(e,+\infty)$*, ostře rostoucí na* $(0,1\rangle$ *)*
Postup řešení: Funkce arctg *je ostře rostoucí na* $\mathbb{R}$*,* ln *je ostře rostoucí na* $\mathbb{R}^+$*. Řešení rozdělíme na dva případy.*

- $(0,1\rangle$*: předpokládáme* $x,y\in(0,1\rangle$*,* $x<y$*. Pak*

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{arctg}\left(-\frac{\ln x}{\ln x-1}\right)\\ &= \operatorname{arctg}\left(-1+\frac{1}{-\ln x+1}\right)\\ &< \operatorname{arctg}\left(-1+\frac{1}{-\ln y+1}\right)=f(y). \end{aligned}$$

  Poslední nerovnost platí, neboť $\frac{1}{-\ln x+1}<\frac{1}{-\ln y+1}$ *a funkce tedy na tomto intervalu ostře roste.*

- $\langle 1,e)$ *nebo* $(e,+\infty)$*: předpokládáme* $x,y\in\langle 1,e)$ *nebo* $x,y\in(e,+\infty)$ *a v obou případech* $x<y$*. Pak:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{arctg}\left(\frac{\ln x}{\ln x-1}\right)\\ &= \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{\ln x-1}\right)\\ &> \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{\ln y-1}\right). \end{aligned}$$

  Poslední nerovnost rovněž platí, neboť $\frac{1}{\ln x-1}>\frac{1}{\ln y-1}$*, a funkce je tedy na těchto intervalech ostře klesající.*

Příklad 4.27 *Buďte (a_n), (b_n) rostoucí posloupnosti. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků*

i. $(a_n + b_n)$ *je rostoucí*

ii. (a_n^2) *je rostoucí*

iii. $(a_n b_n)$ *je rostoucí*

Pokud výrok neplatí, doplňte (minimální) předpoklady tak, aby se stal pravdivým.
(Řešení: i. platí, ii. neplatí, ale platí pokud (a_n) je posloupnost nezáporných čísel, iii. neplatí, ale platí pokud (a_n) a (b_n) jsou posloupnosti nezáporných čísel)
Postup řešení:

i. *Předpokládáme, že (a_n) i (b_n) jsou rostoucí posloupnosti, tedy $a_n \leq a_{n+1}$ a $b_n \leq b_{n+1}$. Sečtením těchto nerovností dostáváme*

$$a_n + b_n \leq a_{n+1} + b_{n+1},$$

což dokazuje, že i posloupnost $(a_n + b_n)$ je rostoucí.

ii. *Tvrzení neplatí, uvažujme například posloupnost $a_n = -\frac{1}{n}$. Ta je jistě rostoucí, ale současně $a_n^2 = 1/n^2$ je posloupnost klesající. Výrok je pravdivý za předpokladu, že a_n je posloupnost nezáporných čísel. Za tohoto předpokladu můžeme umocnit nerovnici $a_n \leq a_{n+1}$ a dostáváme $a_n^2 \leq a_{n+1}^2$, což dokazuje tvrzení.*

iii. *Tvrzení opět neplatí. Jakožto protipříklad nám opět může posloužit posloupnost $a_n = b_n = -\frac{1}{n}$. Výrok je pravdivý za předpokladu, že obě posloupnosti jsou nezáporné. Předpokládejme tedy, že jsou nezáporné. Potom*

$$\begin{aligned} b_n &\leq b_{n+1} \\ a_n b_n &\leq a_n b_{n+1} \leq a_{n+1} b_{n+1}, \end{aligned}$$

což dokazuje tvrzení.

Příklad 4.28 *Určete, v jakých případech je posloupnost (b_n) vybraná (případně skoro vybraná) z posloupnosti (a_n).*

i. $a_n = c^{\sqrt{n}}, \quad b_n = c^n \ (c > 0, c \neq 1)$,

ii. $a_n = c^n, \quad b_n = c^{4n+3(-1)^n} \ (c > 0, c \neq 1)$,

iii. $a_n = c^n, \quad b_n = c^{n+(-1)^n} \ (c > 0, c \neq 1)$.

(Řešení: i) vybraná, ii) skorovybraná, iii) nic)
Postup řešení:

- *Zvolme $k_n = n^2$, tedy (k_n) je ostře rostoucí posloupnost. Z definice vybrané posloupnosti je tedy $(b_n) = (a_{k_n}) = (c^n)$ vybraná z $(a_n) = (c^{\sqrt{n}})$.*

- (k_n), *kde* $k_n = 4n + 3(-1)^n$, *není monotónní, a tedy* (b_n) *není vybranou z* (a_n). *Ale* $(\forall n \in \mathbb{N})(k_n = 4n + 3(-1)^n \in \mathbb{N})$, *a je tedy skorovybraná.*

- (k_n), *kde* $k_n = n + (-1)^n$ *není monotónní, a tedy* (b_n) *není vybranou z* (a_n). *A není ani skorovybraná, neboť pro* $n = 1$ *je* $k_1 = 0 \notin \mathbb{N}$.

Příklad 4.29 *Určete, v jakých případech je posloupnost* (b_n) *vybraná (případně skoro vybraná) z posloupnosti* (a_n).

i. $a_n = n, \quad b_n = \dfrac{4n^2 + 4n + 1}{2n + 1}$

ii. $a_n = \dfrac{n+5}{n+2}, \quad b_n = \dfrac{(n+1)!/2 + 5}{(n+1)!/2 + 2}$

iii. $a_n = \dfrac{n+5}{n+2}, \quad b_n = \dfrac{n^{3/2} + 5}{n^{3/2} + 2}$

(Řešení: i) vybraná, ii) vybraná, iii) nic)
Postup řešení:

- $b_n = \frac{4n^2+4n+1}{2n+1} = \frac{(2n+1)^2}{2n+1} = 2n + 1 = a_{2n+1}$. *Tedy z definice* $k_n = 2n + 1$, *což je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel, a* (b_n) *je tedy vybraná z* (a_n).

- $b_n = \frac{(n+1)!/2+5}{(n+1)!/2+2} = a_{\frac{(n+1)!}{2}}$. *Tedy z definice* $k_n = \frac{(n+1)!}{2}$, *což je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel, a* (b_n) *je tedy vybraná z* (a_n).

- $b_n = \frac{n^{3/2}+5}{n^{3/2}+2} = a_{n^{3/2}}$. *Tedy* $k_n = n^{3/2}$ *je sice ostře rostoucí posloupnost, ale ne přirozených čísel. Není tedy vybraná ani skorovybraná.*

Příklad 4.30 *Dokažte, že každá prostá posloupnost přirozených čísel má ostře rostoucí podposloupnost.*
Postup řešení: Ukážeme postup jak danou podposloupnost nalézt. Označme prostou posloupnost přirozených čísel (a_n) *a hledanou posloupnost* (b_n). *Definujme* $b_1 = a_1$. *Další členy definujeme postupným procházením posloupnosti* (a_n) *dokud nenalezneme člen s vyšší hodnotou než je posledně definovaný člen posloupnosti* (b_n). *Jelikož posloupnost* a_n *je prostá, vyšší hodnotu vždy musíme najít. Pseudo-algoritmus je popsán v Algoritmus 1 .*

Algorithm 1:

Vstup : a_n přirozená prostá posloupnost.
Výstup: b_n ostře rostoucí podposloupnost.

Definuj $b_1 = a_1$. Polož $n = 2$.
while $n < +\infty$ **do**
    j = n
    while $j < +\infty$ **do**
        if $a_j > b_{n-1}$ **then**
            break
        end
        j = j + 1
    end
    Polož $b_n = a_j$ a $n = n + 1$.
end

5 Pátý týden

5.1 Pojem limita posloupnosti, důkaz limity posloupnost z definice, neexistence limity

Poznámka 5.1 *Objekt ∞ není v $\bar{\mathbb{R}}$ definován! Je tedy nutné odlišovat $+\infty$, $-\infty$ v $\bar{\mathbb{R}}$ od ∞ v $\bar{\mathbb{C}}$.*

Příklad 5.1 *Uhádněte a následně použitím definice ukažte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} n^k,\ k \in \mathbb{Q}.$$

(Řešení: 0 pro $k < 0$, 1 pro $k = 0$ a $+\infty$ pro $k > 0$) *Postup řešení:*

- *$k < 0$: Pak platí $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = 0$. Z definice pro libovolné pevné $\epsilon > 0$ hledáme n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $|n^k - 0| < \epsilon$. Tuto podmínku můžeme zapsat jako $n^k < \epsilon$ a protože $k < 0$ tak $n^{-|k|} < \epsilon$. A tedy $n > \frac{1}{\epsilon^{|k|}}$. Pak n_0 stačí volit jako*

$$n_0 = \lfloor \frac{1}{\epsilon^{|k|}} \rfloor + 1.$$

- *$k = 0$: Pak $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = 1$, protože hledáme limitu konstantní posloupnosti $a_n = 1$. K danému ε lze n_0 volit libovolně, např. $n_0 = 1$.*

- *$k > 0$: Pak $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$. Pro libovolné pevné $K \in \mathbb{R}$ hledáme n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $n^k > K$, tedy chceme, aby platilo, $n > K^{1/k}$. n_0 stačí volit*

$$n_0 = \lfloor |K|^{1/k} \rfloor + 1.$$

Absolutní hodnota je volena pro případy, kdy je $K < 0$.

Příklad 5.2 *Uhádněte a následně použitím definice ukažte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}.$$

(Řešení: $+\infty$)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}+\sqrt{n} = +\infty$$

.

Pro libovolné pevné $K \in \mathbb{R}$ hledáme n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} > K$.

Použijeme odhad

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n} > \sqrt{n} > K.$$

Pak stačí volit $n_0 = \left[K^2\right] + 1$.

Příklad 5.3 *Uhádněte a následně použitím definice ukažte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{\alpha^n}, \textit{ kde } k \in \mathbb{N},\ \alpha > 1.$$

(Řešení: 0)
Postup řešení: Jelikož exponenciála roste rychleji než libovolný polynom, tipujeme, že limita je rovna nule. Tuto domněnku dokážeme chytrým odhadem.

$$\begin{aligned}
\frac{n^k}{\alpha^n} &= \frac{n^k}{(1+(\alpha-1))^n} = \frac{n^k}{\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(\alpha-1)^j} \\
&\leq \frac{n^k}{\binom{n}{k+1}(\alpha-1)^{k+1}} = \frac{n^k}{\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}(\alpha-1)^{k+1}} \\
&= \frac{n^k}{n^{k+1}} \frac{(k+1)!}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)(\alpha-1)^{k+1}} \\
&\leq \frac{1}{n} \frac{(k+1)!}{\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{k+1}\right)(\alpha-1)^{k+1}} \\
&= \frac{1}{n}\frac{(k+1)^{k+1}}{(\alpha-1)^{k+1}} = \frac{a}{n},
\end{aligned}$$

kde v druhé rovnosti jsme použili binomickou větu a první nerovnost je platná za podmínky $n > k+1$. V poslední rovnosti jsme označili $\frac{(k+1)^{k+1}}{(\alpha-1)^{k+1}} = a$. Poslední člen má být menší než ϵ. Tedy $\frac{a}{n} < \epsilon$. Celkově tedy stačí volit n_0

$$n_0 = \min\left\{\left[\frac{a}{\epsilon}\right] + 1, k+1\right\}.$$

Příklad 5.4 *Uhádněte a následně použitím definice ukažte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} n.$$

(Řešení: $-\infty$)
Postup řešení: Ze znalosti funkce logaritmus tipujeme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} n = -\infty$. Pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ hledáme n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $\log_{\frac{1}{2}} n < K$. Pokud je $K \in \mathbb{R}^+$, pak nerovnost platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pokud je naopak $K \in \mathbb{R}_0^-$, pak nerovnost $\log_{\frac{1}{2}} n < K$ platí pro $n > \frac{1}{2^K}$. Pak stačí volit

$$n_0 = \left[\frac{1}{2^K}\right] + 1.$$

Příklad 5.5 *Uhádněte a následně použitím definice ukažte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{n}.$$

(Řešení: 0)
Postup řešení: Tipujeme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$. Pro libovolné pevné $\epsilon > 0$ hledáme n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\left|\sin\frac{1}{n}\right| < \epsilon$. Pro $\epsilon > 1$ nerovnost platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro $\epsilon \leq 1$ získáváme $\frac{1}{n} < \arcsin\epsilon$. Jelikož $\arcsin x$ je pro $x \in (0, 1]$ kladný, můžeme psát $n > \frac{1}{\arcsin\epsilon}$. Pak stačí volit

$$n_0 = \left[\frac{1}{\arcsin\epsilon}\right] + 1.$$

Příklad 5.6 *Uhádněte a následně použitím definice ukažte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}(n^2).$$

(Řešení: $\frac{\pi}{2}$)
Postup řešení: Tipujeme $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}(n^2) = \frac{\pi}{2}$. Pro libovolné pevné $\epsilon > 0$ hledáme n_0 takové, že $\forall n \geq n_0$ je $\left|\operatorname{arctg}(n^2) - \frac{\pi}{2}\right| < \epsilon$. Víme, že $\operatorname{arctg}(n^2) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Tudíž

- *pro $\epsilon \geq \frac{\pi}{2}$ stačí volit $n_0 \in \mathbb{N}$ libovolně,*
- *pro $\epsilon < \frac{\pi}{2}$ má platit $-\operatorname{arctg}(n^2) + \frac{\pi}{2} < \epsilon$. Úpravami pak dostaneme $n > \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)}$. Proto stačí volit*

$$n_0 = \left[\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)}\right] + 1.$$

Příklad 5.7 *Uhádněte a následně použitím definice ukažte*

$$\lim_{n\to+\infty} i^n n \ (v\ \mathbb{C}).$$

(Řešení: ∞)
Postup řešení: *Tipujeme* $\lim_{n\to+\infty} i^n n = \infty$. *Jelikož* $|i^n n| = n$. *Stačí pro lib.* $K \in \mathbb{R}$ *volit* $n_0 = [|K|] + 1$.

Příklad 5.8 *Uhádněte a následně použitím definice ukažte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-5i}{2n+i} \ (v\ \mathbb{C}).$$

(Řešení: $\frac{1}{2}$)
Postup řešení: *Tipujeme* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-5i}{2n+i} = \frac{1}{2}$. *Pro libovolné pevné* $\epsilon > 0$ *hledáme* n_0 *takové, že* $\forall n \geq n_0$ *je* $\left|\frac{n-5i}{2n+i} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$. *Odhadujeme shora*

$$\left|\frac{n-5i}{2n+i} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-11i}{2(2n+i)}\right| = \frac{11}{2\,|2n+i|} = \frac{11}{2}\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} \leq \frac{11}{n}.$$

Má být splněno $\frac{11}{n} < \epsilon$. *Pak stačí volit*

$$n_0 = \left[\frac{11}{\epsilon}\right] + 1.$$

5.2 Limita vybrané posloupnosti

Příklad 5.9 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n! - 2n^2}.$$

(Řešení: 0)
Postup řešení: *Tipujeme* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n!-2n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n-1)!-2n} = 0$. *Označme* $a_n = n$. *Pak* $a_{k_n} = (n-1)! - 2n$, *kde* $k_n = (n-1)! - 2n$. *Aby* a_{k_n} *byla vybraná z* a_n, *musí platit, že* k_n *je rostoucí posloupnost přirozených čísel . Z množiny přirozených čísel to bude pokud* $n \geq 5$. *Aby byla rostoucí musí být splněna podmínka* $k_n \leq k_{n+1}$. *Po dosazení dostáváme* $(n-1)! - 2n \leq (n)! - 2n - 2$. *Úpravami pak* $(n-1)(n-1)! \geq 2$, *což je pravda pro* $n \geq 3$. *Pak* (a_{k_n}) *je vybraná z* (a_n). *A jelikož* $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, *platí* $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = +\infty$, *a celkově tedy* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_{k_n}} = 0$.

Příklad 5.10 *Rozhodněte, zda následující limita (v* $\mathbb{R}$*) existuje. Existuje-li, určete její hodnotu, v opačném případě své tvrzení odůvodněte:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2+3(-1)^n}.$$

(Řešení: neexistuje)
Postup řešení: *Tipujeme, že limita neexistuje. Označme* $a_n = \frac{(-1)^n}{2+3(-1)^n}$. *Platí:*

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2+3(-1)^{2n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2+3} = \frac{1}{5}.$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2+3(-1)^{2n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{2-3} = 1.$

Našli jsme tedy dvě vybrané posloupnosti, které mají různou limitu. Celkově tedy limita zadané posloupnosti neexistuje.

Příklad 5.11 *Rozhodněte, zda následující limita existuje. Existuje-li, určete její hodnotu, v opačném případě své tvrzení odůvodněte:*

$$\lim_{n\to+\infty} i^{n^2} \ (v\ \mathbb{C}).$$

(Řešení: neexistuje)
Postup řešení: Označme $a_n = i^{n^2}$. Najdeme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami, z čehož vyplyne, že limita celkově neexistuje.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} i^{4n^2} = 1.$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} i^{4n^2} i^{4n} i = i.$

Což tedy potvrzuje předpoklad, že limita posloupnosti a_n neexistuje.

Příklad 5.12 *Rozhodněte, zda následující limita (v $\mathbb{R}$) existuje. Existuje-li, určete její hodnotu, v opačném případě své tvrzení odůvodněte:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

(Řešení: neexistuje)
Postup řešení: Označme $a_n = \frac{n}{n+1}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Najdeme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami, z čehož vyplyne, že limita celkově neexistuje.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{4n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n}{4n+1}(-1)^{\frac{4n(4n+1)}{2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n}{4n+1} = 1.$
- *Ve druhém případě vybereme (a_{4n-2}) :*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} a_{4n-2} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{4n-2}{4n-1}(-1)^{\frac{(4n-2)(4n-1)}{2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n-2}{4n-1}(-1)^{8n^2-6n+1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} -\frac{4n-2}{4n-1} = -1.\end{aligned}$$

.

Našli jsme tedy dvě vybrané posloupnosti, které mají různé limity. Celkově tedy zadaná limita neexistuje.

Příklad 5.13 *Rozhodněte, zda následující limita (v $\mathbb{R}$) existuje. Existuje-li, určete její hodnotu, v opačném případě své tvrzení odůvodněte:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

(Řešení: 0)
Postup řešení: Tipujeme, že $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = 0$. *Postupujme následovně. Označme* $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ *a volme dvě posloupnosti, které posloupnost* (a_n) *celou pokrývají.*

- $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{2n}+(-1)^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}+1} = 0.$
- $\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}+(-1)^{2n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{2n+1}-1} = 0.$

Našli jsme tedy dvě vybrané posloupnosti, které posloupnost (a_n) *celou pokrývají. Mají stejnou limitu, a tedy* $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = 0.$

Příklad 5.14 *Rozhodněte, zda následující limita (v $\mathbb{R}$) existuje. Existuje-li, určete její hodnotu, v opačném případě své tvrzení odůvodněte:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{-1}+(-1)^{n+1}}.$$

(Řešení: neexistuje)
Postup řešení: Tipujeme, že limita $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{-1}+(-1)^{n+1}}$ *neexistuje. A najdeme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami, které to potvrzují. Označme* $a_n = \frac{1}{n^{-1}+(-1)^{n+1}}$. *Platí*

- $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n)^{-1}+(-1)^{2n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n)^{-1}-1} = -1,$
- $\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+1)^{-1}+(-1)^{2n+2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n)^{-1}+1} = 1.$

Příklad 5.15 *Rozhodněte, zda následující limita (v $\mathbb{R}$) existuje. Existuje-li, určete její hodnotu, v opačném případě své tvrzení odůvodněte:*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{(-1)^n}.$$

(Řešení: neexistuje)
Postup řešení: Označme $a_n = n^{(-1)^n}$. *Platí*

- $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} (2n)^{(-1)^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty,$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)^{(-1)^{2n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$

Našli jsme tedy dvě vybrané posloupnosti, které mají různé limity. Celkově tedy limita posloupnosti (a_n) neexistuje.

Příklad 5.16 *Nechť* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ *a* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ *neexistují. Co můžeme říci o limitě* $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$, *resp.* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n$*?*
(Řešení: nic)
Postup řešení:

- *V prvním případě rozhodujeme o limitě* $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$. *Pokud zvolíme* $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1}$. *Obě jsou oscilující posloupnosti a ani jedna nemá limitu. Ale* $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = 0$. *Pokud* $a_n = b_n = (-1)^n$, *pak* $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$ *neexistuje. Na základě neexistence limit posloupností* (a_n), (b_n) *nejsme schopni nic říct o existenci* $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$.

- *Ve druhém případě můžeme volit* $a_n = b_n = (-1)^n$, *pak* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = 1$. *Pokud naopak zvolíme* $a_n = (-1)^{n/2}$ *a* $b_n = (-1)^{n+1}$ *pak* $a_n b_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ *a limita neexistuje. Celkově tedy o limitě* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n$ *nejsme schopni nic říct.*

Příklad 5.17 *Buďte* (a_n) *omezená reálná posloupnost a* (b_n) *reálná posloupnost, která navíc splňuje*

i. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$

ii. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty$.

Čemu se rovná $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$*? Své tvrzení dokažte! Vyslovte analogické tvrzení pro komplexní posloupnosti.*
(Řešení: i. nelze rozhodnout, ii. $\pm\infty$ *)*
Postup řešení:

- *V prvním případě máme*

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

V poslední rovnosti jsme využili předpoklad $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ *a větu o aritmetice limit. To, že je posloupnost* (a_n) *omezená a reálná nám nic neříká o existenci limity. Posloupnost* (a_n), *kde* $a_n = (-1)^n$, *je omezená, ale její limita neexistuje. Takže o existenci* $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$ *nejsme schopni nic říct.*

- *V druhém případě nechť* (a_n) *je omezená konstantou* $M \geq 0$, *tj.* $|(a_n)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$. *Potom*
$$-M + b_n \leq a_n + b_n \leq M + b_n.$$
Výrazy vlevo a vpravo jdou do $\pm\infty$ *a z věty o limitě sevřené posloupnosti jde i prostřední výraz do* $\pm\infty$.

5.3 Limita racionální funkce

Příklad 5.18 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*)*
$$\lim_{n\to+\infty} (-7n^2 + 2n^3 - 10n).$$

(Řešení: $+\infty$ *)*
Postup řešení: V případě limity racionální funkce vytýkáme vždy nejvyšší mocninu z čitatele i jmenovatele (v tomto konkrétním příkladě pouze z čitatele). Pak
$$\lim_{n\to+\infty} \left(-7n^2 + 2n^3 - 10n\right) = \lim_{n\to+\infty} n^3 \left(2 - \frac{7}{n} - \frac{10}{n^2}\right) = +\infty.$$

Zde vidíme, že n^3 *jde k* $+\infty$ *a první člen k závorce k* 2, *druhý a třetí k nule. Celkově tedy z aritmetiky limit dostáváme výsledek* $+\infty$.

Příklad 5.19 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*)*
$$\lim_{n\to+\infty} \Big((1-n)(n^2+4n) + (1+n)(n^2-7n+3)\Big).$$

(Řešení: $-\infty$ *)*
Postup řešení: Nejdříve roznásobíme závorky a pak vytkneme nejvyšší mocninu. Platí
$$\lim_{n\to+\infty} \Big((1-n)(n^2+4n) + (1+n)(n^2-7n+3)\Big) = \lim_{n\to+\infty} \left(-9n^3 + 3\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n^2 \left(-9 + \frac{3}{n^2}\right) = -\infty.$$

Opět jsme využili větu o aritmetice limit. První činitel má limitu $+\infty$ *a druhý* -9. *Celkově tedy máme výsledek* $-\infty$.

Příklad 5.20 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*)*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - 2n + n^5}{2n^5 + 2^5}.$$

(Řešení: $1/2$ *)*

Postup řešení: Platí:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{1-2n+n^5}{2n^5+2^5} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^5\left(1-\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^5}\right)}{n^5\left(2+\frac{2^5}{n^5}\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^5}}{2+\frac{2^5}{n^5}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^5}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{2^5}{n^5}\right)} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Příklad 5.21 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^2}{n^3+2n-5}.$$

(Řešení: 0)
Postup řešení: Platí:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^2}{n^3+2n-5} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+4n+4}{n^3+2n-5} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{2}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)} \\
&= 0 \cdot \frac{1}{1} = 0.
\end{aligned}$$

Příklad 5.22 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}\right)}{\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)}.$$

(Řešení: 0)
Postup řešení: Platí:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}\right)}{\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2+12n+8}{2n^3+11n^2+12n}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4+\frac{12}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{11}{n}+\frac{12}{n^2}\right)}$$
$$=0\cdot\frac{4}{2}=0.$$

Příklad 5.23 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)^2+\frac{1}{n-2}}{(n-3)^3-(n+3)^3}.$$

(Řešení: -1/18)
Postup řešení: Platí:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)^2+\frac{1}{n-2}}{(n-3)^3-(n+3)^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+2n^2-4n-7}{(n-2)(-18n^2-54)}=-\frac{1}{18}.$$

V poslední rovnosti jsme vytkli n^3 jak z jmenovatele tak z čitatele a uplatnili větu o aritmetice limit.

Příklad 5.24 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5n^3-7n+1}{n^4+n^3\sin n}.$$

(Řešení: 0)
Postup řešení: Platí:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5n^3-7n+1}{n^4+n^3\sin n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\left(5-\frac{7}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^4\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5-\frac{7}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)}$$
$$=0\cdot\frac{5}{1}=0.$$

V postupu jsme využili toho, že $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0$. Postup důkazu je jako v první části této kapitoly. Volíme libovolné pevné $\epsilon>0$ a k němu hledáme n_0 takové, že pro všechna $n\geq n_0$ platí $\left|\frac{\sin n}{n}\right|<\epsilon$. Využijeme odhad

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right|=\frac{|\sin n|}{n}\leq\frac{1}{n}<\epsilon.$$

Pak stačí volit

$$n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1.$$

Příklad 5.25 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)^{10}(2n-1)^{10}}{(3n)^{20}}.$$

(Řešení: $(2/3)^{20}$)
Postup řešení: Opět budeme vytýkat nejvyšší mocninu. Platí

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)^{10}(2n-1)^{10}}{(3n)^{20}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{10}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{10} n^{10}\left(2-\frac{1}{n}\right)^{10}}{n^{20}(3)^{20}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{10} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)^{10}}{\lim\limits_{n\to+\infty}(3)^{20}} \\
&= \frac{2^{20}}{3^{20}}.
\end{aligned}$$

Příklad 5.26 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)! - (n-1)!\, n^2}{n!}.$$

(Řešení: 1)
Postup řešení: Úpravami faktoriálů dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)! - (n-1)!\, n^2}{n!} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n! - (n)!\, n}{n!} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1-n)n!}{n!} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Příklad 5.27 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)^3 - n^3}{\left(1+(-1)^n\, n\right)\left(1+(-1)^{n+1}\, n\right)}$$

(Řešení: 3)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)^3 - n^3}{\left(1+(-1)^n\, n\right)\left(1+(-1)^{n+1}\, n\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-3n^2+3n-1}{1-n^2} = 3.$$

Příklad 5.28 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)},$$

kde P a Q jsou nenulové polynomy v n s reálnými koeficienty a žádné $n \in \mathbb{N}$ není kořenem Q.

Postup řešení: Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} a_k n^k}{\sum\limits_{k=0}^{l} b_k n^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^m}{n^l} \frac{a_m + \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k n^{k-m}}{b_l + \sum\limits_{k=0}^{l-1} b_k n^{k-l}} = n^{m-l} \frac{a_m + \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k/n^{m-k}}{b_l + \sum\limits_{k=0}^{l-1} b_k/n^{l-k}}.$$

Výrazy v sumě jdou k nule, a limita tedy závisí pouze na hodnotách m a l a na poměru $\frac{a_m}{b_l}$:

- *$m = l$: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{a_m}{b_l}$,*
- *$m < l$: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$,*
- *$m > l$: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty \cdot \operatorname{sgn}(\frac{a_m}{b_l})$.*

Příklad 5.29 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+a)^2}{(n-1)(3-5n)}$$

v závislosti na reálné konstantě a.

(Řešení: -4/5)

Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+a)^2}{(n-1)(3-5n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2+4an+a^2}{-5n^2+8n-3} = -\frac{4}{5}$$

Příklad 5.30 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(3n+5)(3-an)}{n(2n+3)}.$$

v závislosti na reálné konstantě a.

(Řešení: $-3a/2$)

Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(3n+5)(3-an)}{n(2n+3)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-3an^2+9n-5an+15}{2n^2+3n}.$$

Pro $a = 0$ je limita rovna nule, pro ostatní hodnoty a dostáváme $-\frac{3a}{2}$.

6 Šestý týden

Poznámka 6.1 *V následujících příkladech je vhodné mít na paměti následující vzorečky (zejména pro $n = 2$ a $n = 3$). Pro $a, b \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k},$$
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Poznámka 6.2 *Na přednášce bylo pro pro limitu reálné posloupnosti (a^n), $a \in \mathbb{R}$, ukázáno*

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 \text{ pro } |a| < 1, \\ 1 \text{ pro } a = 1, \\ +\infty \text{ pro } a > 1, \\ \text{neexistuje pro } a \leq -1. \end{cases}$$

Poznámka 6.3 *Na přednášce bylo pro pro limitu komplexní posloupnosti (a^n), $a \in \mathbb{C}$, ukázáno*

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 \text{ pro } |a| < 1, \\ 1 \text{ pro } a = 1, \\ \infty \text{ pro } |a| > 1, \\ \text{neexistuje pro } |a| = 1, a \neq 1. \end{cases}$$

6.1 Limita racionální funkce (dokončení)

Příklad 6.1 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$, existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+n+1)^{10} - (n+1)^{20}}{(n^2+1)^{10} - (n+1)^{20}}.$$

(Řešení: 1/2)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+n+1)^{10} - (n+1)^{20}}{(n^2+1)^{10} - (n+1)^{20}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^{20}+10n^{19}+\dots) - (n^{20}+20n^{19}+\dots)}{(n^{20}+10n^{18}+\dots) - (n^{20}+20n^{19}+\dots)} =$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-10n^{19}+\dots}{-20n^{19}+\dots} = \frac{1}{2}.$$

Příklad 6.2 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right).$$

(Řešení: 1/2)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+\ldots+n-1}{n^2}=$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)n}{2n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

Příklad 6.3 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n}\right).$$

(Řešení: neexistuje)
Postup řešení: Pro n sudé platí

$$\begin{aligned}1-2+3-4+\cdots+(n-1)-n&=(1+2+\cdots+(n-1)+n)-2\cdot(2+4+\cdots+n)\\&=\frac{n(n+1)}{2}-4\cdot\frac{\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}=\frac{n^2+n}{2}-\frac{n^2}{2}-n=-\frac{n}{2}.\end{aligned}$$

Podobně pro n liché úpravami dostáváme

$$(1-2+3-4+\ldots-(n-1))+n=\left[-\frac{n-1}{2}\right]+n=\frac{n+1}{2}.$$

Celkově tedy

- *pro n sudé*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n}=-\frac{1}{2},$$

- *pro n liché*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2}.$$

Našli jsme tedy dvě vybrané posloupnosti, které mají různé limity a celkově tedy limita nemůže existovat.

Příklad 6.4 *Vypočtěte (v $\mathbb{C}$)*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+i}{4-in}.$$
(Řešení: $2i$)
Postup řešení:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+i}{4-in} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(2+\frac{i}{n}\right)}{n\left(\frac{4}{n}-i\right)} = -\frac{2}{i} = 2i.$$

Příklad 6.5 *Vypočtěte (v $\mathbb{C}$)*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n-i}{2+in}.$$
(Řešení: $-4i$)
Postup řešení:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n-i}{2+in} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(4-\frac{i}{n}\right)}{n\left(\frac{2}{n}+i\right)} = \frac{4}{i} = -4i.$$

Příklad 6.6 *Vypočtěte (v $\mathbb{C}$)*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+i}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+i}}.$$
(Řešení: 0) *Postup řešení:*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+i}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+i}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+i-n}{n(n+i)}}{\frac{n+i+n}{n(n+i)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{i}{2n+i} = 0.$$

6.2 Limity na odmocniny

Příklad 6.7 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$
(Řešení: 0)
Postup řešení:
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

Příklad 6.8 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+5}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}.$$

(Řešení: 1/2)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+5}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\left(1+\frac{5}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(2+n^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{5}{\sqrt{n}}}{2+\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}} = \frac{1}{2}.$$

Příklad 6.9 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[7]{n^2-3}-\sqrt[20]{n^7+1}}{5\sqrt[9]{n^2+1}+2\sqrt[20]{n^7}}.$$

(Řešení: -1/2)
Postup řešení: Nejvyšší mocnina je v tomto případě $\frac{7}{20}$, vytýkáme tedy člen $n^{\frac{7}{20}}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[7]{n^2-3}-\sqrt[20]{n^7+1}}{5\sqrt[9]{n^2+1}+2\sqrt[20]{n^7}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{7}{20}}\left(\sqrt[7]{\frac{1}{n^{\frac{9}{20}}}-\frac{3}{n^{\frac{49}{20}}}}-\sqrt[20]{1+\frac{1}{n^7}}\right)}{n^{\frac{7}{20}}\left(5\sqrt[9]{\frac{1}{n^{\frac{23}{20}}}+\frac{1}{n^{\frac{63}{20}}}}+2\right)} = -\frac{1}{2}.$$

Příklad 6.10 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}}.$$

(Řešení: 1)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)} = 1.$$

Příklad 6.11 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{3n^2+1}-2n\right).$$

(Řešení: $-\infty$)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n^2+1}-2n\right)=\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}-2\right)=+\infty\cdot(\sqrt{3}-2)=-\infty.$$

Příklad 6.12 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{1+n^{-4}}}.$$

(Řešení: $\sqrt{2}$)
Postup řešení: Zřejmé.

Příklad 6.13 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+(-1)^n n+1}-\sqrt{n^2+(-1)^{n+1}n+1}\right).$$

(Řešení: neexistuje)
Postup řešení: Platí

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+(-1)^n n+1}-\sqrt{n^2+(-1)^{n+1}n+1}=$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+(-1)^n n+1}-\sqrt{n^2+(-1)^{n+1}n+1}\right)\left(\sqrt{n^2+(-1)^n n+1}+\sqrt{n^2+(-1)^{n+1}n+1}\right)}{\sqrt{n^2+(-1)^n n+1}+\sqrt{n^2+(-1)^{n+1}n+1}}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2(-1)^n n}{\sqrt{n^2+(-1)^n n+1}+\sqrt{n^2+(-1)^{n+1}n+1}}=$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2(-1)^n}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{1}{n^2}}}.$$

Vybereme-li nyní podposloupnost členů se sudými indexy, limita vyjde 1. Naopak pro liché indexy dostáváme hodnotu -1. Našli jsme tedy dvě různé podposloupnosti s různými limitami. Původní limita tedy neexistuje.

Příklad 6.14 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{4/3}(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}).$$

(Řešení: 2/3)

Postup řešení: *Označme* $a = \sqrt[3]{n^2+1}$ *a* $b = \sqrt[3]{n^2-1}$. *Ze vzorce* $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ *vyjádříme výraz* $(a-b)$, *tedy* $a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$. *Pak*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n^{4/3}(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}) = \\
&\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{4}{3}}\left(n^2+1-n^2+1\right)}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2} + \sqrt[3]{(n^2+1)(n^2-1)} + \sqrt[3]{(n^2-1)^2}} = \\
&\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{n^4+2n^2+1} + \sqrt[3]{n^4-1} + \sqrt[3]{n^4-2n^2+1}} = \\
&\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^{\frac{4}{3}}}{n^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}} + \sqrt[3]{1-\frac{1}{n^4}} + \sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\right)} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Příklad 6.15 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right).$$

(Řešení: 2/3)
Postup řešení: *Označme* $a = \sqrt[3]{n^3+n^2+1}$ *a* $b = \sqrt[3]{n^3-n^2+1}$. *Rozšířením výrazem* a^2+ab+b^2 *dostaneme*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1} = \\
&\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{\sqrt[3]{(n^3+n^2+1)^2} + \sqrt[3]{(n^3+n^2+1)(n^3-n^2+1)} + \sqrt[3]{(n^3-n^2+1)^2}} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Příklad 6.16 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}\right).$$

(Řešení: $-\infty$*)*
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n} - \sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} - 1\right) = -\infty.$$

Příklad 6.17 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[4]{n^4-n} - \sqrt[3]{n^3+3n^2}\right).$$

(Řešení: -1)

Postup řešení: *Označme n-tý člen zadané posloupnosti symbolem a_n. Nejmenší společný násobek 3 a 4 je 12. Použijeme tedy vzorec $a^{12}-b^{12}=(a-b)\sum\limits_{k=0}^{11}a^kb^{11-k}$, kde $a=\sqrt[12]{(n^4-n)^3}$ a $b=\sqrt[12]{(n^3+3n^2)^4}$. Tímto rozšířením dostáváme*

$$a_n=\frac{(n^4-n)^3-(n^3+3n^2)^4}{\sum\limits_{k=0}^{11}(n^4-n)^{\frac{k}{4}}(n^3+3n^2)^{\frac{11-k}{3}}}.$$

Nejvyšší mocniny jak v čitateli tak v jmenovateli jsou 11 (n^{12} se v čitateli i jmenovateli odečtou), a tedy rozhodnou koeficienty u těchto mocnin. Upravíme-li jmenovatel do tvaru

$$n^{11}\sum_{k=0}^{11}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{k}{4}}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{11-k}{3}},$$

pak každý sčítanec sumy jde k 1 a celkově tedy koeficient u n^{11} je ve jmenovateli 12. V čitateli můžeme využít binomickou větu a zjistíme, že u n^{11} je koeficient -12. Celkem tedy limita vyjde -1.

Příklad 6.18 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}n^{-1/2}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}-\sqrt{3n+2}\right).$$

(Řešení: $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty}n^{-1/2}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}-\sqrt{3n+2}\right)=$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac12}\left(\sqrt{1+\frac1n}+\sqrt{2}-\sqrt{3+\frac2n}\right)}{n^{\frac12}}=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

Příklad 6.19 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}n^{1/2}\left(\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}-3\sqrt{n+2}\right).$$

(Řešení: $-5/2$)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty}n^{1/2}\left(\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}-3\sqrt{n+2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac12}\left(n+1+4n+4\sqrt{n(n+1)}-9n-18\right)}{\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}+3\sqrt{n+2}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac12}\left(4\sqrt{n(n+1)}-(4n+17)\right)}{\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}+3\sqrt{n+2}}\cdot\frac{4\sqrt{n(n+1)}+(4n+17)}{4\sqrt{n(n+1)}+(4n+17)}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac12}\left(-120n-289\right)}{\left(\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}+3\sqrt{n+2}\right)\left(4\sqrt{n(n+1)}+(4n+17)\right)}=-\frac{120}{6\cdot 8}=-\frac{5}{2}.$$

Příklad 6.20 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}}-n\sqrt{1+\sqrt{2}}\right).$$

(Řešení: 0)
Postup řešení: Výraz rozšíříme číslem $\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}}+n\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$ *a použijeme vzorec pro* a^2-b^2*. Tím dostaneme*

$$a_n=\frac{n^2+\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}-n^2-\sqrt{2}n^2}{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}}+n\sqrt{1+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}-\sqrt{2}n^2}{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}}+n\sqrt{1+\sqrt{2}}}.$$

Opět rozšíříme, abychom se zbavili nejvyšší mocniny v čitateli. Dostáváme

$$a_n=\frac{n^4+\sqrt{n^8+1}-2n^4}{\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}}+n\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}+\sqrt{2}n^2\right)}.$$

Abychom se zbavili poslední odmocniny, rozšíříme naposledy, nyní výrazem $\sqrt{n^8+1}+n^4$,

$$a_n=\frac{n^8+1-n^8}{b_n}\to 0,$$

jako b_n *jsme označili jmenovatel výrazu, o kterém platí, že jde do plus nekonečna - výsledná limita je tedy rovna nule.*

Příklad 6.21 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^2+(-1)^n\sqrt{n}}-n\right).$$

(Řešení: neexistuje)
Postup řešení: Zadanou limitu rozšířením upravíme na tvar

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n(-1)^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+(-1)^n\sqrt{n}}+n}.$$

Pro sudé hodnoty n je limita do plus nekonečna, pro liché mínus nekonečno. Limita tedy neexistuje.

Příklad 6.22 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{an+1}-\sqrt{n})\sqrt{4n+3}$$

pro $a\in\mathbb{R}^+$.

(Řešení: $+\infty$ pro $a > 1$, 1 pro $a = 1$, $-\infty$ pro $a < 1$)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{an+1} - \sqrt{n})\sqrt{4n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{((a-1)n+1)\sqrt{4n+3}}{\sqrt{an+1}+\sqrt{n}}.$$

Pro $a \neq 1$ je v čitateli vyšší mocnina než ve jmenovateli. Pro $a > 1$ dostáváme výsledek $+\infty$, pro $a < 1$ naopak $-\infty$. Pro $a = 1$ platí

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{4n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{n+\frac{3}{4}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 1.$$

Příklad 6.23 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{k-1}\left(\sqrt[k]{n^k+1} - \sqrt[k]{n^k-1}\right)$$

pro $k \in \mathbb{N}$.
(Řešení: 2/k)
Postup řešení: Použijeme vzorec $a^k - b^k = (a-b)\sum\limits_{j=0}^{k-1} a^j b^{k-1-j}$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n^{k-1}\left(\sqrt[k]{n^k+1} - \sqrt[k]{n^k-1}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^{k-1}}{\sum\limits_{j=0}^{k-1}(n^k+1)^{\frac{j}{k}}(n^k-1)^{\frac{k-1-j}{k}}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^{k-1}}{n^{k-1}\sum\limits_{j=0}^{k-1}(1+n^{-k})^{\frac{j}{k}}(1-n^{-k})^{\frac{k-1-j}{k}}}.\end{aligned}$$

Ve jmenovateli je suma čítající k členů, z nichž každý má limitu jedna. Výsledná limita je tedy $\frac{2}{k}$.

Příklad 6.24 *Určete čísla $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{1-n^3} - an - b\right) = 0.$$

(Řešení: $a = -1$, $b = 0$)
Postup řešení: Nechť a_n značí n-tý člen posloupnosti na levé straně zadané rovnice. Vytnutím nejvyšší mocniny získáváme

$$a_n = n\left[\sqrt[3]{-1+\frac{1}{n^3}} - a - \frac{b}{n}\right].$$

Pokud by $a < -1$, pak by předcházející limita vyšla $+\infty$, pokud by $a > -1$, pak $\lim a_n = -\infty$. Jediná šance je tedy pro $a = -1$. Pak posloupnost a_n bude vypadat

$$a_n = \sqrt[3]{1-n^3} + n - b.$$

Rozšířením číslem $(1-n^3)^{2/3} - \sqrt[3]{1-n^3}(n-b) + (n-b)^2$ dostaneme

$$a_n = \frac{1-n^3+(n-b)^3}{(1-n^3)^{2/3} - \sqrt[3]{1-n^3}(n-b) + (n-b)^2}.$$

Vytknutím nejvyšších mocnin získáme

$$a_n = \frac{n^2\left[-3b + \frac{3b^2}{n} + \frac{-b^3+1}{n^2}\right]}{n^2\left[(1/n^3-1)^{2/3} - (1-b/n)(1/n^3-1)^{1/3} + (1-b/n)^2\right]} \to -b.$$

A tedy musí platit, že $b = 0$.

6.3 Limity s obecnou mocninou

Příklad 6.25 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

(Řešení: 1/3)
Postup řešení: Vytýkáme exponenciálu s největším základem. Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)}{3^n\left(2\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 3\right)} = \frac{1}{3}.$$

Příklad 6.26 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$L = \lim_{n\to+\infty} a^{n^2+n}$$

pro $a \in \mathbb{R}$.
(Řešení: $L = +\infty$ pro $|a| > 1$, $L = 0$ pro $|a| < 1$, $L = 1$ pro $|a| = 1$)
Postup řešení: Exponent $n^2 + n$ můžeme přepsat do tvaru $n(n+1)$, což je sudé číslo. (Pokud je n sudé, pak $n+1$ je liché a naopak. Současně platí, že sudé krát liché je sudé.) Platí tedy $a^{n^2+n} = |a|^{n^2+n}$. Protože posloupnost $(|a|^{n^2+n})$ je vybraná z $(|a|^n)$, dostáváme následující limity.

- $|a| > 1$: $L = +\infty$.
- $|a| < 1$: $L = 0$.

- $|a| = 1$: $L = 1$.

Příklad 6.27 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$$

pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
(Řešení: 0)
Postup řešení: Pro přípustné hodnoty parametru a takových, že $|a| < 1$, *je výsledek zjevně 0. Pro* $|a| > 1$ *upravíme limitu na tvar*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{a^n\left(\frac{1}{a^n}+a^n\right)}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{a^n}+a^n}.$$

Z tohoto tvaru je již patrné, že i pro tyto hodnoty parametru a je limita rovna nule.

Příklad 6.28 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$$

pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$.
(Řešení: 1 pro $|a| > 1$, *-1 pro* $0 < |a| < 1$*)*
Postup řešení: Pro $|a| > 1$ *vytkneme* a^n. *Platí*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - a^{-2n}}{1 + a^{-2n}} = 1.$$

Pro $|a| < 1$ *vytýkáme* a^{-n},

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{2n} - 1}{a^{2n} + 1} = -1.$$

Příklad 6.29 *Vypočtěte (existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n}{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^n},$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{C} : |\alpha| < 1, |\beta| < 1$.
(Řešení: $\frac{1-\beta}{1-\alpha}$*)*
Postup řešení: Využijeme známého vzorce pro součet n členů geometrické posloupnosti. Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n}{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\,\frac{1-\beta}{1-\beta^{n+1}} = \frac{1-\beta}{1-\alpha}.$$

Příklad 6.30 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2}\dots\sqrt[2^n]{2}.$$

(Řešení: 2)
Postup řešení:

$$\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2}\dots\sqrt[2^n]{2} = \prod_{k=1}^{n}\sqrt[2^k]{2} = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{2^k}} = 2^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}} = 2^{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k} \to 2^{\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = 2.$$

7 Sedmý týden

7.1 Limita sevřené posloupnosti

Příklad 7.1 *Pomocí odhadů (sevřené posloupnosti) vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor \frac{\sqrt{n}}{2} \rfloor}{\sqrt{n}}.$$

(Řešení: $\frac{1}{2}$)
Postup řešení: Pro dolní celou část platí

$$k-1 \leq \lfloor k \rfloor \leq k, \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Pak pomocí předcházející vztahu můžeme odhadnout

$$\frac{1}{2} \leftarrow \frac{1-2/\sqrt{n}}{2} = \frac{\sqrt{n}(1-2/\sqrt{n})}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}/2-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\lfloor \frac{\sqrt{n}}{2} \rfloor}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}/2}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

Z věty o limitě sevřené posloupnosti pak plyne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor \frac{\sqrt{n}}{2} \rfloor}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$$

Příklad 7.2 *Pomocí odhadů (sevřené posloupnosti) vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

(Řešení: $+\infty$)
Postup řešení: Pomocí odhadu

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

platného pro $\forall k \in \widehat{n}$ získáme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty.$$

Z věty o limitě sevřené posloupnosti tedy plyne

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty.$$

Příklad 7.3 *Pomocí odhadů (sevřené posloupnosti) vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}.$$

(Řešení: 0)
Postup řešení: Pomocí odhadu

$$\frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+k} \le \frac{1}{n^2}$$

platného pro $\forall k \in \widehat{n}$ *získáme*

$$0 \leftarrow \frac{1}{1+n} = \frac{n}{n(1+n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+n} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+0} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Z věty o limitě sevřené posloupnosti tedy plyne

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} = 0.$$

Příklad 7.4 *Pomocí odhadů (sevřené posloupnosti) vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+k^2}}.$$

(Řešení: 1)
Postup řešení: Pomocí odhadu

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+k^2}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n^3}}$$

platného pro $\forall k \in \widehat{n}$ *získáme*

$$1 \leftarrow \frac{n}{n\sqrt[3]{1+1/n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+k^2}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt[3]{n^3}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n}{n} = 1 \to 1.$$

Z věty o limitě sevřené posloupnosti tedy plyne

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+k^2}} = 1.$$

Příklad 7.5 *Pomocí odhadů (sevřené posloupnosti) vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

(Řešení: 2)
Postup řešení: Pomocí odhadu

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}}$$

platného pro k v rozmezí $n^2 \leq k \leq (n+1)^2$ získáme

$$\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} 1 = \frac{(n+1)^2 - n^2 + 1}{n} = \frac{2(n+1)}{n} \to 2,$$

$$\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{2(n+1)}{n+1} = 2 \to 2.$$

Z věty o limitě sevřené posloupnosti pak plyne

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$$

Příklad 7.6 *Pomocí odhadů (sevřené posloupnosti) vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin(k^2) \right).$$

(Řešení: 0)
Postup řešení: Pomocí odhadu

$$-1 \leq (-1)^k \sin(k^2) \leq |\sin(k^2)| \leq 1$$

platného pro všechna $k \in \mathbb{R}$ získáme

$$0 \leftarrow -\frac{n}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \sum_{k=1}^{n} (-1) \leq \frac{1}{n^2+1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin(k^2) \leq \frac{1}{n^2+1} \sum_{k=1}^{n} 1 \leq \frac{n}{n^2+1} \to 0.$$

Z věty o limitě sevřené posloupnosti pak plyne

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin(k^2) \right) = 0.$$

Příklad 7.7 *Ukažte, že*

$$\lim_{n\to+\infty}\left\lfloor\frac{n}{n+1}\right\rfloor \neq \left\lfloor\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\right\rfloor,$$

ale naopak

$$\lim_{n\to+\infty}\left\lfloor\frac{n+1}{n}\right\rfloor = \left\lfloor\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\right\rfloor.$$

Postup řešení: Jelikož $0 < \frac{n}{n+1} < 1$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$, *je* $\left\lfloor\frac{n}{n+1}\right\rfloor = 0$. *Pak jistě platí*

$$\lim_{n\to+\infty}\left\lfloor\frac{n}{n+1}\right\rfloor = 0.$$

Naopak $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1$ *a* $\lfloor 1\rfloor = 1$. *Dokázali jsme tedy první nerovnost.*
V druhém případě $\frac{n+1}{n} \in (1{,}2)$ *pro všechna* $n > 1$. *Pak pro* $n > 1$ *platí*

$$\left\lfloor\frac{n+1}{n}\right\rfloor = 1$$

a tedy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\lfloor\frac{n+1}{n}\right\rfloor = 1$. *Obdobně jako v prvním případě* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} = 1$ *a* $\lfloor 1\rfloor = 1$. *Tím je druhá rovnost dokázána.*

7.2 Výpočet limit pomocí posloupností konvergujících k Eulerově číslu e, Stirlingova formule

Příklad 7.8 *Vypočtěte*

$$a.)\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n},\quad b.)\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n},\quad c.)\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{(-1)^n n}.$$

(Řešení: a.) $1/e$, *b.)* e, *c.)* e *)*
Postup řešení:
S využitím věty o limitě posloupnosti jdoucí k Eulerově číslu dostáváme
a.) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{(-n)}\right]^{(-1)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$,
b.) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{(-n)} = e$,
c.) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{(-1)^n n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{(-1)^n n}\right)^{(-1)^n n} = e$.

Příklad 7.9 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{n+1}.$$

(Řešení: e)
Postup řešení:
Použitím ekvivalentních úprav zadané posloupnosti a věty o limitě posloupnosti jdoucí k Eulerově číslu dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+3+2}{2n+3}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n+3}{2}}\right)^{\frac{2n+3}{2}}\right]^{\frac{2}{2n+3}(n+1)}=e,$$

jelikož $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2(n+1)}{2n+3}=1$.

Příklad 7.10 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n+2}.$$

(Řešení: e^{-6}*)*
Postup řešení:
Použitím ekvivalentních úprav zadané posloupnosti a věty o limitě posloupnosti jdoucí k Eulerově číslu dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n+2}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{2}}\right)^{3n+2}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n}{2}}\right)^{-\frac{n}{2}}\right]^{\frac{3n+2}{-\frac{n}{2}}}=e^{-6},$$

jelikož $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n+2}{-\frac{n}{2}}=-6$.

Příklad 7.11 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+2}\right)^{n^2}.$$

(Řešení: e)
Postup řešení:
Použitím ekvivalentních úprav zadané posloupnosti a věty o limitě posloupnosti jdoucí k Eulerově číslu dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+2}\right)^{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2+2}\right)^{n^2+2}\right]^{\frac{n^2}{n^2+2}}=e,$$

jelikož $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2+2=+\infty$ *a* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+2}=1$.

Příklad 7.12 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+1}\right)^{n}.$$

(Řešení: 1)
Postup řešení: Použitím ekvivalentních úprav zadané posloupnosti a věty o limitě posloupnosti jdoucí k Eulerově číslu dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n^2+1}\right)^{2n^2+1}\right]^{\frac{n}{2n^2+1}}=e^0=1,$$

jelikož $\lim\limits_{n\to+\infty}2n^2+1=+\infty$ *a* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2n^2+1}=0$.

Příklad 7.13 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+3n-1}{n^2-2n+3}\right)^{2n+1}.$$

(Řešení: e^{10})
Postup řešení: Použitím ekvivalentních úprav zadané posloupnosti a věty o limitě posloupnosti jdoucí k Eulerově číslu dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+3n-1}{n^2-2n+3}\right)^{2n+1}&=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-2n+3+5n-4}{n^2-2n+3}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{5n-4}{n^2-2n+3}\right)^{2n+1}\\&=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-2n+3}{5n-4}}\right)^{\frac{n^2-2n+3}{5n-4}}\right]^{\frac{(2n+1)(5n-4)}{n^2-2n+3}}=e^{10},\end{aligned}$$

jelikož $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2-2n+3}{5n-4}=+\infty$ *a* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)(5n-4)}{n^2-2n+3}=10$.

Příklad 7.14 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n}{1+2^n}\right)^{2^n}.$$

(Řešení: $1/e$)
Postup řešení: Použitím ekvivalentních úprav zadané posloupnosti a věty o limitě posloupnosti jdoucí k Eulerově číslu dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n}{1+2^n}\right)^{2^n}&=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+2^n}\right)^{2^n}\\&=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-(1+2^n)}\right)^{-(1+2^n)}\right]^{\frac{-2^n}{1+2^n}}=e^{-1}=\frac{1}{e},\end{aligned}$$

jelikož $\lim\limits_{n\to+\infty}|-(1+2^n)|=+\infty$ *a* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2^n}{1+2^n}=-1$.

Příklad 7.15 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}.$$

(Řešení: $\sqrt{e}$)
Postup řešení: Použitím ekvivalentních úprav zadané posloupnosti a věty o limitě posloupnosti jdoucí k Eulerově číslu dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \left(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}} &= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right]^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e},\end{aligned}$$

jelikož $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}+\sqrt{n} = +\infty$ *a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$.

Příklad 7.16 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\alpha n+2}{n+1}\right)^{n}$$

pro $\alpha \in \mathbb{R}^+$.
(Řešení: $+\infty$ pro $\alpha > 1$, e pro $\alpha = 1$, 0 pro $\alpha < 1$)
Postup řešení: Pro přehlednost označme $a_n^{(\alpha)} = \left(\frac{\alpha n+2}{n+1}\right)^n$. *Ekvivalentními úpravami dostáváme*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{(\alpha)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1-n+\alpha n+1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{(\alpha-1)n+1}{n+1}\right)^n =$$

Pro $\alpha = 1$ máme splněný předpoklad pro použití věty o limitě posloupnosti jdoucí k Eulerově číslu a získáváme

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{(1)} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}} = e.$$

Zbývají případy $\alpha \in (0,1)$ *a* $\alpha \in (1,+\infty)$. *Jelikož*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha n+2}{n+1} = \alpha,$$

dostáváme z věty o limitě obecné mocniny („$\lim a_n^{b_n} = a^b$“) výsledek

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{(\alpha)} = \begin{cases} 0, & \text{pro } \alpha \in (0,1), \\ +\infty, & \text{pro } \alpha \in (0,+\infty). \end{cases}$$

Celkově

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{(\alpha)} = \begin{cases} 0, & \text{pro } \alpha \in (0,1), \\ e, & \text{pro } \alpha = 1, \\ +\infty, & \text{pro } \alpha \in (0,+\infty). \end{cases}$$

Příklad 7.17 *Dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$ platí*

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}. \tag{6}$$

Tuto nerovnost si zapamatujte a využijte v následujících příkladech.
Postup řešení: Z definice čísla e pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$(1+\frac{1}{k})^k < e < (1+\frac{1}{k})^{k+1}$$

Vynásobením předcházejících nerovnic pro $k = 1,\ldots,n-1$ získáme nerovnost

$$\frac{2\cdot 3^2\cdot 4^3\cdot\cdots\cdot(n-1)^{n-2}\cdot n^{n-1}}{1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\cdots\cdot(n-2)^{n-2}\cdot(n-1)^{n-1}} < e^{n-1} < \frac{2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdot\cdots\cdot(n-1)^{n-1}\cdot n^n}{1\cdot 2^3\cdot 3^4\cdot\cdots\cdot(n-2)^{n-1}\cdot(n-1)^n},$$

která je ekvivalentní s nerovností

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!}.$$

Vynásobením předcházející nerovnosti kladným číslem $\frac{n!}{e^{n-1}}$ získáme

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < n\frac{n^n}{e^{n-1}} \Leftrightarrow e\cdot(\frac{n}{e})^n < n! < n\cdot e\cdot(\frac{n}{e})^n.$$

První nerovnost je již hledanou nerovností ze zadání. Druhou získáme úpravou výrazu $e\cdot(\frac{n}{e})^n$. Jelikož z definice čísla e platí nerovnost $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ dostáváme odhad

$$n\cdot e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n < n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}(\frac{n}{e})^n = n\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}\frac{n^n}{e^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} = e(\frac{n+1}{e})^{n+1},$$

což již dává hledanou druhou nerovnost.

Poznámka 7.1 *Ve Statistické fyzice či Asymptotických metodách bude odvozena přesnější tzv.* ***Stirlingova formule****:*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1.$$

Příklad 7.18 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{3^n n!}.$$

(Řešení: 0)
Postup řešení: *Z předcházející příkladů víme, že* $n! > e\left(\frac{n}{e}\right)^n$. *Použitím tohoto odhadu získáme*

$$\frac{n^n}{3^n n!} \le \frac{n^n}{3^n}\frac{1}{e}\left(\frac{e}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\left(\frac{e}{3}\right)^n \to 0.$$

Zadaná posloupnost je jistě kladná, platí tedy $\frac{n^n}{3^n n!} \ge 0 \to 0$. *Z věty o limitě sevřené posloupnosti pak dostáváme*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{3^n n!} = 0.$$

Příklad 7.19 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\dots(2n)}}{n}.$$

(Řešení: $\frac{4}{e}$)
Postup řešení: *Platí:* $n(n+1)(n+2)\cdot\dots\cdot(2n) = \frac{(2n)!}{(n-1)!}$. *Pro sevření využijeme odhady z rovnice* (6)

$$e\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} < (2n)! < e\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1},$$

$$e\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} < (n-1)! < e\left(\frac{n}{e}\right)^{n}.$$

Potom

$$\frac{1}{e}\left(\frac{e}{n}\right)^n e\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} < \frac{(2n)!}{(n-1)!} < \frac{1}{e}\left(\frac{e}{n-1}\right)^{n-1} e\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}$$

$$\frac{4^n n^n}{e^n} < \frac{(2n)!}{(n-1)!} < \frac{1}{e^2}\frac{1}{e^n}\frac{[(2n+1)^2]^n(2n+1)}{(n-1)^n(n-1)^{-1}}$$

$$\frac{4n}{e} < \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n-1)!}} < e^{-\frac{2}{n}}\frac{1}{e}\frac{(2n+1)^2\sqrt[n]{2n+1}}{\frac{n-1}{\sqrt[n]{n-1}}}.$$

Celkově jsme tedy dostáváme odhad

$$\frac{4n}{en} < \frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\dots(2n)}}{n} < e^{-\frac{2}{n}}\frac{1}{e}\frac{(2n+1)^2\sqrt[n]{2n+1}}{\frac{n-1}{\sqrt[n]{n-1}}}\frac{1}{n}.$$

Pro přehlednost označme $L' = \frac{4n}{en}$ *a* $P' = e^{-\frac{2}{n}} \frac{1}{e} \frac{(2n+1)^2 \sqrt[n]{2n+1}}{\frac{n-1}{\sqrt[n]{n-1}}} \frac{1}{n}$. *Pro jejich limity platí*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} L' &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{4n}{e}}{n} = \frac{4}{e},\\
\lim_{n\to+\infty} P' &= \frac{1}{e} \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{2}{n}} \cdot \frac{(2n+1)^2}{n(n-1)} \cdot \sqrt[n]{(2n+1)(n-1)}\\
&= \frac{1}{e} \cdot \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{2}{n}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(2+1/n)^2}{n^2(1-1/n)} \cdot \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(2n+1)(n-1)}\\
&= \frac{1}{e} \cdot 1 \cdot 2^2 \cdot 4 = \frac{4}{e},
\end{aligned}$$

kde pro výpočet $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(2n+1)(n-1)}$ *bylo použito odhadů*

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{(2n+1)\cdot 1} \leq \sqrt[n]{(2n+1)(n-1)} \leq \sqrt[n]{(2n+n)n} = \sqrt[n]{3n^2} = \sqrt[n]{3}(\sqrt[n]{n})^2 \to 1{\cdot}1 = 1.$$

Celkově z věty o limitě sevřené posloupnosti plyne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\dots(2n)}}{n} = \frac{4}{e}.$$

7.3 Limity s logaritmem

Příklad 7.20 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \Big(n - \ln n\Big).$$

(Řešení: $0, +\infty$*)*
Postup řešení: Použitím ekvivalentních úprav a věty o limitě logaritmu získáme

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln \sqrt[n]{n} = \ln 1 = 0,$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(n - \ln n\Big) = \lim\limits_{n\to+\infty} n\Big(1 - \frac{\ln n}{n}\Big) = +\infty \cdot 1 = +\infty.$

Jiný postup:
Limitu $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}$ *lze spočítat také pomocí věty o limitě sevřené posloupnosti a odhadu*

$$0 \leq \frac{\ln n}{n} = \frac{2 \ln n^{\frac{1}{2}}}{n} \leq 2\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n} \to 0,$$

kde jsme využili odhad $\ln x < x$ *platný pro* $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Příklad 7.21 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{\log_a(10n)},$$

kde $a > 0$, $a \neq 1$.
(Řešení: 1)
Postup řešení: Použitím vzorce pro logaritmus součinu a vytknutím nejrychleji rostoucího členu získáme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{\log_a(10n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{\log_a(10) + \log_a(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{\log_a(10)}{\log_a(n)} + 1} = 1,$$

jelikož $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log_a(10)}{\log_a(n)} = 0$.

Příklad 7.22 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^2+3n-2)}{\ln(n^5+7n^2-n)}.$$

(Řešení: 2/5)
Postup řešení: Vytknutím nejrychleji rostoucího členu a použitím vzorce pro logaritmus součinu získáme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^2+3n-2)}{\ln(n^5+7n^2-n)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left[n^2(1+3/n-2/n^2)\right]}{\ln\left[n^5(1+7/n^3-1/n^4)\right]} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^2) + \ln(1+3/n-2/n^2)}{\ln(n^5) + \ln(1+7/n^3-1/n^4)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln(n) + \ln(1+3/n-2/n^2)}{5\ln(n) + \ln(1+7/n^3-1/n^4)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)\left[2 + \frac{\ln(1+3/n-2/n^2)}{\ln(n)}\right]}{\ln(n)\left[5 + \frac{\ln(1+7/n^3-1/n^4)}{\ln(n)}\right]} = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Příklad 7.23 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2+e^{3n})}{\ln(1+n+e^{2n})}.$$

(Řešení: 3/2)

Postup řešení: Vytknutím nejrychleji rostoucího členu a použitím vzorce pro logaritmus součinu získáme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3n})}{\ln(1+n+e^{2n})} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln[e^{3n}(\frac{2}{e^{3n}}+1)]}{\ln[e^{2n}(\frac{1}{e^{2n}}+\frac{n}{e^{2n}}+1)]}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{3n\ln(e)+\ln(\frac{2}{e^{3n}}+1)}{2n\ln(e)+\ln(\frac{1}{e^{2n}}+\frac{n}{e^{2n}}+1)}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{3+\frac{\ln(\frac{2}{e^{3n}}+1)}{n}}{2+\frac{\ln(\frac{1}{e^{2n}}+\frac{n}{e^{2n}}+1)}{n}}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Příklad 7.24 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\log_{2n}(10n)\right)^{\ln n}.$$

(Řešení: 5)
Postup řešení: Převedením základu na podíl dvou přirozených logaritmů získáme

$$\begin{aligned}\log_{2n}(10n) &= \frac{\ln(10n)}{\ln(2n)}=\frac{\ln(10)+\ln(n)}{\ln(2)+\ln(n)}\\ &= \frac{\ln(2)+\ln(5)+\ln(n)}{\ln(2)+\ln(n)}=1+\frac{\ln(5)}{\ln(2)+\ln(n)}=1+\frac{1}{\frac{\ln(2)+\ln(n)}{\ln(5)}}.\end{aligned}$$

Potom za pomoci věty o limitě posloupnosti jdoucí k Eulerově číslu získáme

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\log_{2n}(10n)\right)^{\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{\ln(2)+\ln(n)}{\ln(5)}}\right)^{\frac{\ln(2)+\ln(n)}{\ln(5)}}\right]^{\frac{\ln n}{\frac{\ln(2)+\ln(n)}{\ln(5)}}}=e^{\ln 5}=5,$$

jelikož $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\frac{\ln(2)+\ln(n)}{\ln(5)}}=\ln 5.$

Příklad 7.25 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n+2)}\right)^n.$$

(Řešení: $+\infty$)
Postup řešení: Jelikož

$$\frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n+2)}=\frac{\ln\left[n^2(1+1/n^2)\right]}{\ln\left[n(1+2/n)\right]}=\frac{2\ln n+\ln(1+1/n^2)}{\ln n+\ln(1+2/n)}=\frac{2+\frac{\ln(1+1/n^2)}{\ln n}}{1+\frac{\ln(1+2/n)}{\ln n}}\to 2,$$

platí díky větě o limitě obecné mocniny

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n+2)}\right)^n=2^{+\infty}=+\infty.$$

7.4 Výpočet limit pomocí posloupnosti konvergující k Eulerově konstantě C

Příklad 7.26 *Na přednášce bylo odvozeno, že posloupnost tzv.* ***harmonických čísel***

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \nearrow +\infty.$$

Tuto posloupnost lze však regularizovat odečtením $\ln n$. *Dokažte, že posloupnost* $x_n := h_n - \ln n$ *je ostře klesající, posloupnost* $y_n := h_{n-1} - \ln n$ *je ostře rostoucí a platí*

$$0 < \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} x_n < 1.$$

Společná limita C *se nazývá* ***Eulerova konstanta*** *(*$C = 0,577216$*).*
Postup řešení: V dokazování využijeme vztahů $(1+\frac{1}{n})^n \nearrow e$, $(1+\frac{1}{n})^{n+1} \searrow e$ *a* $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \nearrow e$.
Nejprve ukážeme, že posloupnost $h_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *je ostře rostoucí. Jistě*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \Leftrightarrow 0 < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1+n},$$

což platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. *Dále pomocí ekvivalentních úprav získáme odhady*

$$\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1} \quad & /\ln \\
n\ln(1+\frac{1}{n}) < 1 < (n+1)\ln(1+\frac{1}{n}) \quad & /:\ln(1+\frac{1}{n}) \\
n < \frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})} < n+1 & \\
\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}. &
\end{aligned}$$

Tedy

$$-\frac{1}{n+1} > -\ln(1+\frac{1}{n}) > -\frac{1}{n}.$$

Nyní ukážeme, že posloupnost (x_n) *je ostře klesající:*

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln n \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln n - \ln(n+1) \\
&= \frac{1}{1+n} + \ln(\frac{n}{1+n}) = \frac{1}{1+n} - \ln(\frac{n+1}{n}) \\
&= \frac{1}{1+n} - \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1+n} = 0.
\end{aligned}$$

Tedy $x_{n+1} - x_n < 0$ *a posloupnost* (x_n) *je ostře klesající. Nyní ukážeme, že posloupnost* (y_n) *je ostře rostoucí:*

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= h_n - \ln(n+1) - h_{n-1} + \ln n \\ &= (h_n - h_{n-1}) - \ln(\frac{n+1}{n}) = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) > \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0. \end{aligned}$$

Tedy posloupnost (y_n) *je jistě ostře rostoucí. Celkově dostáváme*

$$y_n < x_n \wedge x_1 = 1 \wedge y_1 = 0 \wedge x_{n+1} < x_n \wedge y_{n+1} > y_n \wedge x_n - y_n = \frac{1}{n},$$

a proto

$$0 = y_1 < y_n < y_{n+1} < y_{n+1} + \frac{1}{1+n} = x_{n+1} < x_n < x_1 = 1 \tag{7}$$

Posloupnosti $(x_n), (y_n)$ *jsou ostře monotonní* $\Rightarrow$ *mají limitu a dle vztahu výše musí být konečná. Limitním přechodem v (7) dostaneme*

$$0 < \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} x_n < 1.$$

Příklad 7.27 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

(Řešení: $\ln 2$*)*
Postup řešení: Platí

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\left[\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) \right] + \ln(2n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n + \ln n \right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) \right) - \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) + \ln 2 = C - C + \ln 2 = \ln 2, \end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že posloupnost $\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) \right)$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* (x_n) *a má tedy stejnou limitu* C.

Příklad 7.28 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

(Řešení: $\ln 2$)
Postup řešení: Vhodnou úpravou získáme

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)-\left(\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{1}{k}-\ln\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\right)+\ln\frac{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\\ &= C-C+\ln 2=\ln 2,\end{aligned}$$

jelikož posloupnost $\left(\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{1}{k}-\ln\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\right)$ *je skoro vybraná z posloupnosti* (x_n) *(pro* $n=1$ *je nutné předefinovat) a* $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\frac{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}=2$.

Příklad 7.29 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right).$$

(Řešení: 0)
Postup řešení: Vhodnými úpravami získáme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n+\ln n\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n}{n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=\\ &= \frac{C}{+\infty}+0=0,\end{aligned}$$

kde jsme využili řešení příkladu 7.20.

Příklad 7.30 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n}^{n^2}\frac{1}{k}-\ln n\right).$$

(Řešení: 0)
Postup řešení: Vhodnými úpravami získáme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n}^{n^2}\frac{1}{k}-\ln n\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln n\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}-\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln n\right]-\ln n-\ln n\right)\\
&= -\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln n\right]+\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}-\ln n^2\right]\\
&= -C+C=0,
\end{aligned}$$

kde jsme využili, že posloupnost $\left[\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{k}-\ln n^2\right]$ *je vybraná posloupnost z* (x_n).

8 Osmý týden

8.1 Limity posloupností zadaných rekurentně

Příklad 8.1 *Vypočtěte* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$*, je-li* $a_1 = 10$, $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(Řešení: $-\infty$*)*

Postup řešení: Prvních pár členů posloupnosti je

$$a_1 = 10,\ a_2 = 10 - \frac{1}{\sqrt{1}},\ a_3 = 10 - \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tipneme, že tvar n*-tého členu je*

$$a_{n+1} = 10 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Nyní tip ověříme indukcí. Pro $n = 1$ *máme* $a_2 = 10 - \frac{1}{\sqrt{1}}$*. Nechť vztah platí pro* $n \in \mathbb{N}$ *a chceme ukázat, že platí i pro* $n + 1$*. Pak*

$$a_{n+1+1} = a_{n+2} \stackrel{def}{=} a_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \stackrel{IP}{=} 10 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 10 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Vztah tedy platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$*. Jelikož se jedná o ostře klesající posloupnost, limita jistě bude existovat. Pomocí odhadu*

$$a_{n+1} < 10 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = 10 - \frac{n}{\sqrt{n}} \stackrel{n\to+\infty}{\to} -\infty,$$

a věty o limitě sevřené posloupnosti je zřejmé, že $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Příklad 8.2 *Vypočtěte* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$*, je-li* $a_{n+1} = 2a_n - 5$ *a*

i. $a_1 = 4$

ii. $a_1 = 5$

iii. $a_1 = 6$.

(Řešení: i. $-\infty$*, ii. 5, iii.* $+\infty$ *)*

Postup řešení: Prozkoumejme nejprve monotonii zadané posloupnosti. Pokud posloupnost a_n *je monotonní, pak limita jistě existuje. Pokud bychom chtěli dokázat, že* a_n *je ostře rostoucí pak musí platit*

$$a_n < a_{n+1} = 2a_n - 5 \Leftrightarrow a_n > 5$$

To nastává pro případ iii.$a_1 = 6$*. Ostře klesající posloupnost bychom dostáváme pro případ i.*$a_1 = 4$ *a konstantní posloupnost pro* $a_1 = 5$*. Posloupnost tedy ve všech případech* *bude mít limitu. Nyní limitním přechodem vztahu* $a_{n+1} = 2a_n - 5$ *získáme vztah pro limitu* $a = \lim a_n$*:*

$$a = 2a - 5.$$

Tato rovnice má v $\overline{\mathbb{R}}$ *3 řešení:* $-\infty, +\infty$ *a* 5*. Nyní již můžeme rozebrat jednotlivé případy. V prvém případě i.*$a_1 = 6$ *jsme zjistili, že posloupnost je ostře rostoucí. Ostře rostoucí posloupnost nemůže mít limitu* $-\infty$ *a zároveň první člen posloupnosti je* $a_1 = 6$ *- limita tedy nemůže být ani 5 (spor s definicí). Není tedy jiná možnost, než že limita je* $+\infty$*. V druhém případě máme konstantní posloupnost* $a_n = 5$ *a ta má jistě limitu* 5*. V posledním případě máme ostře klesající posloupnost s* $a_1 = 4$ *a jediná možnost je tedy, že má limitu* $-\infty$*.*
Druhý způsob: *Pomocí indukce lze ukázat, že pro n-tý člen posloupnpsti platí*

$$a_n = 2^{n-1}(a_1 - 5) + 5.$$

Limita se pak rozpadne na tři výsledky v závislosti na volbě a_1*.*

Příklad 8.3 *Vypočtěte* $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$*, je-li* $a_{n+1} = a_n^2 + 6a_n + 4$ *a*

i. $a_1 = 0$

ii. $a_1 = -1$

iii. $a_1 = -4$

iv. $a_1 = -2.$

(Řešení: i. $+\infty$*, ii.* -1*, iii.* -4*, iv.* -4 *)*
Postup řešení: Nejprve vyřešíme body ii a iii, které jsou triviální. Jelikož

$$(-1)^2 + 6(-1) + 4 = -1,$$
$$(-4)^2 + 6(-4) + 4 = -4,$$

je posloupnost a_n *v těchto případech konstantní a její limita je jasná (-1 pro ii. a* -4 *pro iii.). V případě iv. si napíšeme prvním pár členů:*

$$a_1 = -2, a_2 = -4, a_3 = -4,$$

a vidíme, že od druhého členu je posloupnost opět konstantní a limita je rovna -4*. V případě i. opět vyšetříme monotonii. Posloupnost* a_n *je ostře rostoucí pokud*

$$a_n < a_{n+1} = a_n^2 + 6a_n + 4 \Leftrightarrow 0 < a_n^2 + 5a_n + 4 \Leftrightarrow a_n \in (-\infty, -4) \cup (-1, +\infty).$$

V prvním případě je tedy posloupnost jistě ostře rostoucí. Limitním přechodem ve vztahu $a_{n+1} = a_n^2 + 6a_n + 4$ *dostáváme vztah pro limity*

$$.a = a^2 + 6a + 4$$

V $\overline{\mathbb{R}}$ *má tato rovnice řešení:* $a \in \{-1, -4, +\infty\}$*. V případě i. není jiná možnost než* $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$*.*

Příklad 8.4 *Vypočítejte limitu posloupnosti* (a_n)*, když víte, že její členy pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *splňují podmínku* $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n + 3$*.*
(Řešení: $+\infty$*)*
Postup řešení: Vyšetříme monotonii:

$$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow 0 < a_n^2 + a_n + 3 \Leftrightarrow a_n \in \mathbb{R}.$$

Pozorujeme tedy, že posloupnost je vždy ostře rostoucí a limita tedy jistě existuje. Limitním přechodem vztahu $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n + 3$ *získáme rovnici pro limitu*

$$a = a^2 + 2a + 3,$$

kterou v $\overline{\mathbb{R}}$ *splňuje pouze* $+\infty$*. Tedy* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$*.*

8.2 Podílové a odmocninové kritérium

Příklad 8.5 (Podílové kritérium) *Nechť* (a_n) *je posloupnost nenulových čísel. Potom*

i. je-li $\lim\limits_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$*, je* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$*;*

ii. je-li $\lim\limits_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$*, je* $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$*.*

Dokažte.
Postup řešení: Označme $q_n = |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$*,* $L = \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|$ *a* $Q = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n$*. V prvním případě dostáváme nerovnost*

$$|a_{n+1}| = q_n|a_n| \leq |a_n|,$$

od jistého n_0*. Předcházející nerovnost plyne z věty o nerovnosti limit(* $q_n < 1$ *pro všechna* $n > n_0$*). Posloupnost* $|a_n|$ *je tedy od jistého* n_0 *klesající, její limita jistě existuje. Zároveň pro limity daných posloupností dostáváme rovnici*

$$L = QL.$$

Ta má v $\overline{\mathbb{R}}$ *tři možná řešení* $L \in \{-\infty, 0, +\infty\}$*. Posloupnost* $|a_n|$ *je nezáporná klesající, nemůže tedy mít limitu* $L = -\infty$ *ani* $L = +\infty$*. Jediná možnost je* $L = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|$*. Z věty o limitě absolutní hodnoty dostáváme, že i* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$*.*

V druhém případě postupujeme obdobně. Ze vztahu $|a_{n+1}| = q_n|a_n| \geq |a_n|$ *zjistíme, že posloupnost* $|a_n|$ *je od jistého* n_0 *rostoucí. Ze vztahu* $L = QL$ *je jediná možnost na hodnotu její limity* $L = +\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|$*. Což jsme chtěli ukázat.*

Jiný postup: *Nechť* $\lim\limits_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \alpha < 1$*. Potom jistě existuje* $\varepsilon > 0$ *tak, že* $\alpha + \varepsilon < 1$*. Z definice limity pro takto definované* ε *dostáváme*

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) \left(\left| |\frac{a_{n+1}}{a_n}| - \alpha \right| < \varepsilon \right).$$

Tedy

$$0 \leq \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \alpha + \varepsilon,$$

což pro všechna $n > n_0$ *implikuje*

$$0 \leq |a_n| < (\alpha + \varepsilon)^{n-n_0} |a_{n_0}| \implies \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

V druhém případě postupujeme obdobně

Příklad 8.6 (Odmocninové kritérium) *Nechť* (a_n) *je číselná posloupnost. Potom*

i. *je-li* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *je* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$;

ii. *je-li* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *je* $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$.

Dokažte.

Postup řešení: Nechť $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha < 1$. *Potom existuje* $\varepsilon > 0$ *tak, že* $\alpha + \varepsilon < 1$. *Z definice limity*

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(|\sqrt[n]{|a_n|} - \alpha| < \varepsilon).$$

Odtud $0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} < \alpha + \varepsilon$, *což pro všechna* $n \geq n_0$ *implikuje*

$$0 \leq |a_n| < (\alpha + \varepsilon)^n \implies \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Druhý případ se dokáže obdobně.

Příklad 8.7 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$$

pro $a \in \mathbb{R}$.

(Řešení: 0*)*

Postup řešení: Označme $b_n = \frac{a^n}{n!}$. *Pomocí podílového kritéria dostáváme*

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \left| \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|a|^n} \right| = \frac{|a|}{n+1} \to 0 < 1$$

a tedy $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Příklad 8.8 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k^2+1}{3k^2-1}.$$

(Řešení: 0*)*

Postup řešení: Označme $a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k^2+1}{3k^2-1}$. *Pomocí podílového kritéria dostáváme*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k^2+1}{3k^2-1}}{\prod_{k=1}^{n} \frac{2k^2+1}{3k^2-1}} = \frac{2(n+1)^2+1}{3(n+1)^2-1} \to \frac{2}{3} < 1$$

a tedy $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k^2+1}{3k^2-1} = 0$.

Příklad 8.9 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n^2}}{(n!)^n}$$

pro $a \in \mathbb{R}$.

(Řešení: 0)

Postup řešení: Označme $a_n = \frac{a^{n^2}}{(n!)^n} = \left(\frac{a^n}{n!}\right)^n$*. Limitu vyřešíme pomocí odmocninového kritéria. Platí:*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a|^n}{n!}.$$

Limitu na pravé straně vyřešíme pomocí podílového kritéria. Platí:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|a|^n} = |a| \frac{1}{n+1} \to 0 < 1.$$

A tedy $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 < 1$ *a z odmocninového kritéria plyne, že i* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^{n^2}}{(n!)^n} = 0$.

Příklad 8.10 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{2^n n!}.$$

(Řešení: $+\infty$)

Postup řešení: Označme $a_n = \frac{n^n}{2^n n!}$*. Pomocí podílového kritéria dostáváme*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{2^n n!}{n^n} = \frac{n}{2(n+1)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \to \frac{e}{2} > 1$$

a tedy $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^n}{2^n n!} = +\infty$.

Příklad 8.11 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^n}.$$

(Řešení: $+\infty$)

Postup řešení: Označme $a_n = \frac{(2n)!}{n^n}$*. Pomocí podílového kritéria dostáváme*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Jelikož

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{-(n+1)}{n}} = e^{-1},$$

pak

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$$

a tedy i $\lim n \to +\infty a_n = +\infty$.

8.3 Stolzův a Cauchyův vzorec

Poznámka 8.1 (Stolz) *Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti, $b_n \uparrow +\infty$ a existuje limita $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$. Pak*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

Poznámka 8.2 (Cauchy) *Nechť (a_n) je posloupnost kladných čísel, taková, že existuje $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Pak platí*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Poznámka 8.3 *Stolz a Cauchy se daji pěkně demostrovat (bylo na přednášce) na limitách:*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right), \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}.$$

Příklad 8.12 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}}$$

pro $p \in \mathbb{N}$.
(Řešení: $\frac{1}{p+1}$)

Postup řešení: Označme $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p$ a $b_n = n^{p+1}$. Limitu spočítáme pomocí Stolzova vzorce. Díky binomické věty dostáváme

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{(n+1)^p}{\sum\limits_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} n^{p+1-k} - n^{p+1}} = \frac{(n+1)^p}{\sum\limits_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} n^{p+1-k}}$$

$$= \frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p + \sum\limits_{k=2}^{p+1} \binom{p+1}{k} n^{p+1-k}} = \frac{(n+1)^p}{n^p \left(p+1 + \sum\limits_{k=2}^{p+1} \binom{p+1}{k} n^{1-k}\right)}.$$

Jelikož

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{p+1} \binom{p+1}{k} n^{1-k} = 0,$$

je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^p}{n^p \left(p+1 + \sum\limits_{k=2}^{p+1} \binom{p+1}{k} n^{1-k}\right)} = \frac{1}{1+p}.$$

Jsou splněny předpoklady Stolzova vzorce a tedy $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{1+p}$.

Příklad 8.13 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(k!)^p}{(n!)^p}$$

pro $p>0$.

(Řešení: 1)

Postup řešení: Označme $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(k!)^p$ *a* $b_n=(n!)^p$. *Limitu spočítáme pomocí Stolzova vzorce. Platí*

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{((n+1)!)^p}{((n+1)!)^p-(n!)^p} = \frac{1}{1-\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^p} = \frac{1}{1-\frac{1}{(n+1)^p}} \to 1.$$

Jsou splněny předpoklady Stolzova vzorce a tedy $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(k!)^p}{(n!)^p}=1.$

Příklad 8.14 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^k}{n^n}.$$

(Řešení: 1)

Postup řešení: Označme $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k^k$ *a* $b_n=n^n$. *Limitu spočítáme pomocí Stolzova vzorce. Platí*

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}-n^n} = \frac{1}{1-\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}} \to 1,$$

jelikož

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{1+n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{-(n+1)}{n}}}_{\to e^{-1}} = 0.$$

Jsou splněny předpoklady Stolzova vzorce a tedy $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^k}{n^n}=1.$

Příklad 8.15 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

(Řešení: $\frac{2}{3}$)

Postup řešení: *Označme* $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ *a* $b_n = n^{\frac{3}{2}}$. *Limitu spočítáme pomocí Stolzova vzorce. Rozšířením výrazem* $\frac{(n+1)^{3/2}+n^{3/2}}{(n+1)^{3/2}+n^{3/2}}$ *dostáváme*

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^{3/2}-n^{3/2}} = \frac{(n+1)^{1/2}\left((n+1)^{3/2}+n^{3/2}\right)}{(n+1)^3-n^3} = \frac{(n+1)^2+(n+1)^{1/2}n^{3/2}}{3n^2+3n+1}$$
$$= \frac{n^2\left((1+1/n)^2+(1+1/n)^{1/2}\right)}{n^2(3+3/n+1/n^2)} \to \frac{2}{3}.$$

Jsou splněny předpoklady Stolzova vzorce a tedy $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3}$.

Příklad 8.16 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

(Řešení: e)

Postup řešení: *Označme* $a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \sqrt[n]{b_n}$, *kde* $b_n = \frac{n^n}{n!}$. *S pomocí Cauchyho vzorce dostáváme*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e.$$

A tedy $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Příklad 8.17 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n)}}{n}.$$

(Řešení: $\frac{4}{e}$*)*

Postup řešení: *Označme* $a_n = \sqrt[n]{\frac{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n)}{n^n}} = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n(n-1)!}} = \sqrt[n]{b_n}$. *Nyní podle Cauchyho vzorce dostáváme*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)!}{n!(n+1)^{n+1}}\,\frac{(n-1)!n^n}{(2n)!}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{n}\,\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{n^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{n^2}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{n+1}{-(n+1)}} = 4\cdot e^{-1} = \frac{4}{e}.$$

A tedy $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n)}}{n}=\frac{4}{e}$.

Příklad 8.18 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^n+n-5}.$$

(Řešení: 3)
Postup řešení: Limitu můžeme vyřešit opět pomocí Cauchyho vzorce

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^n+n-5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}+n+1-5}{3^n+n-5}=3$$

Jiný postup: *Pomocí definice obecné mocniny dostáváme*

$$\sqrt[n]{3^n+n-5}=3\sqrt[n]{1+\frac{n}{3^n}-\frac{5}{3^n}}=3e^{\ln\left(\sqrt[n]{1+\frac{n}{3^n}-\frac{5}{3^n}}\right)}=3e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{n}{3^n}-\frac{5}{3^n})}\to 3e^0=3.$$

Jiný postup: *Pomocí odhadů a věty o limitě sevřené posloupnosti dostáváme*

$$3\leftarrow 3=3\cdot 1\le 3\sqrt[n]{1+\frac{n}{3^n}-\frac{5}{3^n}}\le 3\left(1+\frac{n}{3^n}\right)\to 3.$$

Příklad 8.19 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln^2 n}{n}.$$

(Řešení: 0)
Postup řešení: Pomocí odhadu $\ln x<x$ *a věty o limitě sevřené funkce dostáváme*

$$0\leftarrow 0\le\frac{\ln^2 n}{n}=\frac{\ln n\ln n}{n}=\frac{\ln n^{3\cdot\frac{1}{3}}\ln n^{3\cdot\frac{1}{3}}}{n}=\frac{(3\ln\sqrt[3]{n})(3\ln\sqrt[3]{n})}{n}<\frac{9\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n}}{n}\to 0.$$

Celkově tedy $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln^2 n}{n}=0$.

Jiný postup: *Pomocí Stolzovy věty dostáváme*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln^2(n+1)-\ln^2 n}{n+1-n}&=\lim_{n\to+\infty}(\ln(n+1)-\ln n)(\ln(n+1)+\ln n)\\&=\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{n+1}{n}\ln\left(n(n+1)\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\ln(n(n+1))}\\&=\lim_{n\to+\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{\ln(n(n+1))}{n}}=\ln e^0=0.\end{aligned}$$

Příklad 8.20 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$$

(Řešení: 0)
Postup řešení: Z definice obecné mocniny a za pomoci předcházejícího příkladu

$$\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} = \frac{e^{\ln n \ln n}}{e^{n \ln \ln n}} = e^{\ln^2 n - n \ln \ln n} = e^{n \ln \ln n \left(-1 + \overbrace{\frac{\ln^2}{n}}^{\to 0} \overbrace{\frac{1}{\ln \ln n}}^{\to 0} \right)} \to e^{-\infty} = 0.$$

Celkově tedy $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

Příklad 8.21 *Nalezněte posloupnosti* (a_n), (b_n) *tak, aby* $0 < b_n \nearrow +\infty$*, limita posloupnosti* $(\frac{a_n}{b_n})$ *existovala a současně limita posloupnosti* $(\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n})$ *neexistovala.*
(Řešení: například $a_n = n + (-1)^n$ *a* $b_n = n$ *)*
Postup řešení: Volme například $a_n = n + (-1)^n$ *a* $b_n = n$*. Jistě* b_n *je ostře rostoucí posloupnost s limitou* $+\infty$ *a zároveň platí*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n + 1 + (-1)^{n+1} - n - (-1)^n}{n + 1 - n} = \lim_{n\to+\infty} 1 + 2(-1)^{n+1}.$$

Druhá limita jistě neexistuje.

Příklad 8.22 *Nalezněte posloupnost* (a_n) *kladných čísel, pro níž* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *existuje, ale* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *neexistuje.*
(Řešení: například $a_n = 2 + (-1)^n$ *)*
Postup řešení: Zvolme například $a_n = 2 + (-1)^n$*. Pak*

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n}$$

neexistuje, jelikož

$$\lim_{n\to+\infty} c_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to+\infty} c_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2+1}{1} = 3.$$

Naopak

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{2 + (-1)^n} \leq \sqrt[n]{3} \to 1.$$

Z věty o limitě sevřené posloupnosti dostáváme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2 + (-1)^n} = 1$.

8.4 Bolzano-Cauchyovo (BC) kritérium

Příklad 8.23 *Určete, které z následujících tvrzení jsou ekvivalentní s tvrzením* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{C}$*, tj. s BC kritériem.*

i. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon)$

ii. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(|a_{n+p} - a_n| < \sqrt{\varepsilon})$

iii. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,3,4\})(|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon)$

iv. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(|a_{n+2p} - a_n| < \varepsilon)$

v. $(\forall \varepsilon > 0)(\forall p \in \mathbb{N})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon)$

(Řešení: i. ano, ii. ano, iii. ano, iv. ne, v. ne)
Postup řešení: Platí:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{C} &\overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon)\\ &\overset{BC}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon)\\ &\overset{ozn.}{\Leftrightarrow} vi.\end{aligned}$$

Dokážeme sérii implikací i. $\Longrightarrow$ *ii.* $\Longrightarrow$ *iii.* $\Longrightarrow$ *vi* $\Longrightarrow$ *i. ze kterých vyplývá ekvivalence prvních třech výroků s tvrzením* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{C}$*:*

- *i.* $\Longrightarrow$ *ii. : nechť nepřítel předhodí libovolné* $\varepsilon > 0$*. Vezměme toto* ε *a předhoďmě číslo* $\delta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ *bodu i.. Z bodu i. dostaneme* n_0 *pomocí kterého můžeme odhadnout*

  $$|a_{n+p} - a_n| = |a_{n+p} - a_{n_0} + a_{n_0} - a_n| \le |a_{n+p} - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a_n| < \delta + \delta = \sqrt{\varepsilon}.$$

- *ii.* $\Longrightarrow$ *iii. : nechť nepřítel předhodí libovolné* $\varepsilon > 0$*. Předhoďme automatu ii. číslo* $\delta = \varepsilon^2$*. Z ii. dostaneme* $n_0 \in \mathbb{R}$ *splňující*

  $$|a_{n+p} - a_n| < \sqrt{\delta} = \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \forall n > n_0.$$

  Což je dokonce silnější výrok než jsme chtěli dokázat (platí i pro $p = 1,2,3,4$*).*

- *iii.* $\Longrightarrow$ *vi.: Budeme chtít ukázat, že z bodu iii. plyne B-C podmínka. Nechť nepřítel předhodí libovolné* $\varepsilon > 0$*, definujme* $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$*. Předhoďme toto* ε_1 *do iii. tím získáme* n_0 *a odhady:*

  $$|a_{n+1} - a_n| \le |a_{n+1} - a_{n+10}| + |a_{n+10} - a_n| \overset{iii.}{\le} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

  Obdobně získáme n_0 *pro ostatní případy 2,3,4. Celkově volíme* n_0 *jako maximum ze všech co jsme nalezli.*

- *vi.* $\Longrightarrow$ *i.: nechť nepřítel předhodí libovolné* $\varepsilon > 0$. *Volme* $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ *a předhoďme toto* δ *definici limity. Tím získáme* $n_0 \in \mathbb{R}$. *Volme v i. číslo* $n_0 = \lfloor n_0 \rfloor + 1$. *Pak můžeme odhadnout*

$$|a_n - a_{n_0}| = |a_n - a + a - a_{n_0}| \leq |a_n - a| + |a - a_{n_0}| < 2\delta = \varepsilon,$$

  což jsme chtěli dokázat.

Bod iv. ***není*** *ekvivalentní. Berme jako protipříklad posloupnost* $a_n = (-1)^n$. *Tato posloupnost limitu nemá, ale pro libovolné* $n, p \in \mathbb{N}$ *platí*

$$|a_{n+2p} - a_n| = (-1)^{n+2p} - (-1)^n = (-1)^n - (-1)^n = 0.$$

Tedy podmínka iv. je splněna.

Poslední výrok opět ***není*** *ekvivalentní. Jako protipříklad můžeme vzít harmonickou posloupnost* $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. *Tato posloupnost má limitu* $+\infty$. *Zároveň*

$$|a_{n+p} - a_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{n+1} = \frac{n+p-n}{n+1} = \frac{p}{n+1} < \frac{p}{n}.$$

Nechť tedy nepřítel předhodí libovolné $\varepsilon > 0$ *a* $p \in \mathbb{N}$. *Pak*

$$\frac{p}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{p}{\varepsilon}.$$

Stačí tedy volit $n_0 = \lfloor \frac{p}{\varepsilon} \rfloor + 1$ *a výrok v. bude platit.*

Příklad 8.24 *Ukažte z BC kritéria, že existuje konečná*

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Postup řešení: Označme $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. *Pak s využitím nerovnosti* $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ *platnou pro* $k > 1$ *dostáváme*

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \right| < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon. \end{aligned}$$

Pokud tedy zvolíme zvolíme $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$, *pak jistě bude platit*

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon, \qquad \forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Což jsme chtěli ukázat.

Příklad 8.25 *Ukažte z BC kritéria, že existuje konečná*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}.$$

Postup řešení: Označme $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$. *Pak*

$$|a_{n+p}-a_n|=|\sum_{k=1}^{n+p}\frac{(-1)^k}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}|=|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{(-1)^k}{k}|=|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{1}{n+p}|.$$

Jelikož

$$\frac{1}{n+i}>\frac{1}{n+i+1},\qquad \forall i\in\mathbb{N},$$

je součet dvou po sobě jsoucích členů kladný a tedy i celkový součet je kladný. Můžeme tedy vynechat absolutní hodnotu. Pak

$$|a_{n+p}-a_n|=\frac{1}{n+1}\underbrace{-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}}_{<0}\underbrace{-\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+5}}_{<0}-\cdots+\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n+1},$$

kde jsme opět využili předcházejí nerovnost, pouze jsme vynechali první člen součtu. Je dobré si uvědomit, že předchozí odhad platí nezávisle na sudosti/lichosti čísla p (pro p liché jistě platí odhad $\frac{-1}{n+p}<0$*). Pokud zvolíme* $n_0=\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\rfloor+10$*, bude jistě platit*

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon,\qquad \forall n>n_0,\forall p\in\mathbb{N}.$$

Což jsme chtěli ukázat.

Příklad 8.26 *Pomocí Bolzanova-Couchyho kritéria vypočítejte* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

(Řešení: $+\infty$*)*

Postup řešení: Definujme nejprve $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. *Tato posloupnost je jistě rostoucí a limita tedy musí existovat. Pomocí BC dokážeme, že nebude konečná, tj. ukážeme negaci BC podmínky:*

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall n_0\in\mathbb{N})(\exists n\in\mathbb{N},n>n_0)(\exists p\in\mathbb{N})(|a_{n+p}-a_n|\geq\varepsilon)$$

Musíme tedy zvolit ε,p,n. *Pozorujeme:*

$$|a_{n+p}-a_n|=a_{n+p}-a_n=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}\geq\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{n+p}=\frac{n}{n+p}.$$

Pokud zvolíme $p=n=n_0+1$ *dostáváme*

$$|a_{n+p}-a_n|\geq\frac{n_0+1}{2n_0+1}\geq\frac{1}{2}=:\varepsilon,$$

což jsme chtěli ukázat.

8.5 Limes superior, limes inferior

Příklad 8.27 *Nalezněte všechny hromadné hodnoty posloupnosti* (a_n) *a určete* $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ *a* $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ *pro*

$$a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n.$$

(Řešení: $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = e$ *a* $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = e^{-1}$*)*

Postup řešení: Vybereme dvě posloupnosti, které pokrývají celé $\mathbb{N}$ *a pak z teorie víme, že nejmenší limita vybrané posloupnosti je limes inferior a největší je limes superior. Vybereme tedy sudé a liché. Pak*

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e,$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} = e^{-1}$$

a tedy $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = e$ *a* $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = e^{-1}$.

Příklad 8.28 *Nalezněte všechny hromadné hodnoty posloupnosti* (a_n) *a určete* $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ *a* $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ *pro*

$$a_n = \cos^n\left(\frac{2n\pi}{3}\right).$$

(Řešení: $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *a* $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$*)*

Postup řešení: Obdobně jako u minulého příkladu vybereme posloupnosti pokrývající celé $\mathbb{N}$*. Volíme*

- $k_n = 3n$,
- $l_n = 3n - 1$,
- $m_n = 3n - 2$,

které jistě pokrývají celé $\mathbb{N}$. *Pak dostáváme*

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} \cos^{3n} 2\pi n = \lim_{n\to+\infty} 1^{3n} = 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} a_{l_n} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\cos\frac{2\pi}{3}(3n-1)\right)^{3n-1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\cos\left(2\pi n - \frac{2\pi}{3}\right)\right)^{3n-1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\cos 2\pi n \cos\frac{2\pi}{3} + \sin 2\pi n \sin\frac{2\pi}{3}\right)^{3n-1} = \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{3n-1} = 0, \\ \lim_{n\to+\infty} a_{m_n} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\cos\frac{2\pi}{3}(3n-2)\right)^{3n-2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\cos\left(2\pi n - \frac{4\pi}{3}\right)\right)^{3n-1}, \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\cos 2\pi n \cos\frac{4\pi}{3} + \sin 2\pi n \sin\frac{4\pi}{3}\right)^{3n-2} = \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{3n-2} = 0.\end{aligned}$$

Tedy $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *a* $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

Příklad 8.29 *Určete* $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ *a* $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ *pro*

$$a_n = \sqrt[n]{\left(2+(-1)^n\right)^n + \left(3+(-1)^n\right)^n}.$$

(Řešení: $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$, $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 4$ *)*

Postup řešení: Zvolme dvě vybranné posloupnosti a_{2n} *a* a_{2n+1} *a spočtěme jejich limity. Platí*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} a_{2n} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n+4^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}+4^{n+1}}{3^n+4^n} = 4, \\ \lim_{n\to+\infty} a_{2n} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1^n+2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+2^{n+1}}{1+2^n} = 2,\end{aligned}$$

kde jsme využili Cauchyho vzorec. Z teorie opět dostáváme, že $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$ *a* $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 4$.

Příklad 8.30 *Sestrojte omezenou posloupnost* (a_n) *tak, aby* $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ *a současně* $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n < \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$.

(Řešení: například $a_n = \cos(\sqrt{n}\pi)$.*)*

Postup řešení:

Zkusme posloupnost $a_n = \cos(\sqrt{n}\pi)$. *Ukážeme, že platí dané požadavky na* a_n:

- a_n *je jistě omezená,*
- $a_{n+1} - a_n = \cos(\sqrt{n+1}\pi) - \cos(\sqrt{n}\pi) = -2\sin\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\pi}{2} \sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\pi \to 0$,
- *nyní stačí už jen ukázat že limita neexistuje. Vybereme 2 podposloupnosti:*

  i. $k_n = 4n^2 \implies a_{k_n} = \cos(2n\pi) = 1 \to 1$,

  ii. $k_n = (1+2n)^2 \implies a_{k_n} = \cos(1+2n)\pi = -1 \to -1$.

9 Devátý týden

9.1 Hromadný bod množiny

Příklad 9.1 *Pomocí kvantifikátorů zapište definice hromadného a izolovaného bodu množiny $A \subset \mathbb{R}$. Za jakých dodatečných předpokladů platí, že bod je izolovaný právě tehdy, není-li hromadný?*
(Řešení:

- $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *je hromadným bodem* $A \subset \mathbb{R}$ *pokud* $(\forall H_a)(H_a \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset)$,
- $a \in A$ *je izolovaný bod množina* A *pokud* $(\exists H_a)(H_a \cap A = \{a\})$,
- *pokud* $a \in A$, *pak* a *je izolovaný právě tehdy pokud není hromadný.*

)
Postup řešení:

- $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *je hromadným bodem* $A \subset \mathbb{R}$ *pokud* $(\forall H_a)(H_a \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset)$
- $a \in A$ *je izolovaný bod množina* A *pokud* $(\exists H_a)(H_a \cap A = \{a\})$
- *Pokud* $a \in A$. *Pak* a *je izolovaný právě tehdy pokud není hromadný*

Poznámka 9.1 *Hromadný bod se v množině* $\mathbb{C}$ *nezaváděl*

Příklad 9.2 *Rozhodněte, je-li* a *hromadný bod množiny* A *pro*

i. $a = 1,\ A = (0, 2)$

ii. $a = 1,\ A = (0, 1)$

iii. $a = \pi,\ A = \mathbb{Z}$

iv. $a = 3,\ A = \mathbb{Z}$

(Řešení: ano, ano, ne, ne)
Postup řešení:

i. *Nechť* $H_1 = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. *Pak*

$$(0, 2) \cap H_1 \setminus \{1\} = \begin{cases} (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \setminus \{1\}, & \varepsilon < 1 \\ (0, 2) \setminus \{1\}, & \varepsilon \geq 1 \end{cases}$$

V obou případech je průnik neprázdný. V prvém případě například bod $x = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ *leží v průniku. Bod* $a = 1$ *je hromadným bodem množiny* $A = (0, 2)$.

ii. *Nechť* $H_1 = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. *Pak*

$$(0,1) \cap H_1 \setminus \{1\} = \begin{cases} (1-\varepsilon, 1), & \varepsilon < 1 \\ (0,1), & \varepsilon \geq 1 \end{cases}$$

V obou případech je průnik neprázdný. V prvém případě například bod $x = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ *leží v průniku. Bod* $a = 1$ *je hromadným bodem množiny* $A = (0,1)$.

iii. *Dokážeme, že* π ***není*** *hromadným bodem množiny* $A = \mathbb{Z}$. *Vezměme okolí* $H_\pi = \left(\pi - \frac{1}{100}, \pi + \frac{1}{100}\right)$. *Pak* $\mathbb{Z} \cap H_\pi \setminus \{\pi\} = \emptyset$ *a tedy bod* π *není hromadným bodem množiny* $\mathbb{Z}$.

iv. *Dokážeme, že* 3 ***není*** *hromadným bodem množiny* $A = \mathbb{Z}$. *Vezměme okolí* $H_3 = \left(3 - \frac{1}{100}, 3 + \frac{1}{100}\right)$. *Pak* $\mathbb{Z} \cap H_3 \setminus \{3\} = \emptyset$ *a tedy bod* 3 *není hromadným bodem množiny* $\mathbb{Z}$.

Příklad 9.3 *Rozhodněte, je-li a hromadný bod množiny A pro*

i. $a = 0$, $A = \left\{\frac{1}{x} \middle| \, x \text{ prvočíselné}\right\}$

ii. $a = +\infty$, $A = \{\operatorname{tg} x | \, x \in (-\pi/2, \pi/2)\}$

iii. $a = -\infty$, $A = \{n(\cos n + \sin n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

(Řešení: ano, ano, ano)
Postup řešení:

i. *Ukážeme, že 0 je hromadným bodem A. Berme libovolné okolí* $H_0 = (\varepsilon, -\varepsilon)$. *Aby* $A \cap H_0 \setminus \{0\} \neq \emptyset$ *potřebujeme nalézt prvočíslo* x *takové, že* $\frac{1}{x} < \varepsilon$. *Jelikož množina prvočísel je nekonečná, takové prvočíslo nalezneme k libovolnému kladnému* ε. *Nula je tedy hromadným bodem množiny A.*

ii. *Opět ukážeme, že* $+\infty$ *je hromadným bodem. Berme libovolné okolí* $H_{+\infty} = (K, +\infty)$. *Aby průnik s množinou A nebyl nulový potřebujeme nalézt* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *tak, že* $\operatorname{tg} x > K$. *Jelikož funkce* tg *je na tomto intervalu roste do* $+\infty$ *jistě takové* x *nalezneme. Například*

$$x = \operatorname{arctg}(K+1).$$

iii. *Opět ukážeme, že* $-\infty$ *je hromadným bodem. Berme libovolné okolí* $H_{-\infty} = (-\infty, -K)$, $K > 0$. *Aby průnik s množinou A nebyl nulový potřebujeme nalézt* $n \in \mathbb{N}$ *tak, že* $n(\cos n + \sin n) < -K$. *Takové n jistě nalezneme. Stačí vzít* $n > K$ *a vynutit podmínku* $\cos n + \sin n < 0$.

9.2 Limita funkce

Příklad 9.4 *Buď $p = p(x)$ polynom stupně alespoň 1. Ukažte následující limitu funkce* $|\lim_{x\pm\infty} p(x)| = +\infty$.

Postup řešení: Nechť $p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, $m > 0$. Pak

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} x^m \left(a_m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^{k-m} \right) = +\infty \cdot \operatorname{sgn}(a_m)$$

a tedy $\lim_{x\to+\infty} |p(x)| = +\infty$. Limitu v $-\infty$ se dokáže obdobně.

Příklad 9.5 *Vypočtěte limitu funkce*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{m} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k},$$

kde a_m, $b_n \neq 0$.
(Řešení: 0 pro $m < n$, a_m/b_n pro $m = n$, $+\infty \cdot \operatorname{sgn}(a_m/b_n)$ pro $m > n$.)
Postup řešení:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{m} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^m \left(a_m + \sum_{k=0}^{m-1} a_{k-m} x^{k-m} \right)}{x^n \left(b_n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k-m} \right)} =: \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

a tedy

- $m = n \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = a_m/b_n$
- $m < n \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- $m > n \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = \operatorname{sgn}(a_m/b_n) \cdot (+\infty)$

Příklad 9.6 *Vypočtěte limitu funkce*

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}.$$

pro $a = 0,\ 1,\ +\infty$.
(Řešení: 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$)
Postup řešení:
Pro jednotlivé případy dostáváme

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = 1$,
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+1)}{2x+1} = \frac{2}{3}$,
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{1}{2}$.

Příklad 9.7 *Vypočtěte limitu funkce*

$$\lim_{x\to a} \frac{x^4+2x^2-3}{x^3-3x^2+2x}.$$

pro $a = -\infty, 1$.
(Řešení: $-\infty, -8$ *)*
Postup řešení:
Pro jednotlivé případy dostáváme

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+2x^2-3}{x^3-3x^2+2x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3+x^2+3x+3)}{(x-1)(x^2-2x)} = -8$,
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^4+2x^2-3}{x^3-3x^2+2x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^4\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^4}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = -\infty$.

Příklad 9.8 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1},$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.
(Řešení: $\frac{m}{n}$*)*
Postup řešení: S využitím vzorce pro $a^n - b^n$ *dostáváme*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\sum\limits_{k=0}^{m-1} x^k}{(x-1)\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k} = \frac{m}{n}.$$

Příklad 9.9 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}.$$

(Řešení: 1)
Postup řešení:
Jelikož $x = 1$ *je kořenem čitatele i jmenovatele, můžeme limitu upravit na*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3+x^2+x-2)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{1+1+1-2}{1+1+1+1-3} = 1.$$

Příklad 9.10 *Vypočtěte limitu funkce*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

(Řešení: 1)
Postup řešení:

Vytknutím $\sqrt{x}$ z čitatele a jmenovatele dostáváme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1.$$

Příklad 9.11 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}.$$

(Řešení: $\frac{4}{3}$)
Postup řešení: Vhodným rozšířením jmenovatele a čitatele získáme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x\to4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3} \\ &= \lim_{x\to4} \frac{2(x-4)}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \lim_{x\to4} 2\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Příklad 9.12 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}.$$

(Řešení: $\frac{1}{144}$)
Postup řešení:

Použijeme vzorec $(a^3+b^3) = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ pro $a = \sqrt[3]{x-6}$ a $b = 2$. Pak platí

$$(\sqrt[3]{x-6}+2) \cdot \frac{(x-6)^{2/3}-2((x-6))^{1/3}+2^2}{(x-6)^{2/3}-2((x-6))^{1/3}+2^2} = \frac{x+2}{(x-6)^{2/3}-2((x-6))^{1/3}+2^2}.$$

Zároveň $x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4)$. Celkově platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} &= \lim_{x\to-2} \frac{x+2}{(x-6)^{2/3}-2((x-6))^{1/3}+2^2} \frac{1}{(x+2)(x^2-4x+4)} \\ &= \lim_{x\to-2} \frac{1}{(x-6)^{2/3}-2((x-6))^{1/3}+2^2} \frac{1}{x^2-4x+4} \\ &= \frac{1}{4+4+4} \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12} \frac{1}{12} = \frac{1}{144}.\end{aligned}$$

Příklad 9.13 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}.$$

(Řešení: $\frac{1}{4}$)
Postup řešení:
Jednoduchou úpravou jmenovatele získáme

$$\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4} = \lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{(\sqrt[4]{x}-2)(\sqrt[4]{x}+2)} = \lim_{x\to 16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}+2} = \frac{1}{4}.$$

Příklad 9.14 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}.$$

(Řešení: $\frac{3}{2}$)
Postup řešení: Vhodně rozšíříme nejprve čitatel a pak jmenoval, abychom mohli použít vzorce $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ a $(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Pak

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} \cdot \frac{(1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}(1-x)^{1/3}+(1-x)^{2/3}}{(1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}(1-x)^{1/3}+(1-x)^{2/3}} \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\
&\quad = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{(1+x)-(1-x)} \frac{(1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}(1-x)^{1/3}+(1-x)^{2/3}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\
&\quad = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

9.3 Spojitost funkce

Příklad 9.15 *Pomocí kvantifikátorů zapište definici spojitosti (realné) funkce (reálné proměnné). Diskutujte vztah mezi limitou v konečném bodě a spojitostí.*

(Řešení:

- *f je spojitá v bodě a, právě když $(\forall H_{f(a)})(\exists U_a)(\forall x \in U_a \cap D_f)(f(x) \in H_{f(a)})$,*
- *pokud $a \in D'_f \cap D_f$, pak f je spojitá v bodě a právě tehdy, když $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Postup řešení:

Funkce f je spojitá v bodě a, právě když $(\forall H_{f(a)})(\exists U_a)(\forall x \in U_a \cap D_f)(f(x) \in H_{f(a)})$. Nechť $a \in D_f \cap D'_f$, pak má smysl vyšetřovat limitu v bodě a. Srovnáním výše uvedené definice spojitosti a definice limity funkce v bodě a pozorujeme, že platí následující věta. Funkce f je spojitá v bodě a právě tehdy, když $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Příklad 9.16 *Buď $a \in \mathbb{R}$. Nechť existuje konečná limita $\lim\limits_{x \to a} f(x) =: c$. Ukažte, že funkce*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D_f \setminus \{a\} \\ c & x = a \end{cases}$$

je spojitá v a.
Postup řešení:
Nechť $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c \in \mathbb{R}$, kde $a \in \mathbb{R}$, tj. z definice

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta)(|f(x) - c| < \varepsilon).$$

Chceme ukázat, že $\tilde{f}(x)$ je spojitá v bodě a. Bod a je hromadným bodem množiny D_f, je tedy i hromadným bodem množiny $D_{\tilde{f}}$. Celkově $a \in D'_{\tilde{f}} \cap D_{\tilde{f}}$, lze tedy přepsat spojitost pomocí limity, tj. máme ukázat

$$(\forall \tilde{\varepsilon} > 0)(\exists \tilde{\delta} > 0)(\forall x \in D_{\tilde{f}}, 0 < |x - a| < \tilde{\delta})(|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| < \tilde{\varepsilon}).$$

Závorka $(\forall x \in D_{\tilde{f}}, 0 < |x - a| < \tilde{\delta})$ lze ekvivalentně přepsat $(\forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \tilde{\delta})$, pak tedy s využitím definice funkce $\tilde{f}(x)$ můžeme psát

$$(\forall \tilde{\varepsilon} > 0)(\exists \tilde{\delta} > 0)(\forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \tilde{\delta})(|\widetilde{f(x)} - c| < \tilde{\varepsilon}).$$

Pokud tedy zvolíme $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ a položíme $\tilde{\delta} = \delta$, máme hotovo.

Příklad 9.17 *Z definice ukažte, že funkce $f(x) = x^2 + 1$, $D_f = \mathbb{R}$, je spojitá v libovolném $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Postup řešení: Z definice máme ukázat, že platí výrok

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta)(|x^2 + 1 - (x_0^2 + 1)| < \varepsilon).$$

Jistě platí

$$|x^2 + 1 - (x_0^2 + 1)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0|.$$

Použitím trojúhelníkové nerovnosti dále získáme

$$|x + x_0| = |x + x_0 - x_0 + x_0| \leq |x - x_0| + 2|x_0| < \delta + 2|x_0|.$$

Takže celkově máme odhad

$$|x - x_0||x + x_0| < \delta(\delta + 2|x_0|) = \delta^2 + 2|x_0|\delta \overset{!}{<} \varepsilon.$$

Nerovnice $\delta^2 + 2|x_0|\delta - \varepsilon < 0$ *má řešení* $\delta \in (0, \sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon^2} - |x_0|)$*, takže hledané* δ *v závisloti na* x_0 *a* ε *můžeme volit například jako* $\delta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon^2} - |x_0|\right)$.

Příklad 9.18 *Dokažte, že libovolná funkce je spojitá v libovolném izolovaném bodě svého definičního oboru.*
Postup řešení:
Nechť bod x_0 *je izolovaný bod definičního oboru funkce* f*. Pak z definice existuje okolí* $H^*_{x_0}$ *splňující*

$$(\exists H^*_{x_0})(D_f \cap H^*_{x_0} = \{x_0\}).$$

Opět z definice, funkce f *je spojitá v bodě* x_0 *pokud platí výrok*

$$(\forall H_{f(x_0)})(\exists H_{x_0})(\forall x \in H_{x_0} \cap D_f)(f(x) \in H_{f(x_0)}).$$

Pokud za hledané okolí H_{x_0} *zvolíme okolí* $H^*_{x_0}$*, které máme k dispozici z definice izolovaného bodu, dostáváme*

$$H_{x_0} \cap D_f = H^*_{x_0} \cap D_f = \{x_0\}.$$

Výše uvedený výrok o spojitosti v izolovaném bodě tedy platí, jelikož jistě $f(x_0) \in H_{f(x_0)}$.

Poznámka 9.2 *U minulého příkladu nelze využít charakterizaci spojitosti přes limitu. V izolovaném bodě není limita funkce definovaná!*

9.4 Limita složené funkce, limita sevřené funkce

Poznámka 9.3 *Buď* $a \in \bar{\mathbb{R}}$ *hromadným bodem* $f \circ g$ *a*

i. $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b \in \bar{\mathbb{R}}$

ii. $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c \in \bar{\mathbb{R}}$

iii. $((\exists H^*_a)(\forall x \in H^*_a \cap D_g)(g(x) \neq b)) \vee (b \in D_f \wedge f(b) = c)$.

Potom $\lim\limits_{x \to a} f \circ g(x) = c$.

Poznámka 9.4 *Třetí bod v minulé větě je splněna např, pokud* g *je prostá nebo* f *spojitá.*

Příklad 9.19 *Vypočtěte limitu funkce*

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}).$$

Korektně odůvodněte použití věty o limitě složené funkce.
(Řešení: 0)
Postup řešení: Jelikož $\sin x-\sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$*, dostáváme*

$$\begin{aligned}\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x} &= 2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}\sqrt{x}}{2}\\ &= 2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}.\end{aligned}$$

Zároveň $|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}|\leq 1$ *a funkci tedy můžeme sevřít*

$$-2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\leq 2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}\sqrt{x}}{2}\leq 2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}.$$

Poslední krok je dokázat, že $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$*. Budeme chtít použít větu o limitě složené funkce. V jejím značení máme:*

$$\begin{aligned}f(x)&=\sin x,\\ g(x)&=\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})},\\ a&=+\infty,\\ b&=0,\\ c&=0.\end{aligned}$$

Abychom větu mohli použít musí platit jeden z výroků:

$$(\exists H_{+\infty})(\forall x\in H_{+\infty}\cap D_g)(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\neq 0)\ \textit{nebo}\ (0\in D_f\wedge\sin 0=0).$$

První výrok platí pro všechna okolí $+\infty$*, druhý výrok též platí. Můžeme tedy použít větu limitě o složené funkce a celkově*

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0.$$

Příklad 9.20 *Pomocí věty o limitě sevřené funkce vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}.$$

(Řešení: 0)
Postup řešení: Využijeme nerovnost $|\sin\frac{1}{x}|\leq 1$*, která platí pro všehna nenulová* x*. Pak*

$$0\leftarrow -x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq x\to 0.$$

Z věty o limitě sevřené funkce dostáváme $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

Příklad 9.21 (Referenční limity) *Na přednášce bylo odvozeno pomocí Heineho věty a věty o limitě složené funkce, že*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a),\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Dokažte poslední ze vztahů pomocí limity sevřené funkce.
(Nápověda: Pro $0\le x\le 1$ platí $(1+\frac{x}{n})^n \nearrow e^x$ a $(1+\frac{x}{n})^{n+1}\searrow e^x$.)
Postup řešení: Z nápovědy plyne nerovnost

$$1\le \lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}\le\frac{n+1}{n}, \forall n\in\mathbb{N}.$$

Vzhledem k libovolnosti n musí platit (lze ukázat sporem)

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Levostranná limita vyjde shodně, což je patrné např. ze vztahu $\frac{e^{-x}-1}{-x}=e^{-x}\frac{e^x-1}{x}$. Celkově

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

což jsme chtěli ukázat.

Příklad 9.22 *Na přednášce byla následující limita odvozena pomocí Heineho věty. Dokažte pomocí limity sevřené posloupnosti:*

$$\lim_{n\to+\infty}n(\sqrt[n]{e}-1)=1.$$

Postup řešení: Využijeme odhadů

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le e\le\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

platných pro libovolné $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Pak platí

$$n(\sqrt[n]{e}-1)\le n\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n}{n}}-1\right)=n\frac{1}{n-1}\to 1,$$
$$n(\sqrt[n]{e}-1)\ge n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n}}-1\right)=n\frac{1}{n}=1\to 1.$$

Celkově z věty o limitě sevřené posloupnosti dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty}n(\sqrt[n]{e}-1)=1.$$

9.5 Výpočet složitějších limit pomocí referenčních I

Příklad 9.23 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)},$$

kde α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

(Řešení: 5, $\frac{\alpha}{\beta}$*)*
Postup řešení:

S využitím referenčních limit a věty o limitě složené funkce dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}\cdot\frac{5}{5}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}=5,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}\cdot\frac{\alpha x}{\alpha x}\cdot\frac{\beta x}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\beta x)}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Příklad 9.24 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(nx)}{\sin(mx)},$$

kde n, $m \in \mathbb{N}$.

(Řešení: $(-1)^{n+m}\frac{n}{m}$*)*
Postup řešení:

S využitím součtových vzorců pro funkci sin,referenčních limit a věty o limitě složené funkce dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(nx)}{\sin(mx)}&=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(nx+n\pi-n\pi)}{\sin(mx+m\pi-m\pi)}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(n(x-\pi)+n\pi)}{\sin(m(x-\pi)+m\pi)}\\&=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(n(x-\pi)\cos(n\pi)+\cos(n(x-\pi))\sin(n\pi)}{\sin(m(x-\pi)\cos(m\pi)+\cos(m(x-\pi))\sin(m\pi)}\\&=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(n(x-\pi))}{\sin(m(x-\pi))}(-1)^{n-m}=(-1)^{n-m}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(n(x-\pi))}{\sin(m(x-\pi))}\cdot\frac{n(x-\pi)}{n(x-\pi)}\cdot\frac{m(x-\pi)}{m(x-\pi)}\\&=(-1)^{n+m}\frac{n}{m}.\end{aligned}$$

Příklad 9.25 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

(Řešení: 1)
Postup řešení: S využitím referenčních limit dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

Příklad 9.26 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Výsledek tohoto příkladu si zapamatujte.

(Řešení: $\frac{1}{2}$)
Postup řešení: Vhodným rozšířením a využitím referenční limity dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos^2 x}=\frac{1}{2}.$$

Příklad 9.27 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}.$$

(Nápověda: Využijte výsledku předchozího příkladu.)

(Řešení: $\frac{1}{2}$)
Postup řešení: Jednoduchými úpravami s využitím goniometrických vzorců dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)\cos x}=\frac{1}{2}.$$

Jiný postup: *S využitím předcházejících limit dostáváme*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin^3 x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin^3 x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Příklad 9.28 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

(Řešení: $\frac{2}{\pi}$)
Postup řešení: S využitím součtových vzorců pro cos a referenční limity dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)&=\lim_{x\to 1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)\cos\frac{\pi}{2}-\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)\sin\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}(x-1)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Příklad 9.29 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2-5x+1)}{x}.$$

(Řešení: -5)

Postup řešení:

S využitím referenční limity dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2-5x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2-5x+1)}{x} \cdot \frac{x^2-5x}{x^2-5x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2-5x+1)}{x^2-5x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2-5x}{x} = \lim_{x\to 0}(x-5) = -5.$$

Příklad 9.30 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}.$$

(Řešení: e^{-2})

Postup řešení: Vhodnou úpravou a využitím referenční limity dostáváme

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left((1-2x)^{\frac{1}{-2x}}\right)^{\frac{-2x}{x}} = e^{-2}.$$

10 Desátý týden

10.1 Heineho věta a jednostranné limity

Příklad 10.1 *S použitím Heineho věty vyvraťe existenci limity*

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Postup řešení: Vezměme posloupnosti $x_n = \frac{1}{\pi n}$ *a* $y_n = \frac{1}{\pi/2+2\pi n}$*. Pak dostáváme:*

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(\pi n) = 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1.$$

Platí $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ *a* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$*, ale zároveň* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(\pi n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} \sin(\pi/2+2\pi n)$ *a dle Heineho věty tedy limita* $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *neexistuje.*

Příklad 10.2 *Rozhodněte o existenci a konečnosti limity*

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}^2(x).$$

(Řešení: existuje, $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}^2(x) = 1$ *)*

Postup řešení:

Opět o existenci rozhodneme pomocí Heineho věty. Berme libovolnou posloupnost (x_n) *splňující* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ *a* $x_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$*. Pak*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sgn}^2 x_n = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1,$$

jelikož $\operatorname{sgn}^2 x = 1, \forall x \neq 0$*. Jelikož* $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{sgn}^2 x_n = 1$ *pro libovolnou posloupnost splňující* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ *a* $(\forall n \in \mathbb{N})\ \big(x_n \in D_{\operatorname{sgn}^2(x)} \setminus \{0\}\big)$ *pak z Heineho věty plyne, že* $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}^2 x = 1$.

Příklad 10.3 *Rozhodněte o existenci a konečnosti limity*

$$\lim_{x\to+\infty} \sin(\pi\sqrt{x}).$$

(Řešení: neexistuje)

Postup řešení:

Činíme předpoklad, že limita existovat nebude. Konstruujeme 2 posloupnosti $x_n = n^2$ *a* $y_n = \left(\sqrt{\pi}\frac{2\pi n+\pi/2}{\pi}\right)^2$*. Platí* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ *a* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$*. Pak*

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(\pi x_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin(\pi n) = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sin(\pi y_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1.$$

Limity se nerovnají a tedy z Heineho věty limita $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(\pi\sqrt{x})$ *neexistuje.*

Příklad 10.4 *Rozhodněte o existenci a konečnosti limity*

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{|x-2|}.$$

(Řešení: existuje, $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$ *)*

Postup řešení:

Tipujeme, že limita bude $+\infty$*. Dokážeme z definice nevlastní limity ve vlastním bodě, která je definována*

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall K > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 <| x-a |< \delta)(f(x) > K).$$

Máme tedy dokázat

$$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall K > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 <| x-2 |< \delta)\left(\frac{1}{| x-2 |} > K\right).$$

Nechť tedy $K > 0$*. Hledáme* $\delta > 0$ *takové, že pro* $0 <| x-2 |< \delta$ *tedy pro lib.* $x \in (2-\delta, 2+\delta) \setminus \{2\}$ *bude platit*

$$\frac{1}{| x-2 |} > K \Leftrightarrow \frac{1}{K} >| x-2 | .$$

Z předcházejícího plyne, že stačí volit $\delta \in \left(0, \frac{1}{K}\right)$*, např.* $\delta = \frac{1}{K+1}$*. Alternativně by šlo ukázat, že jednostranné limity se rovnají a vyjdou* $+\infty$*.*

Příklad 10.5 *Rozhodněte o existenci a konečnosti limity*

$$\lim_{x\to+\infty} (-1)^{\lfloor x\rfloor}.$$

(Řešení: neexistuje)

Postup řešení: Opět tipneme, že limita existovat nebude a volíme dvě posloupnosti $x_n = 2n$ *a* $y_n = 2n+1$*. Pak v případě první posloupnosti* $x_n = 2n$ *máme*

$$(-1)^{\lfloor x_n\rfloor} = (-1)^{\lfloor 2n\rfloor} = 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tedy

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{\lfloor x_n\rfloor} = 1.$$

Přičemž jsme splnili předpoklady Heineho věty, tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ *a* $x_n \neq +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$*.*

Podobně v případě druhé posloupnosti $y_n = 2n+1$ *máme* $(-1)^{\lfloor y_n\rfloor} = (-1)^{\lfloor 2n+1\rfloor} = -1, \forall n \in \mathbb{N}$*. Pak*

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{\lfloor y_n\rfloor} = -1.$$

Přičemž jsme splnili předpoklady Heineho věty $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ *a* $y_n \neq +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$*. Z Heineho věty tedy plyne, že limita neexistuje.*

Příklad 10.6 *Rozhodněte o existenci a konečnosti limity*

$$\lim_{x\to 0} f(x), \quad \textit{kde } f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x > 0 \\ x\cos\frac{1}{x} & x < 0. \end{cases}$$

(Řešení: exituje, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ *)*

Postup řešení:

Spočteme limitu zprava a zleva a ukážeme, že se rovnají. Platí

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} x\sin\frac{1}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} x\cos\frac{1}{x} = 0.$$

Limity zprava a zleva se rovnají a celkově tedy $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$*.*

10.2 Výpočet složitějších limit pomocí referenčních II

Příklad 10.7 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}.$$

(Řešení: 0)

Postup řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2} &= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}} \\ &= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)} \\ &= \mathrm{e}^{+\infty\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 0.\end{aligned}$$

V rovnosti 2 jsme využili větu o aritmetice limit (součin limit) a následně v rovnosti větu o limitě složené funkce, kde jsme využili $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

Příklad 10.8 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}.$$

(Řešení: e^3 *)*

Postup řešení:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{x^2}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2}{3}}\right)^{\frac{x^2-2}{3}}\right]^{\frac{3x^2}{x^2-2}}$$
$$= \mathrm{e}^3,$$

kde jsme využili $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2}{3} = +\infty$ *a* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2}{3}}\right)^{\frac{x^2-2}{3}} = \mathrm{e}.$

Příklad 10.9 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x^2-1}\right)^{\frac{3x+5}{x-1}}.$$

(Řešení: $\frac{1}{8}$ *)*
Postup řešení:

Postupujeme identicky jako v příkladě 10.7. Platí

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x^2-1}\right)^{\frac{3x+5}{x-1}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2+1}{2x^2-1}\right)^{\frac{3x+5}{x-1}}}$$
$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{x-1}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2+1}{2x^2-1}\right)}$$
$$= \mathrm{e}^{3\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$= \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{8}\right)}$$
$$= \frac{1}{8}.$$

Využili jsme větu o limitě složené funkce při výpočtu $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2+1}{2x^2-1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right).$

Příklad 10.10 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}.$$

(Řešení: $\frac{1}{5}$ *)*

Postup řešení: Úpravou logaritmů získáme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]}{\ln\left[x^{10}\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)\right]}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)+\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{10\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)}}{10+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)}{\ln(x)}}\\
&= \frac{2+0}{10+0}=\frac{1}{5},
\end{aligned}$$

kde jsme použili

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(x)} = \ln(1-0+0)\cdot 0 = 0.$$

Příklad 10.11 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to+\infty}\cos^x\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right),$$

kde $a\in\mathbb{R}$.

(Řešení: $\mathrm{e}^{\frac{-a^2}{2}}$ *)*

Postup řešení: Z definice obecné mocniny dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\cos^x\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right) &= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\cos\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)}\\
&= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\frac{\ln\left(1+\cos\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)-1\right)}{\cos\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)-1}\left(\cos\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)-1\right)}\\
&= \mathrm{e}^{\lim\limits_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\cos\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)-1\right)}\\
&= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\cos\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)-1\right)\frac{\cos\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)+1}{\cos\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)+1}}\\
&= \mathrm{e}^{1\cdot\lim\limits_{x\to+\infty} x\frac{-\sin^2\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)}{\cos\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)+1}\frac{a^2/x}{a^2/x}}\\
&= \mathrm{e}^{\frac{-a^2}{2}},
\end{aligned}$$

kde jsme využili referenčních limit $\lim\limits_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1$, $\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin(y)}{y}=1$ *a věty o limitě složené funkce.*

Příklad 10.12 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{\sin(e^x+4^x)}.$$

(Řešení: 1)
Postup řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{\sin(e^x+4^x)} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}\cdot e^x\frac{1}{\frac{\sin(e^x+4^x)}{e^x+4^x}}\frac{1}{e^x+4^x}\\ &= \lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{z\to0}\frac{\sin(z)}{z}}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+4^x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x}\frac{1}{1+\left(\frac{4}{e}\right)^x}=1,\end{aligned}$$

kde jsme použili stejné referenční limity jako v předchozím příkladě.

Příklad 10.13 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}$$

pro $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
(Řešení: α/β)
Postup řešení: Z definice obecné mocniny dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1} &= \lim_{x\to1}\frac{e^{\alpha\ln x}-1}{\alpha\ln x}\frac{\beta\ln x}{e^{\beta\ln x}-1}\frac{\alpha\ln x}{\beta\ln x}\\ &= \lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}\lim_{z\to0}\frac{z}{e^z-1}\lim_{x\to1}\frac{\alpha\ln(x)}{\beta\ln(x)}\\ &= \frac{\alpha}{\beta},\end{aligned}$$

kde jsme využili referenční limitu $\lim\limits_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}=1$.

Příklad 10.14 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin^2x}-e^x}{\sin(2x)}.$$

(Řešení: -1/2)

Postup řešení: Výraz převedeme na referenční limity. Pak

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 x}-e^x}{\sin(2x)} &= \lim_{x\to 0} e^x\frac{e^{\sin^2 x-x}-1}{\sin(2x)}\\
&= \lim_{x\to 0} e^x\frac{e^{\sin^2 x-x}-1}{\sin^2 x-x}\frac{2x}{\sin(2x)}\frac{\sin^2 x-x}{2x}\\
&= \lim_{x\to 0} e^x \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin(z)}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x}{2x}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}\frac{x}{x}-\frac{1}{2}\\
&= -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

kde jsme využili referenční limity $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1$ *a* $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin(z)}{z}=1$.

Příklad 10.15 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{x+3}\right)}{\ln\left(\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\sqrt{x+4}}\right)}.$$

(Řešení: 1)
Postup řešení: Obdobně jako u minulého příkladu převedeme výraz na známé referenční limity. Platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{x+3}\right)}{\ln\left(\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\sqrt{x+4}}\right)} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{x+3}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{x+3}}\frac{1}{\sqrt{x+4}\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)}\frac{\sqrt{x}}{x+3}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{x+3}\right)}{\frac{\sqrt{x}}{x+3}}\frac{1}{\sqrt{x+4}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)}{\frac{1}{x+1}}}(x+1)\frac{\sqrt{x}}{x+3}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+z)}{z}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}(x+1)}{(x+3)\sqrt{x+4}}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Příklad 10.16 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

(Řešení: -1)

Postup řešení:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x)x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}\cdot\lim_{y\to0}\frac{\sin(y)}{y}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sgn}(x)$$
$$=-1.$$

Příklad 10.17 *Dokažte*

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\qquad\lim_{x\to0^+}\frac{\arccos x-\frac{\pi}{2}}{x}=-1.$$

Postup řešení:

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin(y)}=1,$$

kde jsme použili substituci $x=\sin(y)$ *a referenční limitu. V druhém případě platí*

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\arccos x-\frac{\pi}{2}}{x}=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{y-\frac{\pi}{2}}{\cos(y)}$$
$$=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{y-\frac{\pi}{2}}{\cos(y+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})}$$
$$=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{y-\frac{\pi}{2}}{-\sin(y-\frac{\pi}{2})}$$
$$=\lim_{z\to0^-}\frac{z}{-\sin(z)}=-1,$$

kde jsme použili substituci $x=\cos y$.

Příklad 10.18 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x},\qquad\lim_{x\to+\infty}x\operatorname{arccotg}x.$$

(Řešení: 1,1)
Postup řešení:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\operatorname{tg}y}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin y}\cos y=1,$$

kde jsme použili substituci $x=\operatorname{tg}y$. *Dále*

$$\lim_{x\to+\infty}x\operatorname{arccotg}x=\lim_{y\to0}y\operatorname{cotg}y=\lim_{y\to0}y\frac{\cos y}{\sin y}=1.$$

V druhé rovnosti byla použita substituce $x=\operatorname{cotg}y$.

Příklad 10.19 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

(Řešení: e^{-1})

Postup řešení: Vhodnými úpravami převedeme limitu na tvar referenční limity. Platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} &= \lim_{x\to 1} (1-1+x)^{\frac{1}{1-x}} \\ &= \lim_{x\to 1} \left[(1+(-1+x))^{\frac{1}{-1+x}}\right]^{\frac{-1+x}{1-x}} \\ &= e^{-1},\end{aligned}$$

jelikož $\lim_{x\to 1} (1+(-1+x))^{\frac{1}{-1+x}} = e$.

Příklad 10.20 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0^+} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

(Řešení: 1)

Postup řešení: Ekvivalentními úpravami získáme

$$\lim_{x\to 0^+} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\arcsin x}{x} x\right)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} x^{\operatorname{tg} x}.$$

Zároveň $\lim_{x\to 0^+} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ *a*

$$x^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x \ln x} = e^{\frac{\operatorname{tg} x}{x} x \ln x}.$$

Protože $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ *a* $\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$ *je*

$$\lim_{x\to 0+} x^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1.$$

Celkově dostáváme

$$\lim_{x\to 0^+} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} x^{\operatorname{tg} x} = 1.$$

Příklad 10.21 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}.$$

(Řešení: $\sqrt{2}$)

Postup řešení: Pomocí substituce $x = \cos y$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{y\to 0_+} \frac{y}{\sqrt{1-\cos y}} \cdot \frac{\sqrt{1+\cos y}}{\sqrt{1+\cos y}} \\
&= \lim_{y\to 0_+} y \frac{\sqrt{1+\cos y}}{\sqrt{\sin^2 y}} \\
&= \lim_{y\to 0_+} y \frac{\sqrt{1+\cos y}}{|\sin y|} \\
&= \lim_{y\to 0_+} \operatorname{sgn}(\sin y) y \frac{\sqrt{1+\cos y}}{\sin y} \\
&= \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Příklad 10.22 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{\operatorname{tg}\sqrt{\sin x}} - 1}{\sin x}$$

(Řešení: $-2/\pi$)
Postup řešení: Výraz převedeme na známe referenční limity. Platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{\operatorname{tg}\sqrt{\sin x}} - 1}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{\pi}\arccos x - 1\right)}{\frac{2}{\pi}\arccos x - 1} \cdot \frac{e^{\operatorname{tg}\sqrt{\sin x}} - 1}{\operatorname{tg}\sqrt{\sin x}} \frac{\left(\frac{2}{\pi}\arccos x - 1\right)\operatorname{tg}\sqrt{\sin x}}{\sin(x)\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{2}{\pi}\left(\arccos x - \frac{\pi}{2}\right)}{x} \frac{\sqrt{x}\operatorname{tg}\sqrt{\sin x}}{\sin(x)} \\
&= -\frac{2}{\pi} \lim_{x\to 0_+} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sin x} \\
&= -\frac{2}{\pi},
\end{aligned}$$

kde jsme ve 3. rovnosti využili toho, že $\lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x} = -1$ *(viz. příklad 10.19).*

Příklad 10.23 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x - a},$$

kde $a \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
(Řešení: $\alpha a^{\alpha-1}$)

Postup řešení:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x-a} &= \lim_{x\to a} a^{\alpha-1}\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha-1}{\frac{x}{a}-1}\\
&= a^{\alpha-1}\lim_{y\to 1}\frac{(y)^\alpha-1}{y-1}\\
&= a^{\alpha-1}\lim_{y\to 1}\frac{e^{\alpha\ln(y)}-1}{y-1}\\
&= a^{\alpha-1}\lim_{y\to 1}\frac{e^{\alpha\ln(y)}-1}{\alpha\ln(y)}\frac{\alpha\ln(y)}{y-1}\\
&= a^{\alpha-1}\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}\lim_{v\to 0}\frac{\alpha\ln(v+1)}{v}\\
&= a^{\alpha-1}\alpha.
\end{aligned}
$$

Příklad 10.24 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b},$$

kde $a\in\mathbb{R}^+$, $a\neq 0$, $b\in\mathbb{R}$.
(Řešení: $a^b\ln(a)$*)*
Postup řešení:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b} &= a^b\lim_{x\to b}\frac{a^{x-b}-1}{x-b}\\
&= a^b\lim_{x\to b}\frac{e^{(x-b)\ln(a)}-1}{(x-b)\ln(a)}\ln(a)\\
&= a^b\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\ln(a)\\
&= a^b\ln(a).
\end{aligned}
$$

Příklad 10.25 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to a}\frac{\sinh x-\sinh a}{x-a},$$

kde $a\in\mathbb{R}$.
(Řešení: $\cosh(a)$*)*

Postup řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{\sinh x-\sinh a}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{e^x-e^{-x}-e^a+e^{-a}}{2(x-a)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{e^a\left(e^{x-a}-1\right)}{2(x-a)}+\frac{e^{-a}\left(e^{a-x}-1\right)}{2(a-x)}\\
&= e^a\lim_{y\to 0}\frac{(e^y-1)}{2y}+e^{-a}\lim_{z\to 0}\frac{(e^z-1)}{2z}\\
&= \frac{e^a+e^{-a}}{2}\\
&= \cosh(a).
\end{aligned}$$

10.3 Derivace funkce

Příklad 10.26 *Z definice spočítejte derivace následujících funkcí v libovolném bodě jejich definičního oboru.*

i. $f(x)=x^2-2x+5$

ii. $f(x)=x^n$, *kde* $n\in\mathbb{Z}$

(Řešení: i. $2x-2$, *ii.* $n\cdot x^{n-1}$*)*
Postup řešení: Definiční obor obou funkcí jsou všechna reálná čísla. Pro $x=0$ *jsou obě funkce nulové a jistě jejich derivace jsou v bodě* $x=0$ *také nulové. Tento bod jsme vyšetřili zvlášť, abychom případně nedělili nulou (bod ii.). Pro libovolné* $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *platí*

i.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-2(x+h)+5-x^2+2x-5}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} 2x+h-2\\
&= 2x-2,
\end{aligned}$$

ii. *(a)* $n=0$*:* $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}0=0.$

(b) $n > 0$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h \sum\limits_{k=0}^{n-1} (x+h)^k x^{n-k-1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1+k} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^k \\
&= x^{n-1} \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^k \\
&= n \cdot x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

(c) $n < 0$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{(x+h)^{-n}} - \frac{1}{x^{-n}} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{x^{-n} - (x+h)^{-n}}{(x+h)^{-n} x^{-n}} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{-h \sum\limits_{k=0}^{-n-1} (x+h)^k x^{-n-k-1}}{(x+h)^{-n} x^{-n}} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{-h x^{-n-1} \sum\limits_{k=0}^{-n-1} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^k}{(x+h)^{-n} x^{-n}} \right) \\
&= \frac{-x^{-n-1}(-n)}{x^{-2n}} \\
&= n x^{n-1}
\end{aligned}
$$

Celkově tedy můžeme psát pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ a $x \in \mathbb{R}$: $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Příklad 10.27 *Z definice spočítejte derivace následujících funkcí v libovolném bodě jejich definičního oboru.*

i. $f(x) = \cos x$

ii. $f(x) = \sin x$

(Řešení: i. $-\sin(x)$*, ii.* $\cos(x)$*)*
Postup řešení: Definiční obor funkcí je $\mathbb{R}$*. Pro libovolné* $x \in \mathbb{R}$ *dostáváme*

i.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\left(\cos(h)-1\right)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\sin(h)}{h}\\
&= \cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\left(\cos^2(h)-1\right)}{h(\cos(h)+1)} - \sin(x)\\
&= \frac{\cos(x)}{2}\lim_{h\to 0}\frac{\left(-\sin^2(h)\right)}{h^2}h - \sin(x)\\
&= 0-\sin(x) = -\sin(x).
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)-\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\left(\cos(h)-1\right)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\sin(h)}{h}\\
&= 0+\cos(x) = \cos(x).
\end{aligned}$$

Příklad 10.28 *Z definice spočítejte derivace následujících funkcí v libovolném bodě jejich definičního oboru.*

i. $f(x) = e^x$

ii. $f(x) = \ln x$ *(a poté odvoďte i vzorec pro* $(\log_a x)'$*).*

(Řešení: i. e^x*, ii.* $\frac{1}{x}, \frac{1}{x\ln(a)}$*)*
Postup řešení:

i. Definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R}$*. Pro libovolné* $x \in \mathbb{R}$ *dostáváme*

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} e^x\frac{e^h-1}{h}\\
&= e^x,
\end{aligned}$$

ii. Definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R}^+$. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}^+$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \frac{1}{x} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x},
\end{aligned}$$

Pro funkci $f(x) = \log_a x$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h)-\log_a(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \frac{1}{x} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\log_a(1+y)}{y} \frac{1}{x} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{\ln(a)y} \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x\ln(a)}.
\end{aligned}$$

Příklad 10.29 *Rozeberte vztah mezi existencí derivace a spojitostí. Na příkladě ukažte, že existence nevlastní derivace není postačující podmínka pro spojitost.*
Postup řešení: Vztah rozebereme v několika bodech větách. Pokud je funkce diferencovatelná v bodě x_0, je funkce v bodě x_0 spojitá. Předpoklad diferencovatelnosti nelze zeslabit na existenci derivace. Jako protipříklad lze vzít funkci $f(x) = \operatorname{sgn} x$, která není v 0 spojitá, ale má derivaci rovnu $+\infty$. Implikaci ve větě také nelze obrátit. Jako protipříklad lze vzít funkci $f(x) = |x|$, která je spojitá v 0, ale derivace v 0 neexistuje.

Příklad 10.30 *Dokažte, že je–li funkce f diferencovatelná v bodě x a $n \in \mathbb{N}$, potom*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right) = f'(x).$$

Vyplývá naopak z existence této limity existence derivace?
(Řešení: ne)
Postup řešení: Definujte funkci

$$g(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Pak pro limitu v 0 platí

$$\lim_{h\to 0} g(h) = f'(x) \in \mathbb{R},$$

kdy limita existuje z předpokladu diferencovatelnosti. Z Heineho věty pak plyne, že $\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = f'(x)$*, pro každou posloupnost* (x_n) *splňující* $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$*. Vezměme jako posloupnost* $x_n = \frac{1}{n}$*. Pak dostáváme*

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n\left(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right).$$

Existence dané limity ovšem není postačující podmínkou pro existenci derivace. Například $f(x) = |x|$ *nemá v nule derivace, ale zároveň daná limita posloupnosti existuje a rovná se*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(|\frac{1}{n}| - 0\right) = 1.$$

11 Jedenáctý týden

11.1 Výpočet derivací

Příklad 11.1 (Základní příklady) *Vypočtěte derivace následujících funkcí ve všech bodech, kde existují:*

i. $\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$

ii. $\sinh x$, $\cosh x$

iii. $\operatorname{tgh} x$, $\operatorname{cotgh} x$

iv. a^x, *kde* $a > 0$

v. x^α, *kde* $\alpha \in \mathbb{R}$.

vi. $\frac{2x}{1-x^2}$.

vii. $f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

viii. $f(x) = (1 + x - x^2)(1 - x + x^2)$.

ix. $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$

x. $f(x) = (1 + x)\sqrt{2 + x^2}\,\sqrt[3]{3 + x^3}$

(Řešení: i. $\frac{1}{\cos^2 x}$ *pro* $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $-\frac{1}{\sin^2 x}$ *pro* $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, *ii.* $\cosh x$, $\sinh x$ *pro* $x \in \mathbb{R}$, *iii.* $1 - \operatorname{tgh}^2 x$ *pro* $x \in \mathbb{R}$, $1 - \operatorname{cotgh}^2 x$ *pro* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *iv.* $a^x \ln a$ *pro* $x \in \mathbb{R}$, *v.* $\alpha x^{\alpha-1}$ *pro* $x > 0$, *vi.* $\frac{2(x^2+1)}{(1-x^2)^2}$ *pro* $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, *vii.* $f'(x) = \frac{2-4x}{(x^2-x+1)^2}$ *pro* $x \in \mathbb{R}$, *viii.* $f'(x) = -2x(2x^2 - 3x + 1)$ *pro* $x \in \mathbb{R}$, *ix.* $f'(x) = \frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$ *pro* $x \in \mathbb{R}$, *x.* $f'(x) = \frac{3x^5+2x^4+4x^3+8x^2+3x+6}{\sqrt{2+x^2}(3+x^3)^{2/3}}$ *pro* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt[3]{3}\}$, $f'(-\sqrt[3]{3}) = -\infty$ *)*
Postup řešení: Použitím derivací základních funkcí a vět o derivaci součtu, součinu a podílu se jednoduše získají derivace uvedené v řešení.

Příklad 11.2 *Spočítejte jednostranné derivace funkce* f *v bodě* a.

i. $f(x) = |5x|$, $a = 0$

ii. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, $a = 2$

(Řešení: i. $f'_+(0) = 5$, $f'_-(0) = -5$ *ii.* $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$ *)*
Postup řešení:

i. Z definice derivace získáme

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{5x}{x} = 5,$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} -\frac{5x}{x} = -5.$$

ii. *Jelikož*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \geq 2, \\ -x^2 + 3x - 2, & x \in (1, 2), \\ x^2 - 3x + 2, & x \leq 1, \end{cases}$$

pak
$f'_+(2) = (2x - 3)|_{x=2} = 1,$
$f'_-(2) = (-2x + 3)|_{x=2} = -1.$

Příklad 11.3 *Vyslovte* ***Darbouxovu větu*** *a na příkladě funkce* sgn *ukažte, že požadavek spojitosti nelze vypustit.*
Postup řešení:
Darbouxovu věta *: Nechť pro funkci f a bod $a \in D_f$ platí*

i. *f je v a spojitá zprava,*

ii. *f je direfencovatelná na nějakém pravém okolí bodu a,*

iii. *existuje $\lim\limits_{x \to a+} f'(x)$.*

Potom f má v a derivaci zprava a $f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a+} f'(x)$. Obdobná věta lze vyslovit na levostrannou derivaci.

Požadavek spojitosti nelze vypustit. Mějme například $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ a vyšetřeme derivaci v bodě $x = 0$. Přímo z definice derivace získáme

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0. \end{cases}$$

Použitím Darbouxovy věty bychom dostaly hodnoty

i. $\lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0+} 0 = 0,$

ii. $\lim\limits_{x \to 0-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0-} 0 = 0.$

Tímto způsobem by tedy vyšla derivace v nule jako 0, což víme, že není pravda. Darbouxova věta opravdu nelze použít.

Příklad 11.4 *Rozhodněte o existenci derivace následujících funkcí v bodě $x = 0$. V kladném případě tuto derivaci vypočtěte.*

i. $f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

iii. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

(Řešení: i. neexistuje ii. $f'(0) = 0$ iii. $f'(0) = 0$)

Postup řešení:

i. $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x \sin(1/x) - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \sin(1/x)$. *Tato limita neexistuje.*

ii. $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(1/x) - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0.$

iii. pomocí Darbouxovy věty. Nejprve ověříme předpoklady: 1. spojitá - ano, 2. $f'(x) = e^{-1/x^2} \frac{-2}{x^3}$, *3.* $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$ *jelikož*

$$\lim_{x \to 0} e^{1/x^2} (x^2)^{3/2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x^2}}{(1/x^2)^{3/2}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y^{3/2}} = +\infty,$$

kde v posledním rovnítku jsme využili Heineho větu a znalosti limit posloupností. Lze tedy použít Darbouxovu větu a platí $f'(0) = 0$.

Příklad 11.5 *Pomocí věty o derivaci inverzní funkce vypočtěte derivaci následujících funkcí*

i. $f(x) = \ln x$,

ii. $f(x) = \sqrt[n]{x}$, *kde* $n \in \mathbb{N}$.

(Řešení: i. $f'(x) = \frac{1}{x}$ *pro* $x > 0$ *ii.* $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}}$ *pro* $x > 0$, $f'(0) = 1$ *pro* $n = 1$, $f'(0) = +\infty$ *pro* $n > 1$ *)*

Postup řešení: Věta o derivaci inverzní funkce nám říká. Nechť je funkce f spojitá a ryze monotónní na nějakém okolí bodu a, nechť $b = f(a)$. Jestliže je f diferencovatelná v bodě a a navíc $f'(a) \neq 0$, pak je i příslušná inverzní funkce f^{-1} diferencovatelná v bodě b platí

$$[f^{-1}(b)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Pak tedy pro $x > 0$ *platí*

i. $f^{-1}(x) = \ln x$, $f(x) = e^x \implies (\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$

ii. $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$, $f(x) = x^n \implies (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}}$. *Musíme si dát pozor na bod* $x = 0$. *Zde musíme použít Darbouxovu věta: 1. funkce je spojitá 2. diferencovatelná, 3. limita:*

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ +\infty, & n > 1. \end{cases}$$

Tedy $f'(0) = 1$ *pro* $n = 1$ *a* $f'(0) = +\infty$ *pro* $n > 1$.

Příklad 11.6 *Pomocí věty o derivaci inverzní funkce vypočtěte derivaci následujících funkcí*

i. $f(x) = \arcsin x$,

ii. $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

(Řešení: i. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *pro* $x \in (-1,1)$, $f'(-1) = f'(1) = +\infty$ *ii.* $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *pro* $x \in \mathbb{R}$ *)*
Postup řešení:

i. $f^{-1}(x) = \arcsin x,\ f(x) = \sin x :$

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

pro $x \in (-1,1)$. *Krajní body opět pomocí Darbouxovy věty. Například pro* $x = 1$, *máme spojitost, diferencovatelnost,* $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x) = +\infty \implies f'(1) = +\infty$. *V* -1 *obdobným způsobem zjistíme* $f'(-1) = +\infty$.

ii. $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x,\ f(x) = \operatorname{tg} x :$

$$\begin{aligned}(\operatorname{arctg} x)' &= \cos^2(\operatorname{arctg} x)\\ &= \frac{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}{\sin^2(\operatorname{arctg} x) + \cos^2(\operatorname{arctg} x)}\\ &= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}\\ &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 11.7 *Pomocí věty o derivaci inverzní funkce vypočtěte derivaci následujících funkcí*

i. $f(x) = \arg\sinh x$,

ii. $f(x) = \arg\operatorname{tgh} x$.

(Řešení: i. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pro $x \in \mathbb{R}$ ii. $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ pro $x \in (-1, 1)$)

Postup řešení:

i) $f(x) = \sinh x := y$. $J = \mathbb{R}$, $D_f = \mathbb{R}, H_f = \mathbb{R}$. *Předpoklady:* f *je spojitá na* J, *prostá na* J *a* $(\forall x \in J)(f'(x) = \cosh x \neq 0)$. *Pak* $g(y) = f^{-1}(y) = x = \arg\sinh y$ *a pro derivaci platí*

$$\begin{aligned}\left[(\arg\sinh(y))'\right] = g'(y) = \left(f_J^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\cosh\left(\arg\sinh y\right)}\\ = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2\left(\arg\sinh y\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.\end{aligned}$$

ii) $f(x) = \operatorname{tgh} x := y$. $J = \mathbb{R}$, $D_f = \mathbb{R}, H_f = (-1, 1)$. *Předpoklady:* f *je spojitá na* J, *prostá na* J *a* $(\forall x \in J)(f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} \neq 0)$. *Pak* $g(y) = f^{-1}(y) = x = \arg\operatorname{tgh} y$

$$\begin{aligned}g'(y) = (\arg\operatorname{tgh}(y))' = \left(f_J^{-1}(y)\right)' = \left(f_J^{-1}(f(x))\right)' = \frac{1}{f'(x)} = \cosh^2 x = \cosh\left(\arg\operatorname{tgh} y\right)\\ = \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2\left(\arg\operatorname{tgh} y\right)} = \frac{1}{1-y^2},\end{aligned}$$

kde jsme využili

$$1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x \Leftrightarrow \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \operatorname{tgh}^2 x \Rightarrow \cosh^2 x = \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2 x}.$$

Příklad 11.8 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

(Řešení: $f'(x) = \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ *pro* $x > 0$, $f'(0) = +\infty$ *)*

Postup řešení:

Definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R}_0^+ \implies$ *krajní bod* $x = 0$ *budeme muset vyšetřit zvlášť. Pro nenulové* x *můžeme použít vzorečky a dostáváme*

$$f'(x) = \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$$

V bodě $x = 0$ *podle Darbouxovy věty (předpoklady jsou splněny) máme* $f'(0) = +\infty$.

Příklad 11.9 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 |x|}.$$

(Řešení: $f'(x) = \frac{\sin^2 x - 2}{\sin^3 x}$ pro $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$)
Postup řešení: Definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. Pak

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{\sin^2 x}, \text{ pro } x > 0, \\ \frac{\cos x}{\sin^2(-x)} = \frac{\cos x}{\sin^2 x}, \text{ pro } x < 0, \end{cases}$$

kde jsme využili lichost funkce sin. *Pak pomocí vzorečků dostáváme*

$$f'(x) = \frac{\sin^2 x - 2}{\sin^3 x}$$

pro $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, takže $D_{f'} = D_f$ a nejsou žádné problémové body v nichž by bylo potřeba derivaci dopočítat.

Příklad 11.10 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}.$$

(Řešení: $f'(x) = -2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \frac{\ln(2) x^{-2}}{\cos^2 \frac{1}{x}}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}} | k \in \mathbb{Z}\}$)
Postup řešení: Definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; \frac{1}{(2k+1)\frac{\pi}{2}} | k \in \mathbb{Z}\}$. Funkci můžeme přepsat na tvar

$$f(x) = e^{\ln(2) \operatorname{tg} \frac{1}{x}}.$$

Pak pro $x \in D_f$ platí

$$f'(x) = e^{\ln(2) \operatorname{tg} \frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot (-1) \cdot x^{-2} = -\ln(2) 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}} \frac{x^2}{\cos^2 \frac{1}{x}}.$$

Dále platí $D_{f'} = D_f$.

Příklad 11.11 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \ln(\ln(\ln x)).$$

(Řešení: $f'(x) = \frac{1}{\ln \ln x} \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x}$ pro $x > e$)
Postup řešení: Definiční obor funkce je $D_f = (e, +\infty)$. Dle vzorce pro derivace složené funkce pro $x > e$ dostáváme

$$f'(x) = \frac{1}{\ln \ln x} \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x}.$$

Dále platí $D_{f'} = D_f$.

Příklad 11.12 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \ln \ln(\sin x).$$

(Řešení: neexistuje)
Postup řešení: Definiční obor funkce je $D_f = \emptyset$, protože $\ln(\sin x) \leq 0$. Derivace tedy neexistuje v žádném bodě.

Příklad 11.13 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = |x+2|e^{-\frac{1}{x}}.$$

(Řešení: $f'(x) = e^{-1/x}\left(1+\frac{x+2}{x^2}\right)$ pro $x \in (-2,+\infty) \setminus \{0\}$, $f'(x) = -e^{-1/x}\left(1+\frac{x+2}{x^2}\right)$ pro $x \in (-\infty,-2)$)

Postup řešení: Definiční obor funkce je roven $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jelikož

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)e^{-1/x}, & \text{pro } x \in (-2,+\infty) \setminus \{0\}, \\ -(x+2)e^{-1/x}, & \text{pro } x \in (-\infty,-2\rangle, \end{cases}$$

máme

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-1/x} + (x+2)e^{-1/x}\frac{1}{x^2}, & \text{pro } x \in (-2,+\infty) \setminus \{0\}, \\ -e^{-1/x} - (x+2)e^{-1/x}\frac{1}{x^2}, & \text{pro } x \in (-\infty,-2). \end{cases}$$

Zbývá bod $x=-2$. Z Darbouxovy věty dostáváme, že $f'_+(-2) = e^{1/2}$ a $f'_-(-2) = -e^{1/2}$. Derivace v bodě -2 tedy neexistuje. Dále $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0,-2\}$.

Příklad 11.14 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \log_a^3(x^2)$$

pro $a > 0$, $a \neq 0$.

(Řešení: $f'(x) = \frac{6\ln^2(x^2)}{x\ln^3(a)}$ pro $x \neq 0$)

Postup řešení: Definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dále funkci lze přepsat na $f(x) = \left(\frac{\ln(x^2)}{\ln(a)}\right)^3$. Pak pro $x \in D_f$ platí

$$f'(x) = \frac{1}{\ln^3(a)} \cdot 3 \cdot \ln^2(x^2) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{6\ln^2(x^2)}{x\ln^3(a)}.$$

Dále $D_{f'} = D_f$.

Příklad 11.15 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}.$$

(Řešení: $f'(x) = -\frac{1}{\cos x}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$)

Postup řešení: Z podmínek $\sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $\sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ a $(1-\sin x)(1+\sin x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-\sin^2 x \geq 0 \Leftrightarrow \cos^2 x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ dostáváme definiční obor $D_f = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$. Pak pro $x \in D_f$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^{-1/2} \cdot \frac{(-\cos x)(1+\sin x) - (1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \cdot \frac{(-\cos x)(1+\sin x+1-\sin x)}{(1+\sin x)^2} \\ &= \frac{-\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\cos^2 x} \\ &= -\frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

Dále $D_{f'} = D_f$.

Příklad 11.16 *[!]*
Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech definičního oboru $D_f = \mathbb{R}^+$*, ve kterých existuje:*

$$f(x) = x^x.$$

(Řešení: $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$ *pro* $x \in \mathbb{R}^+$ *)*
Postup řešení: Funkce f *lze přepsat na* $f(x) = e^{x \ln x} \implies D_f = \mathbb{R}^+$*. Pak pro* $x \in D_f$ *platí*

$$f'(x) = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

Dále platí $D_f = D_{f'}$.

Příklad 11.17 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech definičního oboru* $D_f = \mathbb{R}^+$*, ve kterých existuje:*

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

(Řešení: $x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$ *pro* $x \in \mathbb{R}^+$ *)*
Postup řešení: Definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R}^+$*, funkce lze zároveň přepsat na* $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}$*. Pak pro* $x \in D_f$ *platí*

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \left((-1)x^{-2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}(1 - \ln x).$$

Dále $D_{f'} = D_f$.

Příklad 11.18 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \log_x e.$$

(Řešení: $f'(x) = -\frac{1}{\ln^2 x}\frac{1}{x}$ *pro* $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$*)*
Postup řešení: Funkci lze přepsat na $f(x) = \frac{\ln e}{\ln x} = \frac{1}{\ln x}$*. Definiční obor funkce je tedy* $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$*. Pro* $x \in D_f$ *pak platí*

$$f'(x) = -\frac{1}{\ln^2 x}\frac{1}{x}.$$

Dále $D_{f'} = D_f$.

Příklad 11.19 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1 - x}{\sqrt{2}}\right).$$

(Řešení: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ pro $x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$, $f'(1-\sqrt{2}) = f'(1+\sqrt{2}) = +\infty$)
Postup řešení: Pro definiční obor platí

$$\left|\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right| \leq 1 \Leftrightarrow x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}].$$

Pak pro $x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ máme:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1-x}{\sqrt{2}})^2}}\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Derivace v krajních bodech dle Darbouxovy věty. Předpoklady na spojitost a diferencovatelnost jsou splněny. Pro bod $x = 1+\sqrt{2}$ platí

$$\lim_{x\to(1+\sqrt{2})-} \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \lim \frac{1}{\sqrt{-(x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2}))}} = +\infty.$$

A tedy $f'(1+\sqrt{2}) = +\infty$. Derivace v druhém bodě vyjde stejně, platí $f'(1-\sqrt{2}) = +\infty$.

Příklad 11.20 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

(Řešení: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$)
Postup řešení: Definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pak pro $x \in D_f$ platí

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2} \cdot \frac{1-x+1-x}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{2}{1-2x+x^2+1+2x+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Zároveň platí $D_{f'} = D_f$.

Příklad 11.21 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \frac{1}{\arccos^2(x^2)}.$$

(Řešení: $f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}\arccos^3(x^2)}$ pro $x \in (-1, 1)$)
Postup řešení: Definiční obor funkce je roven $D_f = (-1, 1)$. Krajní body se z definičního oboru musí vyloučit, protože $\arccos(1) = 0$. Pak pro $x \in D_f$ platí

$$f'(x) = (-2)\cdot\arccos^{-3}(x^2)\cdot(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\cdot 2x = \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}\arccos^3(x^2)}.$$

Dále $D_{f'} = D_f$.

Příklad 11.22 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.$$

(Řešení: $f'(x) = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2(1-x^3)^4}}$ pro $x \neq \pm 1$, $f'(-1) = +\infty$)

Postup řešení: Definiční obor funkce je roven $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pak pro $x \in D_f \setminus \{-1\}$ platí

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{3x^2(1-x^3)-(1+x^3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2x^2}{(1-x^3)^2}$$
$$= \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2(1-x^3)^4}}.$$

Bod $x = -1$ vyřešíme pomocí Darbouxovy věty. Předpoklady jsou splněny a platí

$$\lim_{x\to -1} f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1+1)^2}} \cdot \lim_{x\to -1} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}} = 2 \cdot 2^{-\frac{4}{3}} \cdot \lim_{x\to -1} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}} = +\infty.$$

Tedy $f'(-1) = +\infty$.

Příklad 11.23 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

(Řešení: $f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$ pro $x \geq 0$)

Postup řešení: Definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R}_0^+$. Pro $x > 0$ máme

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}.$$

Pro bod $x = 0$ můžeme použít Darbouxovu větu a platí $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = 0$.

Příklad 11.24 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = x + \sqrt{1-x^2} \arccos x.$$

(Řešení: $f'(x) = \frac{-x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1,1)$, $f'(1) = -1$, $f'(-1) = +\infty$)

Postup řešení: $D_f = \langle -1, 1\rangle$. Pro $x \in (-1,1)$ máme

$$f'(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x = \frac{-x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

V krajních bodech opět využijeme Darbouxovu větu. Pro $x = 1$ máme

$$\lim_{x\to 1-} \frac{-x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{u\to 0+} \frac{-\cos(u) u}{\sqrt{1-\cos^2 u}} = \lim_{u\to 0+} \frac{-\cos(u) u}{|\sin u|} = -1 = f'(1).$$

Pro $x = -1$ máme

$$\lim_{x\to -1+} \frac{-x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty = f'(-1).$$

Příklad 11.25 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1}{\cosh x}\right).$$

(Řešení: $f'(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{\cosh x}$ pro $x \neq 0$)
Postup řešení: Nejprve vyšetříme definiční obor funkce. Jelikož $-1 \leq \frac{1}{\cosh x} \leq 1 \wedge \cosh x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *je definiční obor funkce roven* $D_f = \mathbb{R}$*. Pro* $x \neq 0$ *dostáváme*

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2 x}}} \cdot (-1) \cdot \cosh^{-2} \sinh x = \frac{\sinh x}{\cosh^2 x \sqrt{\frac{\cosh^2 x - 1}{\cosh^2 x}}} = (*).$$

Protože $\sqrt{\cosh^2 x - 1} = \sqrt{\sinh^2 x} = |\sinh x|, \cosh x > 0$ *dostáváme*

$$(*) = \frac{\sinh x}{\cosh^2 x \cdot \frac{|\sinh x|}{\cosh x}} = \frac{\operatorname{sgn}(\sinh x)}{\cosh x} = \frac{\operatorname{sgn} x}{\cosh x}.$$

Problematický bod $x = 0$ *vyšetříme pomocí Darbouxovy věty. Předpoklady jsou splněny a zároveň*

$$\lim_{x \to 0+} \lim_{x \to 0+} \frac{\operatorname{sgn}(x)}{\cosh x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\cosh x} = 1,$$
$$\lim_{x \to 0-} \frac{\operatorname{sgn}(x)}{\cosh x} = -1.$$

Derivace v $x = 0$ *tedy neexistuje.*

Příklad 11.26 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = |\operatorname{arctg} x| - |x|.$$

(Řešení: $f'(x) = -\operatorname{sgn}(x)\frac{x^2}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$)
Postup řešení: Definiční obor funkce je roven $D_f = \mathbb{R}$*. Zároveň Funkci můžeme přepsat na tvar*

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sgn}(\operatorname{arctg} x) \cdot \operatorname{arctg} x - \operatorname{sgn}(x) \cdot x \\ &= \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{arctg} x - \operatorname{sgn}(x) \cdot x \\ &= \operatorname{sgn}(x) \cdot (\operatorname{arctg} x - x). \end{aligned}$$

Poté pro $x \neq 0$ *platí*

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot (\frac{1}{1+x^2} - 1) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{1 - 1 - x^2}{1+x^2} = -\operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Problematický bod $x = 0$ *vyšetříme pomocí Darbouxovy věty. Předpoklady jsou splněny a pro limity platí*

$$\lim_{x \to 0+} (-1) \cdot \frac{x^2}{1+x^2} = 0,$$
$$\lim_{x \to 0-} (-1)^2 \cdot \frac{x^2}{1+x^2} = 0.$$

Derivace v $x = 0$ *existuje a* $f'(0) = 0$*.* $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$.

Příklad 11.27 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

(Řešení: $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \cdot \operatorname{sgn}(1+x) \cdot \operatorname{sgn}(1-x)$ *pro* $x \neq \pm 1$ *)*
Postup řešení: Vyšetříme nejprve definiční obor. Omezující podmínky jsou

$$\begin{aligned}-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 &\Leftrightarrow -(1+x^2) \leq 2x \leq 1+x^2\\ &\Leftrightarrow -(1+2x+x^2) \leq 0 \leq 1-2x+x^2\\ &\Leftrightarrow -(1+x)^2 \leq 0 \leq (1-x)^2,\end{aligned}$$

což platí pro $\forall x \in \mathbb{R}$. *Tedy* $D_f = \mathbb{R}$. *Pro* $x \neq \pm 1$ *máme*

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2+2x^2-4x^2)}{(1+x^2)^2}\\ &= \frac{1+x^2}{\sqrt{1-2x^2+x^4}} \cdot \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\\ &= \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{1}{(1+x^2)}\\ &= \frac{2}{1+x^2} \operatorname{sgn}(1-x^2).\end{aligned}$$

Pro $x = \pm 1$ *využijeme Darbouxovu větu. Předpoklady Darbouxovy věty jsou splněny a tedy*

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{2}{1+x^2} \operatorname{sgn}(1-x^2) = \begin{cases} -1, & pro\ x \to 1^+,\\ 1, & pro\ x \to 1^-,\end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1^{\pm}} \frac{2}{1+x^2} \operatorname{sgn}(1-x^2) = \begin{cases} 1, & pro\ x \to -1^+,\\ -1, & pro\ x \to -1^-.\end{cases}$$

Celkově dostáváme z Darbouxovy věty, že derivace v bodech $x = \pm 1$ *neexistují a tedy* $D_{f'} = D_f \setminus \{\pm 1\}$.

Příklad 11.28 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-\frac{1}{x}} & pro\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\\ 0 & pro\ x = 0\end{cases}$$

(Řešení: $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2+x-1}{x^2}$ *pro* $x \neq 0$ *)*

Postup řešení:

Pro $x \neq 0$ dostáváme

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{x}} + (x-1) \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot (-1)^2 \cdot x^{-2} = e^{-\frac{1}{x}}(1 + \frac{x-1}{x^2}) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2+x-1}{x^2}.$$

Problematický bod $x = 0$ vyšetříme přímo z definice. Platí

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h-1)e^{-\frac{1}{h}}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{-\frac{1}{h}} \left(1 - \frac{1}{h}\right).$$

Nyní pomocí jednostranných limit ukážeme, že tato limita neexistuje

$$\lim_{h\to 0+} e^{-\frac{1}{h}} \left(1 - \frac{1}{h}\right) = \lim_{x\to +\infty} e^{-x}(1-x) = 0,$$
$$\lim_{h\to 0-} e^{-\frac{1}{h}} \left(1 - \frac{1}{h}\right) = \lim_{x\to +\infty} e^{x}(1+x) = +\infty.$$

Derivace v nule tedy neexistuje.

Poznámka 11.1 *U minulého příkladu nelze použít na vyšetření derivace v nule Darbouxovu větu, jelikož funkce v nule není spojitá zleva!*

Příklad 11.29 *Uveďte seznam bodů, ve kterých funkce*

$$f(x) = \max\{\min\{x, 1\}, 0\}$$

nemá derivaci. Svou odpověď řádně zdůvodněte.

(Řešení: $x \in \{0, 1\}$)

Postup řešení: Jelikož

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x \geq 1, \\ x, & \text{pro } x \in (0,1), \\ 0, & \text{pro } x \leq 0, \end{cases}$$

jsou jediné problematické body $x = 0$ a $x = 1$. V ostatních bodech platí

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x > 1, \\ 1, & \text{pro } x \in (0,1), \\ 0, & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Z Darbouxovy věty (předpoklady jsou splněny) pak dostáváme

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} f'(x) = 0,$$
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = 1,$$
$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-} f'(x) = 1,$$
$$f'_+(1) = \lim_{x\to 0+} f'(x) = 0.$$

A tedy v těchto bodech derivace neexistuje.

Příklad 11.30 *[!] Dokažte tzv.* ***Leibnitzovu formuli*** *pro $n \geq 2$ (pro $n = 1$ byla odvezena na přednášce),*

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x) g^{(n-i)}(x).$$

Postup řešení: Budeme postupovat matematickou indukcí. Pro $n = 1$ máme dokázáno z přednášky, nás teď čeká přechod od n k $n+1$, tj. předpokládáme zadání (IP) a chceme ukázat

$$(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f^{(i)}(x) g^{(n+1-i)}(x).$$

Upravujeme

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)}(x) &= \left((fg)^{(n)}\right)'(x) \\
&\overset{(IP)}{=} \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x) g^{(n-i)}(x)\right]' \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left[f^{(i)}(x) g^{(n-i)}(x)\right]' \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left[f^{(i+1)}(x) g^{(n-i)}(x) + f^{(i)}(x) g^{(n+1-i)}(x)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i+1)}(x) g^{(n-i)}(x) + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x) g^{(n+1-i)}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} f^{(i)}(x) g^{(n+1-i)}(x) + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x) g^{(n+1-i)}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}\right] f^{(i)}(x) g^{(n+1-i)}(x) + \binom{n}{n} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) + \binom{n}{0} f^{(0)}(x) g^{(n+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} f^{(i)}(x) g^{(n+1-i)}(x) + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)}(x) g(x) + \binom{n+1}{0} f(x) g^{(n+1)}(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f^{(i)}(x) g^{(n+1-i)}(x),
\end{aligned}$$

což je to, co jsme chtěli. Během úprav jsme přitom využili vlastností kombinačních čísel (především Pascalova trojúhelníku).

12 Dvanáctý týden

12.1 Geometrická interpretace derivace

Příklad 12.1 *Nalezněte rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě a pro*

i. $f(x) = \sin x, \quad a = \frac{\pi}{3}$,

ii. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad a = 2.$

(Řešení: i. $y(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$, ii. $y(x) = -\frac{2}{9}(x-2) - \frac{1}{3}$)
Postup řešení: Rovnici tečny ke grafu funkce bodě a má rovnici $y_a(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$. Pak tedy

i. $y(x) = \cos\frac{\pi}{3}(x - \frac{\pi}{3}) + \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$,

ii. $y(x) = \left(\frac{-2}{(1+x)^2}\right)|_{x=2}(x-2) - \frac{1}{3} = -\frac{2}{9}(x-2) - \frac{1}{3}$.

Příklad 12.2 *Nalezněte tečnu ke grafu funkce $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ v bodě a, kde $a = -1$, $a = 2$, $a = 3$.*
(Řešení: i. $y(x) = \sqrt[3]{4}(x+1)$, ii. $y(x) = 3$, iii. $x = 3$)
Postup řešení: Spočteme nejprve derivaci funkce. Pro $x \neq -3$ dostáváme

$$f'(x) = \sqrt[3]{3-x} + (x+1)\frac{1}{3}\frac{-1}{(3-x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{3 - x - \frac{1}{3}(x+1)}{(3-x)^{2/3}} = \frac{4}{3}\frac{2-x}{(3-x)^{2/3}}.$$

Pomocí Darbouxovy věty zjistíme, že $f'(3) = -\infty$. Pak tedy pro jednotlivé případy:

i. $a = -1 : f'(-1) = \sqrt[3]{4}$, $y(x) = \sqrt[3]{4}(x-1) + f(-1) = \sqrt[3]{4}(x+1)$,

ii. $a = 2 : f'(2) = 0$, $y(x) = f(2) = 3$ *(v $x = 2$ je extrém),*

iii. $a = 3$: *jelikož* $f'(3) = +\infty$ *dostáváme svislou tečnu* $x = 3$.

Příklad 12.3 *Nalezněte tečnu ke grafu funkce f^{-1} v bodě nula, platí-li $f(x) = e^x \ln x$.*
(Řešení: $y(x) = \frac{x}{e} + 1$)
Postup řešení: Tečnu hledáme ve tvaru

$$y(x) = (f^{-1})'(0)(x-0) + f^{-1}(0).$$

Z definice funkce f je patrné, že $f^{-1}(0) = 1$. Zároveň

$$f'(x) = \frac{e^x}{x}(x \ln x + 1)$$

a z věty o derivaci inverzní funkce dostáváme

$$[f^{-1}]'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{e(0+1)} = \frac{1}{e}.$$

Celkově tedy tečna má rovnici

$$y(x) = \frac{x}{e} + 1.$$

Příklad 12.4 *Nalezněte všechny asymptoty následující funkce:*

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} + \frac{1}{|x|} + 1\right).$$

(Řešení: $y_1(x) = 2x$, $y_2(x) = 0$, $x = 0$)
Postup řešení: Protože $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, je přímka $x = 0$ svislou asymtotou. Žádná jiná svislá asymptota neexistuje. Pro nesvislou asymptotu $y = kx + q$ v $+\infty$ máme:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{xe^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}})}{x} = 2,$$

pak

$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} 2x + \ln(1 + \frac{1}{xe^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}}) - 2x = 0.$$

Tedy přímka $y = 2x$ je asymptotou. Pro bod $-\infty$ dostáváme

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(e^{2x} + \frac{1}{|x|} + 1)}{x} = 0,$$
$$q = \lim_{x\to-\infty} \ln(e^{2x} + \frac{1}{|x|} + 1) - 0 = 0.$$

Asymptota pro $-\infty$ má proto tvar $y = 0$.

Příklad 12.5 *Nalezněte všechny asymptoty následující funkce:*

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} + x.$$

(Řešení: $y(x) = x + 1$, $x = 0$)
Postup řešení: Jelikož $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, máme svislou asymptotu $x = 0$. Pro klasické asymptoty postupně dostáváme

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x} + x}{x} = 1,$$
$$q_1 = \lim_{x\to+\infty} e^{1/x} + x - x = 1,$$
$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{1/x} + x}{x} = 1,$$
$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} e^{1/x} + x - x = 1.$$

Máme tak asymptotu $y = x + 1$ jak pro $-\infty$ tak pro $+\infty$.

Příklad 12.6 *Nalezněte všechny asymptoty následující funkce:*

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} + \sin x.$$

(Řešení: $x = 0$)
Postup řešení: Jelikož $\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty$, máme asymptotu $x = 0$. Pak dostáváme

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} + \frac{\sin x}{x} = 1,$$
$$q_1 = \lim_{x \to +\infty} \sin x - \frac{1}{x} \ldots \textit{ neexistuje},$$
$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} + \frac{\sin x}{x} = 1,$$
$$q_1 = \lim_{x \to -\infty} \sin x - \frac{1}{x} \ldots \textit{ neexistuje}.$$

Klasické asymptoty tedy neexistují!

Příklad 12.7 *Pod jakým úhlem se protínají křivky $y = x^2$ a $x = y^2$?*
(Řešení: v bodě $[0; 0]$ pod úhlem $\varphi = \frac{\pi}{2}$, v bodě $[1; 1]$ pod úhlem $\varphi = \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$)
Postup řešení: Označme $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sqrt{x}$. Grafy těchto dvou funkcí se protínají ve dvou bodech: $[0; 0]$ a $[1; 1]$. Jelikož $f'(x) = 2x$ a $g'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$ je $f'(0) = 0$ a $g'(0) = +\infty$ (Darbouxova věta). Z geometrické interpretace derivace víme, že derivace je tangens směrového úhlu, přímky se tedy protínají pod úhlem $\varphi = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$. Obdobně v bodě $[1; 1]$ je protínají pod úhlem $\varpi = \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1/2$, protože $f'(1) = 2$ a $g'(1) = \frac{1}{2}$

Příklad 12.8 *Nalezněte funkci diferencovatelnou na svém definičním oboru, která je omezená a současně její derivace je neomezená.*
(Řešení: například $f(x) = \sin(1/x)$, $D_f = (0, +\infty)$)
Postup řešení: Například funkce $f(x) = \sin(1/x)$, $D_f = (0, +\infty)$, protože

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{-1}{x^2},$$

což je neomezená funkce.

12.2 Spojitost, body nespojitosti

Příklad 12.9 *Zjistěte, kde jsou následující funkce spojité a v jejich bodech nespojitosti určete, o jaký druh nespojitosti se jedná:*

i. $f(x) = \frac{1}{\ln x}$,

ii. $f(x) = \frac{x}{\sin x}$,

iii. $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

(Řešení: i. spojitá v $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, nespojitost 2. druhu v $x = 1$, odstranitelná v $x = 0$, ii. spojitá v $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, nespojitost 2. druhu v $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, odstranitelná v $x = 0$, iii. spojitá v $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, nespojitost typu skok v $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$)

Postup řešení: Z teorie víme: bod $a \in D'_f$, nazveme bodem nespojitosti funkce f, když a není bodem spojitosti funkce f, tj. buď $a \notin D_f$ nebo $a \in D_f$ a $\lim_a f \neq f(a)$. Pak v jednotlivých případech máme:

i. $D_f = \mathbb{R}^+ - \{1\}$, *$f$ je spojitá v každém bodě D_f, $1 \in D'_f$ je bodem nespojitosti. Jelikož $\lim\limits_{x\to 1^\pm} f = \pm\infty$, máme nespojitost 2. druhu. Mezi hromadné body D_f patří ještě $0 \notin D_f$, kde $\lim\limits_{x\to 0^+} f = 0$, proto $x = 0$ je odstranitelné nespojitosti.*

ii. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. *Funkce f je spojitá v každém bodě definičního oboru. Body z množiny $\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ jsou body nespojitosti. Jelikož $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, je 0 odstranitelná nespojitost. Pro ostatní $k\pi$ je „$\lim\limits_{x\to k\pi} f(x) = \pm\infty$“ a tedy jedná se nespojitosti druhého druhu.*

iii. $D_f = \mathbb{R}$. *Jelikož pro $k \in \mathbb{Z}$ je $\lim\limits_{x\to k+} (f(x) = k$ a $\lim\limits_{x\to k-} f(x) = k+1$, jsou body $x \in \mathbb{Z}$ nespojitosti typu skok. V ostatních bodech $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ je funkce spojitá.*

Příklad 12.10 *Zjistěte, kde je následující funkce spojitá a v jejích bodech nespojitosti určete, o jaký druh nespojitosti se jedná:*

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right) \operatorname{sgn}(|x| - 2).$$

(Řešení: spojitá v $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 2\}$, $x \in \{0, \pm 2\}$ je nespojitost typu skok)

Postup řešení: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkce arctg je spojitá ve všech bodech, sgn *je nespojitý v bodě 0. Dostáváme tedy tři podezřelé body $x = 0$, $x = -2$ a $x = 2$. Platí:*

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \operatorname{arctg}\frac{3}{2},$$
$$\lim_{x\to 2-} f(x) = -\operatorname{arctg}\frac{3}{2},$$
$$\lim_{x\to -2+} f(x) = -\operatorname{arctg}\frac{-3}{2},$$
$$\lim_{x\to -2-} f(x) = \operatorname{arctg}\frac{-3}{2}.$$

Tedy v bodech $x = \pm 2$ je nespojitost typu skok. Pro jednostranné limity v $x = 0$ máme

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x \to 0+} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Bod $x = 0$ je opět tedy nespojitost typu skok.

Příklad 12.11 *Zjistěte, kde je následující funkce spojita a v jejích bodech nespojitosti určete, o jaký druh nespojitosti se jedná:*

$$f(x) = \frac{\lfloor \cos x \rfloor}{x}.$$

(Řešení: spojitá v $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, body $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ jsou nespojitosti typu skok, body $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ jsou odstranitelné nespojitosti)

Funkce je jistě nespojitá v bodě $x = 0$, zároveň $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0$, jedná se tedy o odstranitelnou nespojitost. Funkce $\lfloor \cos x \rfloor$ je zřejmě 2π periodická, stačí tedy vyšetřit na intervalu délky 2π. Na $\langle -\pi/2, 3\pi/2)$ je funkce f rovna

$$\lfloor \cos x \rfloor = \begin{cases} 0, \ x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\} \\ -1, \ x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \\ 1, \ x = 0. \end{cases}$$

Pro body $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ platí, že $\lim\limits_{x \to 2k\pi^{\pm}} f(x) = 0$. V těchto bodech je tedy odstranitelná nespojitost. Jediné další podezřelé body tedy jsou $x = \frac{\pi}{2}$ a $x = -\frac{\pi}{2}$. Pro jednostranné limity dostáváme

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} f(x) = \frac{-1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi},$$
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} f(x) = \frac{0}{\frac{\pi}{2}} = 0,$$
$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} f(x) = 0,$$
$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}-} f(x) = \frac{2}{\pi}.$$

Celkem tedy pozorujeme, že v bodě $x = 0 + 2k\pi$ je odstranitelná nespojitost, a v bodech $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ jsou nespojitosti skok. V ostatních bodech je funkce f spojitá.

12.3 Extrémy funkcí

Poznámka 12.1 *Jednoduché příklady na vyšetřování lokálních extrémů*

i. $f(x) = 2 + x - x^2$

ii. $f(x) = (x-1)^3$

iii. $f(x) = |x-2|$

Příklad 12.12 *Vyšetřete lokální extrémy následující funkce*

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}.$$

(Řešení: $x = 1$ ostré lokální minimum, $x = 1/3$ ostré lokální maximum)
Postup řešení: Definiční obor je roven $D_f = \mathbb{R}$. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}(1-x)^{-\frac{1}{3}}(-1) \\ &= \frac{\frac{1}{3}(1-x) - \frac{2}{3}x}{x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{1-3x}{3x^{2/3}(1-x)^{1/3}}. \end{aligned}$$

Zároveň $f'(0) = +\infty$ (Darbouxova věta) a $f'(1)$ neexistuje (opět z Darbouxovy věty). Máme tedy dva body podezřelé z extrému: $x = 1$ a $x = 1/3$. Jelikož $f'(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, 1/3) \cup (1, +\infty)$ a $f'(x) < 0$ pro $x \in (1/3; 1)$ je $x = 1/3$ ostré lokální maximum a $x = 1$ je ostré lokální minimum.

Příklad 12.13 *Vyšetřete lokální extrémy následující funkce*

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}.$$

(Řešení: $x = 7/5$ je ostré lokální minimum)
Postup řešení: Definiční obor funkce je roven $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Pro $x \in D_f$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-3)(x^2+2x+1) - (x^2-3x+2)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2} \\ &= \frac{(2x-3)(x+1)^2 - (x^2-3x+2)(x+1)2}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(2x-3)(x+1) - 2(x^2-3x+2)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{5x-7}{(x+1)^3}. \end{aligned}$$

Pak $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$. Jelikož $f'(x) < 0$ pro $x < 7/5$ a $f'(x) > 0$ pro $x > 7/5$ je bod $x = \frac{7}{5}$ ostré lokální minimum.

Příklad 12.14 *Vyšetřete lokální extrémy následující funkce*

$$f(x) = \sin x - \cos x.$$

(Řešení: pro $k \in \mathbb{Z}$ jsou $x = 3\pi/4 + 2k\pi$ ostrá lokální maxima a $x = 7\pi/4 + 2k\pi$ ostrá lokální minima)
Postup řešení: Funkce je 2π periodická, vyšetříme tedy na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Pak pro $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$ platí

$$f'(x) = \cos x + \sin x.$$

Pak $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\sin x \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$. Na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ tedy máme 2 podezřelé body: $x = \frac{3\pi}{4}$ a $y = \frac{7\pi}{4}$. Protože $f''(x) = -\sin x + \cos x$ je

$$f''(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \implies \textit{ostré lokální maximum},$$
$$f''(\frac{7\pi}{4}) = +\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \implies \textit{ostré lokální minimum}.$$

Celkově tedy body $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ jsou ostré lokální maxima a body $y = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ jsou ostré lokální minima.

Příklad 12.15 *Vyšetřete lokální extrémy následující funkce*

$$f(x) = \cos x + \frac{\cos(2x)}{2}.$$

(Řešení: pro $k \in \mathbb{Z}$ jsou $x = k\pi$ ostrá lokální maxima, $x = 2\pi/3 + 2k\pi$ a $x = 4\pi/3 + 2k\pi$ ostrá lokální minima)
Postup řešení: Definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R}$. Pak pro $x \in D_f$ platí

$$f'(x) = -\sin x - \sin(2x) = -\sin x(1 + 2\cos x),$$
$$f''(x) = -\cos x - 2\cos(2x).$$

Opět se omezíme na $\langle 0, 2\pi\rangle$, na tomto intervalu jsou jediné podezřelé body $x = 0$, $y = \pi$, $z = \frac{2}{3}\pi$ a $w = \frac{4\pi}{3}$. Pak:

$$f''(0) = -1 - 2 < 0 \implies \textit{ostré lokální maximum},$$
$$f''(\pi) = 1 - 2 < 0 \implies \textit{ostré lokální maximum},$$
$$f''(\frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2} - 2(-\frac{1}{2}) > 0 \implies \textit{ostré lokální minimum},$$
$$f''(\frac{4\pi}{3}) = \frac{1}{2} - 2(-\frac{1}{2}) > 0 \implies \textit{ostré lokální minimum}.$$

Celkem tedy body $k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, jsou ostrá lokální maxima a body $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ a $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, jsou ostrá lokální minima.

Příklad 12.16 *Ukažte, že funkce*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

má v bodě $x = 0$ minimum a funkce

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

nemá v bodě $x = 0$ extrém, ačkoliv pro obě funkce platí

$$f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Postup řešení: Pro derivace funkcí pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3},$$
$$g'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right).$$

Ze znamének funkce f' pozorujeme, že funkce f je funkce ostře klesající na $(-\infty, 0)$ a ostře rostoucí na $(0, +\infty)$. Bod $x = 0$ je tedy ostré lokální minimum. V případě funkce g, je její derivace stále nezáporná, funkce je ostře rostoucí a bod $x = 0$ tedy není extrém.

Příklad 12.17 *Nalezněte všechny extrémy následující funkce. U každého extrému rovněž určete, jakého je druhu.*

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

(Řešení: $x = e$ je ostré lokální maximum)
Postup řešení: Definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R}^+$. Pro $x \in D_f$ pak platí

$$f'(x) = \frac{x^{1/x}}{x}(1 - \ln x).$$

Tedy jediný podezřelý bod je $x = e$. Zkoumáním znamének na okolí zjistíme, že $x = e$ je ostré lokální maximum.

Příklad 12.18 *Nalezněte všechny extrémy následující funkce. U každého extrému rovněž určete, jakého je druhu.*

$$f(x) = \arcsin x - \operatorname{sgn}(x) \arccos \sqrt{1 - x^2}.$$

(Řešení: $x \in (-1, 1)$ je neostré lokální minimum i maximum. Pozn: krajní body definičního oboru nejsou dle definice lokálními extrémy.)

Postup řešení: *Definiční obor funkce je* $D_f = \langle -1, 1\rangle$. *Pro* $x \in (-1, 0)$ *platí*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-1+x^2}}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1-1) = 0.$$

Pro $x \in (0, 1)$ *je také* $f'(x) = 0$. *Derivace v 0 dle Darbouxovy věty je* $f'(0) = 0$. *Máme funkci, která má nulovou derivaci v každém bodě, je spojitá v každém bodě* $(\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0))$, *takže je konstantní pro všechna* x. *Celkově* $f(x) = 0$ *a tedy každý definičního oboru je lokálním maximem i minimem (neostrým), kromě krajních bodů, které nesplňují definici.*

Příklad 12.19 *Nalezněte všechny extrémy následující funkce. U každého extrému rovněž určete, jakého je druhu.*

$$f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

kde $x \in (0, \pi)$.

(Řešení: neexistují)

Postup řešení: *Pro daná* x *je* $f'(x) = \frac{\cos(x)x - \sin x}{x^2}$. *Označme čitatel* $g(x) = x\cos x - \sin x$. *Derivace má tvar* $g'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$. *Funkce* $g(x)$ *je tedy na intervalu* $(0, \pi)$ *ostře klesající a* $g(0) = 0$. *Z toho plyne, že* $f'(x) < 0$ *na* $(0, \pi)$ *a lokální extrémy tedy neexistují.*

Příklad 12.20 *Nalezněte infimum a supremum množin*

$$A = \left\{ \frac{1+x}{3+x^2} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \quad a \quad B = \left\{ \frac{1+x}{3+x^2} \middle| x \in (0, +\infty) \right\}.$$

(Řešení: $\inf A = -\frac{1}{6}$, $\sup A = \frac{1}{2}$, $\inf B = 0$, $\sup B = \frac{1}{2}$ *)*

Postup řešení: *Označme* $f(x) = \frac{1+x}{3+x^2}$. *Budeme hledat lokální extrémy funkce* f. *Pro* $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$f'(x) = \frac{3+x^2-(1+x)(2x)}{(3+x^2)^2}\frac{-x^2+3-2x}{(3+x^2)^2} = \frac{-(x+3)(x-1)}{(3+x^2)^2}.$$

Máme tedy 2 podezřelé body $x_1 = -3$ *a* $x_2 = 1$. *Z chování* f' *na okolí těchto bodů pozorujeme, že* x_1 *je ostré lokální minimum a* x_2 *je ostré lokální maximum. Pro jejich hodnoty platí*

$$f(x_1) = -\frac{1}{6},$$
$$f(x_2) = \frac{1}{2}.$$

Jelikož funkce klesá na intervalu $(1, +\infty)$ *vyšetříme limity v nekonečnech. Platí*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

V prvém případě je $D_f = \mathbb{R}$ *a tedy* $\inf A = -\frac{1}{6}$ *a* $\sup A = \frac{1}{2}$. *V druhém případě máme* $D_f = \mathbb{R}^+$ *a jelikož* $\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{1}{3}$, *je* $\inf B = 0$ *a* $\sup B = \frac{1}{2}$.

Příklad 12.21 *Nalezněte supremum a infimum funkce f na intervalu I pro*

$$f(x) = x^2 - 4x + 6, \quad I = \langle -3, 10 \rangle.$$

(Řešení: $\sup_I f = 66$, $\inf_I f = 2$)
Postup řešení: Pro $x \in (-3, 10)$ platí $f'(x) = 2x - 4$. Podezřelý bod z extrému je $x = 2$ a krajní body definičního oboru, tj. $x = -3$ a $x = 10$. Jelikož $f''(x) = 2$, je bod $x = 2$ ostré lokální minimum. Zároveň $f(2) = 2$, $f(-3) = 27$ a $f(10) = 66$. Celkově $\sup_I f = 66$ a $\inf_I f = 2$.

Příklad 12.22 *Nalezněte supremum a infimum funkce f na intervalu I pro*

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad I = \langle 0.01, 100 \rangle.$$

(Řešení: $\inf_I f = 2$, $\sup_I f = 100.01$)
Postup řešení: Pro $x \in (0.01, 100)$ platí $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. Podezřelý bod je $x = 1$. Jelikož $f'(x) < 0$ pro $x \in (0.01, 1)$ je funkce na tomto intervalu klesající. Pro $x \in (1, 100)$ je funkce rostoucí. Bod $x = 1$ je tedy ostré lokální minimum. Zároveň $f(1) = 2$, $f(0.01) = 100.01$ a $f(100) = 100.01$. Celkově je tedy $\inf f = 2$ a $\sup f = 100.01$.

Příklad 12.23 *Nalezněte supremum a infimum funkce f na intervalu I pro*

$$f(x) = e^{-x^2} \cos x^2, \quad I = \mathbb{R}.$$

(Řešení: $\sup f = 1$, $\inf f = -\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$)
Postup řešení: Funkce je sudá, stačí ji vyšetřovat na intervalu $\langle 0, +\infty)$. Pro $x \in (0, +\infty)$ platí

$$f'(x) = -2e^{-x^2} x(\sin x^2 + \cos x^2).$$

Body podezřelé z extrému jsou

$$\operatorname{tg} x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \sqrt{-\frac{\pi}{4} + k\pi}, k \in \mathbb{N}.$$

a krajní bod $x = 0$. Označme $y_k = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. Druhá derivace má tvar

$$f''(x) = -2e^{-x^2}((1 - 4x^2)\sin x^2 + \cos x^2).$$

Pak

$$f''(\sqrt{y_k}) = -2e^{-\frac{\pi}{4} + k\pi} \left[\underbrace{(1 - 4(-\frac{\pi}{4} + k\pi))}_{<0} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}} + \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \right].$$

Tedy pro k liché je jistě $f''(y_k) > 0$, pro k sudé je jistě $f''(y_k) < 0$. Z toho plyne, že pro k liché je $\sqrt{y_k}$ ostré lokální minimum a pro k sudé je $\sqrt{y_k}$ ostré lokální maximum. Celkem tedy lokální minima mají hodnoty

$$f(\sqrt{y_k}) = e^{\frac{\pi}{4} - k\pi} \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Nejmenší hodnota nastává pro $k = 1$, *tj.* $f(\sqrt{3\pi/4}) = -\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}} = \inf f$. *Největší hodnota maxima je v bodě* 0, $f(0) = 1$. *V ostatním bodech musí být hodnota jistě ostře menší než* 1 *(případně je lze přesně spočítat jako u minim) a tedy* $\sup f = 1$.

Příklad 12.24 *Každá racionální lomená funkce, která není konstantní, je ostře monotónní na* $(-\infty, -x_0) \cup (x_0, +\infty)$, *kde* x_0 *je dostatečně velké kladné číslo. Dokažte.*
Postup řešení: Každá racionální lomená funkce lze zapsat ve tvaru

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P(x)$ *je polynom stupně* n *a* $Q(x)$ *je polynom stupně* m. *Pro její derivaci platí*

$$f(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)}.$$

Budeme nyní zkoumat znaménka derivace ze kterých můžeme usoudit monotonii funkce. O znaménku rozhodne pouze čitatel, jelikož jmenovatel je stále kladný. V čitateli máme rozdíl polynomů stupně $(n-1)m$ *a* $(n(m-1)$. *Čitatel bude mít tedy maximálně* $s = \max\{(n-1)m, (n(m-1)\}$ *různých kořenů ve kterých derivace mění znaménko. Označíme-li tyto kořeny* x_k *pro* $k \in \widehat{s}$ *a seřadíme podle velikosti* ($x_k \leq x_{k+1}$), *můžeme definovat hledaný bod* x_0 *pomocí vztahu*

$$x_0 = \max\{|x_1|, |x_s|\} + 1.$$

Pak jistě na intervalech $(-\infty, -x_0)$ *a* $(x_0, +\infty)$ *derivace funkce* f *nemění znaménko a funkce* f *je monotónní.*

12.4 Slovní úlohy na extrémy

Příklad 12.25 *Mezi všemi obdélníky s konstantním obvodem nalezněte ten s největší plochou.*
(Řešení: čtverec)
Postup řešení: Nechť obdelník má strany délky a, b. *Pak má obvod* $o = 2a + 2b$. *Obsah tohoto obdelníku je funkce*

$$S(a) = a \cdot b = a(o - 2a) = oa - 2a^2$$

Najdeme tedy extrém funkce. Derivace je $S'(a) = o - 4a$. *Tedy bod podezřelý z extrému je* $a = \frac{o}{4}$. *Druhá derivace pak je* $S''(a) = -4$, *a tedy bod podezřelý z extrému je jistě maximum. Pozorujeme tedy, že mezi obdélníky s konstantním objemem má čtverec největší obsah.*

Příklad 12.26 *Spočítejte rozměry kvádru se čtvercovou podstavou a s největším možným objemem, který lze vepsat do polokoule o daném poloměru.*

(Řešení: kvádr s podstavou délky $a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ a výškou $v = \frac{r}{\sqrt{3}}$, kde r je poloměr polokoule)

Postup řešení: Označme r poloměr dané polokoule, a velikost strany podstavy kvádru a v jeho výšku. Objem daného kvádru pak lze spočítat pomocí

$$V = a^2 v.$$

Jelikož platí vztah

$$r^2 = v^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

lze objem spočítat jako

$$V(a) = a^2\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{a^4r^2 - \frac{a^6}{2}}.$$

Pro derivaci platí

$$V'(a) = \frac{1}{2}\frac{a^3\left(4r^2 - 3a^2\right)}{\sqrt{a^4r^2 - \frac{a^6}{2}}}.$$

Jediný podezřelý bod z extrému je tedy $a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Zkoumáním znaménka derivace na levém a pravém okolí tohoto bodu zjistíme, že bod je ostré lokální maximum. Z původního vztahu můžeme pro toto a dopočítat hledanou výšku $v = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Hledaný kvádr má tedy délku podstavy $a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ a výšku $v = \frac{r}{\sqrt{3}}$.

Příklad 12.27 *Spočítejte rozměry kuželu s nejmenším možným objemem, který lze opsat dané kouli.*

(Řešení: výška $v = 4R$, poloměr podstavy $r = \sqrt{2}R$, kde R je poloměr vepsané koule)

Postup řešení: Pro objem kužele známe vztah

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v,$$

kde r je poloměr podstavy a v je výška. Schematické znázornění problému je uvedeno na Obrázku 5. Z Pythagorovy věty zároveň dostáváme vztahy $\frac{r}{v} = \operatorname{tg}\alpha$ a $\frac{r}{a} = \sin\alpha$. Pro poloměr opsané koule platí

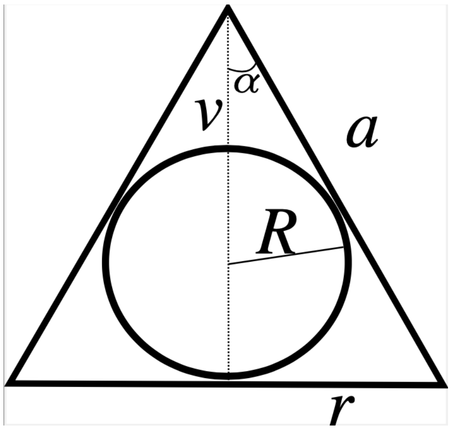
$$R = \frac{S_\Delta}{s_\Delta} = \frac{\frac{1}{2}\frac{r^2}{\operatorname{tg}\alpha}}{\frac{2a+2r}{2}} = \frac{r^2}{2(a+r)\operatorname{tg}\alpha}.$$

Zároveň $r = a\sin\alpha$, tedy

$$R = \frac{a^2\sin^2\alpha}{2a(1+\sin\alpha)\operatorname{tg}\alpha}.$$

Vyjádřením délky a z předchozího vztahu získáme

$$a = \frac{R(1+\sin\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{\sin^2\alpha}.$$



Obrázek 5: Schéma příkladu 12.27.

Dosazením předchozích vztahů do rovnice pro objem kužele získáme

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}\pi \frac{R^3 \operatorname{tg}^2 \alpha (1+\sin\alpha)^3}{\sin^3\alpha} = \frac{1}{3}\pi R^3 \frac{(1+\sin\alpha)^3}{\sin\alpha - \sin^2\alpha}.$$

Pro její derivaci platí

$$V'(\alpha) = \frac{(1+\sin\alpha)\cos\alpha(3\sin\alpha - 1)}{\sin^2\alpha(1-\sin\alpha)^2}.$$

Podezřelý bod z extrému je $\alpha = \arcsin\frac{1}{3}$. *Ze zkoumání znamének derivace zjistíme, že tento bod je opravdu minimum. Pak*

$$V_{min} = V(\arcsin\frac{1}{3}) = \frac{8}{3}\pi R^3 = 2V_k,$$

kde V_k *je objem vepsané koule. Rozměry kuželu získáme z předcházejících vztahů. Platí*

$$\begin{aligned} a &= R\frac{(1+\sin\arcsin\frac{1}{3})\operatorname{tg}\arcsin\frac{1}{3}}{\sin^2\arcsin\frac{1}{3}} = R\frac{\frac{4}{3}\operatorname{tg}\arcsin\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}} = 12R\operatorname{tg}\arcsin\frac{1}{3} = 3\sqrt{2}R,\\ r &= a\sin\arcsin\frac{1}{3} = \sqrt{2}R,\\ v &= \frac{r}{\operatorname{tg}\alpha} = 4R, \end{aligned}$$

jelikož

$$\operatorname{tg}\arcsin\frac{1}{3} = \sqrt{\frac{\sin^2\arcsin\frac{1}{3}}{1-\sin^2\arcsin\frac{1}{3}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Příklad 12.28 *Nalezněte nejmenší vzdálenost bodu* $(2,2)$ *od paraboly* $y^2 = 4x$.

(Řešení: $\sqrt{8-6\sqrt[3]{2}}$)

Postup řešení: Hledáme

$$\inf_{x,y\in\mathbb{R},y^2=4x} \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} = \inf_{y\in\mathbb{R}} \sqrt{(\frac{y^2}{4}-2)^2+(y-2)^2}.$$

Označme tedy funkci $f(y) = \sqrt{(\frac{y^2}{4}-2)^2+(y-2)^2}$ *a hledejme její minimum. Pro její derivaci v bodech* $y \in \mathbb{R}$ *platí*

$$f'(y) = \frac{1}{2}\frac{2(\frac{y^2}{4}-2)\frac{2y}{4}+2(y-2)}{\sqrt{(\frac{y^2}{4}-2)^2+(y-2)^2}} = \frac{1}{2}\frac{y^3-16}{y^4-64y+128}.$$

Jelikož

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{16}$$

máme pouze jeden podezřelý bod. Protože na levém okolí bodu $x = \sqrt[3]{16}$ *je derivace záporná, na pravém kladná, jedná se opravdu o ostré lokální minimum. Jeho hodnota je* $f(\sqrt[3]{16}) = \sqrt{8-6\sqrt[3]{2}} \approx 0.6636$.

Příklad 12.29 *Nalezněte nejkratší a nejdelší vzdálenost bodu* $(2,0)$ *od kružnice* $x^2 + y^2 = 1$.

(Řešení: 1, 3)

Postup řešení: Postupujeme obdobně jako v minulém příkladě. Hledaná vzdálenost je

$$\inf_{x,y\in\langle -1,1\rangle,x^2+y^2=1} \sqrt{(x-2)^2+y^2} = \inf_{x\in\langle -1,1\rangle} \sqrt{((x-2)^2+1-x^2} = \inf_{x\in\langle -1,1\rangle} \sqrt{-4x+5}$$

Označme tedy funkci $f(x) = \sqrt{-4x+5}$ *s definičním oborem* $D_f = \langle -1,1\rangle$ *a hledejme její minimum. Pro její derivaci v bodech* $x \in (-1,1)$ *platí*

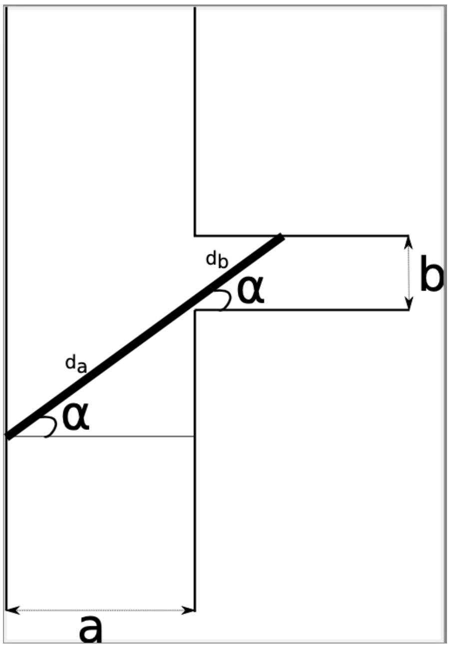
$$f'(x) = \frac{-4}{\sqrt{-4x+5}}$$

Jelikož $f'(x) < 0$ *(funkce je tedy ostře klesající) pro všechna* $x \in (-1,1)$*, jsou jediné podezřelé body z extrému krajní body definičního oboru. Platí*

$$f(-1) = 3$$
$$f(1) = 1$$

Nejkratší vzdálenost má euklidovskou velikost 1, nejdelší 3. To je v souhlasu s geometrickou interpretací úlohy.

Příklad 12.30 *Kolmo k řece šíře a je přiveden kanál šíře b. Jakou maximální délku může mít kláda (zanedbatelného průřezu), která lze splavit z řeky do tohoto kanálu?*



Obrázek 6: Schéma příkladu 12.30.

(Řešení: $\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$ *)*

Postup řešení: Schematické znázornění problému je na Obrázku 6. Délka klády v závislosti na úhlu α *je*

$$d(\alpha) = d_a + d_b = \frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha}.$$

Kláda se musí vejít pro libovolné $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$*. Pro derivaci platí*

$$d'(\alpha) = \frac{-a\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{b\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{a\cos^3\alpha + b\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}.$$

Zároveň

$$\begin{aligned} a\cos^3\alpha > b\sin^3 &\Leftrightarrow \frac{a}{b} > \operatorname{tg}^3\alpha \\ &\Leftrightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right)^{1/3} > \alpha. \end{aligned}$$

Pokud definujeme $\alpha_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right)^{1/3}$*, je* α_0 *lokální minimum funkce* d*. Ze vztahů* $\sin\operatorname{arctg} x =$

$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ a $\cos \operatorname{arctg} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *pak dostáváme*

$$\begin{aligned} d(\alpha_0) &= \frac{a\sqrt{1+(\frac{a}{b})^{2/3}}}{(\frac{a}{b})^{1/3}} + b\sqrt{1+(\frac{a}{b})^{2/3}} \\ &= \sqrt{1+(\frac{a}{b})^{2/3}}\left(a^{2/3}b^{1/3}+b\right) \\ &= \sqrt{b^{2/3}+a^{2/3}}\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right) = \left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}, \end{aligned}$$

což je maximální délka klády aby prošla.

13 Třináctý týden

13.1 Konkávnost a konvexnost

Příklad 13.1 *Dokažte, že následující definice konvexnosti funkce f na intervalu I jsou ekvivalentní.*

i. $(\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3)(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1})$

ii. $(\forall \lambda \in \langle 0, 1\rangle)(\forall x, y \in I)(f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))$

iii. $(\forall x_1, \dots, x_n \in I)(\forall \lambda_1, \dots \lambda_n \in \langle 0, 1\rangle, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1)(f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k))$

Obdobné ekvivalence lze dokázat i pro konkávnost.
Postup řešení: Dokážeme sérii implikací:

- *ii* $\Leftrightarrow$ *i: Položme*

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \lambda x + (1-\lambda)y \\ x_3 &= y \end{aligned}$$

Tedy $\lambda = \frac{x_2-x_3}{x_1-x_3}$ *a* $1-\lambda = \frac{x_1-x_2}{x_1-x_3}$. *Pak platí serie ekvivalencí:*

$$\begin{aligned} ii. &\Leftrightarrow f(x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_3) \\ &\Leftrightarrow f(x_2) \leq \frac{x_2-x_3}{x_1-x_3}f(x_1) + \frac{x_1-x_2}{x_1-x_3}f(x_3) \\ &\Leftrightarrow (x_3-x_1)f(x_2) \leq (x_3-x_2)f(x_1 + (x_2-x_1)f(x_3) \\ &\Leftrightarrow (x_3-x_1)f(x_2) \leq (x_3 - x_1 + x_1 - x_2)f(x_1 + (x_2-x_1)f(x_3) \\ &\Leftrightarrow (x_3-x_1)f(x_2) - (x_3-x_1)f(x_1) \leq (x_1-x_2)f(x_1) + (x_2-x_1)f(x_3) \\ &\Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \\ &\Leftrightarrow i. \end{aligned}$$

- *iii.* $\implies$ *ii. : zřejmě, pouze stačí vzít* $n = 2$.
- *ii.* $\implies$ *iii. : dokážeme indukcí na* n. *Pro* $n = 1, 2$ *implikace jistě platí jistě platí.*

Pak

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right) &= f\left(\lambda_{n+1}x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k x_k}{1-\lambda_{n+1}}\right)\\
&\overset{ii.}{\leq} \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1})f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k x_k}{1-\lambda_{n+1}}\right)\\
&\overset{IP}{\leq} \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}f\left(x_k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f\left(x_k\right),
\end{aligned}$$

kde v první nerovnost jsme využili ii. a v druhé nerovnosti indukční předpoklad.

Příklad 13.2 *S využitím konvexnosti nebo konkávnosti dokažte, že pro všechna kladná čísla $x_1,\ldots,x_n$, kde $n\in\mathbb{N}$, platí*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$

Postup řešení: Využije funkci $f(x)=x^2$. Tato funkce je jistě konvexní na $\mathbb{R}$ a platí pro ni tedy iii. vlastnost z minulého příkladu. Pokud definujeme $\lambda_k=\frac{1}{n}$ pro $k\in\widehat{n}$ dostáváme

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}x_k\right)^2 \overset{iii.}{\leq} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}x_k^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2.$$

Odmocněním již získáváme hledanou nerovnost.

Příklad 13.3 *S využitím konvexnosti nebo konkávnosti dokažte, že pro všechna kladná čísla $x_1,\ldots,x_n$, kde $n\in\mathbb{N}$, platí*

$$\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n).$$

Postup řešení: Využijeme funkci $f(x)=\ln x$. Tato funkce je konkávní na $(0,+\infty)$ a platí pro ti tedy nerovnost

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\ln(x_k),$$

kde $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k=1$. Opět definujeme $\lambda_k=\frac{1}{n}$ pro $k\in\widehat{n}$. Pak s využitím vlastností logaritmů dostáváme

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\;x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln x_k = \sum_{k=1}^{n}\ln x_k^{\frac{1}{n}} = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}x_k^{\frac{1}{n}}\right).$$

Jelikož logaritmus je rostoucí funkce, je předcházející nerovnost ekvivalentní s

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k \geq \prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}},$$

což je již hledaná nerovnost.

Příklad 13.4 *Nalezněte maximální intervaly, na kterých je následující funkce (ryze) konvexní/konkávní:*

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

(Řešení: ryze konvexní na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ a na $\langle\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$, ryze konkávní na $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$)
Postup řešení: Definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R}$. Pro $x \in D_f$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2}, \\ f''(x) &= 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right) = 2e^{-x^2}\left(\sqrt{2}x - 1\right)\left(\sqrt{2}x - 1\right). \end{aligned}$$

Pozorujeme, že máme dva inflexní body: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Jelikož $f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ je funkce na ryze konvexní na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ a na $\langle\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$. Na intervalu $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ je funkce ryze konkávní.

Příklad 13.5 *Nalezněte maximální intervaly, na kterých je následující funkce (ryze) konvexní/konkávní:*

$$f(x) = x\sin(\ln x).$$

(Řešení: ryze konvexní na $\langle e^{\frac{-3\pi}{4}+2k\pi}, e^{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}\rangle$, ryze konkávní na $\langle e^{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}, e^{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}\rangle$ pro $k \in \mathbb{Z}$)
Postup řešení: Definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R}^+$. Pro $x \in D_f$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(\ln x) + \cos(\ln x), \\ f''(x) &= \frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x} = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\cos\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right)}{x}. \end{aligned}$$

Jmenovatel je vždy kladný, o znaménku druhé derivace tedy rozhodne čitatel. Funkce bude ryze konvexní pokud

$$\ln x + \frac{\pi}{4} \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$$

tedy pro $x \in \langle e^{\frac{-3\pi}{4}+2k\pi}, e^{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$. Na intervalech $\langle e^{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}, e^{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}\rangle$ je funkce ryze konkávní.

Příklad 13.6 *Nalezněte maximální intervaly, na kterých je následující funkce (ryze) konvexní/konkávní:*

$$f(x) = \arcsin|x|.$$

(Řešení: ryze konvexní na $\langle -1, 1\rangle$)

Definiční obor funkce je roven $D_f = \langle -1, 1\rangle$. Jelikož funkce f je sudá funkce, stačí vyšetřit na intervalu $(0, 1)$. Pro $x \in (0, 1)$ platí

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$f''(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Tedy $f''(x) > 0$ na $(0, 1)$ z čehož plyne, že f je ryze konvexní na $\langle 0, 1\rangle$. Ze sudosti můžeme říci, že f je ryze konvexní na $\langle -1, 1\rangle$.

13.2 Důkazy nerovností

Příklad 13.7 *Dokažte nerovnosti*

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

pro $x \in (0, \pi/2)$.
Postup řešení: Postupně ukážeme tři nerovnosti.

- *Nejprve ukážeme, že $\sin x < x$ pro daná x. Definujme funkci $h(x) = \sin x - x$. Pokud ukážeme, že $h(x) < 0$, je druhá nerovnost dokázána. Pro daná x platí*

  $$h'(x) = \cos x - 1 < 0.$$

  Funkce $h(x)$ je tedy ostře klesající. Zároveň $h(0) = 0$. Celkově tedy pro daná x platí
  $$h(x) < 0 \Leftrightarrow \sin x < x.$$

- *Obdobně ukážeme, že $x < \operatorname{tg} x$. Definujme funkci $s(x) = x - \operatorname{tg} x$. Pak pro daná x platí*
  $$s'(x) = \frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x} < 0.$$
  Funkce s je ostře klesající a opět platí $s(0) = 0$. Celkově jsme zjistili $s(x) < 0 \Leftrightarrow x < \operatorname{tg} x$, což je dokazovaná nerovnost.

- *Zbývá dokázat první nerovnost. Jedna možnost je nakreslit grafy funkcí. Tyto funkce mají průsečíky v bodech $[0, 0]$ a $[1, 1]$. A jelikož funkce $\sin x$ je na daném intervalu ryze konkávní, musí platit $\sin x > \frac{2}{\pi}x$. Druhá možnost je opět přes diferenciální počet. Definujme funkci $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Pro její derivaci platí*

  $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2},$$

kde $g(x) = x\cos x - \sin x$. *Jelikož* $g'(x) = -x\sin x < 0$ *pro* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, *je funkce* $g(x)$ *ostře klesající a zároveň* $g(0) = 0$. *Proto* $g(x) < 0$ *pro* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. *Jelikož* $g(x) < 0$ *je i* $f' < 0$ *a tedy i funkce* f *je klesající. Pak pro* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ *získáváme*

$$\frac{\sin x}{x} = f(x) \geq f(\pi/2) = \frac{2}{\pi}.$$

Nyní již stačí vynásobit tuto nerovnost nenulovým x *a máme hledanou nerovnost.*

Příklad 13.8 *Dokažte nerovnost*

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x$$

pro $x > 0$. *(Pozn: jedná se o optimální odhad polynomem nejvýše třetího stupně na kladné poloose, neboť* $\sin x = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n x^{2n+1}/((2n+1)!)$.*)*

Postup řešení: Definujme $f(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$. *Ukážeme, že* $f(x) < 0$ *pro daná* x. *Pro derivaci* f *platí*

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x,$$

Chtěli bychom ukázat, že $f'(x) < 0$. *To opět ukážeme přes diferenciální počet. Pro druhou derivaci platí*

$$f''(x) = -x + \sin x < 0,$$

kde nerovnost $\sin x < x$ *máme k dispozici z minulého příkladu. Tedy funkce* $f'(x)$ *je ostře klesající, zároveň* $f'(0) = 0$. *Celkem tedy* $f'(x) < 0$ *na daném intervalu, tedy původní funkce* $f(x)$ *je také ostře klesající. Zároveň* $f(0) = 0$, *tedy opravdu platí* $f(x) < 0$ *pro daná* x.

Příklad 13.9 *Dokažte nerovnost*

$$2x < \sin x + \operatorname{tg} x,$$

pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Postup řešení: Označme $f(x) = 2x - \sin x - \operatorname{tg} x$ *a ukážeme, že* $f(x) < 0$. *Pro daná* x *platí*

$$f'(x) = 2 - \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} = 2 - \left[\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}\right] \overset{AG}{\geq} 2 - 2\sqrt{\frac{1}{\cos x}} = 2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\cos x}}\right] < 0,$$

kde jsme využili AG nerovnost $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab}$ *platnou pro libovolná kladná čísla. Funkce* $f(x)$ *je tedy jistě klesající a* $f(0) = 0$. *Celkově tedy dostáváme, že* $f(x) < 0$ *pro* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, *což jsme chtěli ukázat.*

13.3 Průběhy funkcí

Poznámka 13.1 *Vyšetřit průběh funkce zejména obnáší nalézt:*

- *definiční obor, obor hodnot,*
- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty (např limity v nekonečnech),*
- *případnou sudost, lichost, periodicitu,*
- *spojitost, druhy bodů nespojitosti,*
- *existenci asymptot (svislých i těch v nekonečnech),*
- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy,*
- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body,*
- *nakreslit graf funkce.*

Příklad 13.10 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}.$$

Postup řešení: Budeme postupovat dle seznamu na začátku sekce:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Jelikož

  $$x = 0 \implies f(x) = 0,$$
  $$f(x) = 0 \implies x = 0,$$

  je jediný průsečík bod $[0.0]$*. Pro limity v zajímavých bodech platí*

  $$\lim_{x\to+\infty} = +\infty,$$
  $$\lim_{x\to-\infty} = -\infty,$$
  $$\lim_{x\to-1+} = +\infty,$$
  $$\lim_{x\to-1-} = -\infty.$$

- *případnou sudost, lichost, periodicitu:*

  Funkce nemá žádnou z těchto vlastností.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru. V $x = -1$ je nespojitost druhého druhu.

- *existenci asymptot:*

  Existuje svislá asymptota $x = -1$. Pro klasické platí:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x(x+1)^3} = 1,\\
k_2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{x(x+1)^3} = 1,\\
q_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{(x+1)^3} - x = -3,\\
q_2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{(x+1)^3} - x = -3.
\end{aligned}
$$

  Existuje tedy jedna asymptota $y = x - 3$.

- *monotonii funkce, lokální extrémy:*

  Pro $x \in D_f$ platí

$$f'(x) = \frac{x^3(x+4)}{(x+1)^2}.$$

  Máme tedy dva podezřelé body z extrému $x = 0$ a $x = -4$. Jelikož $f'(x) > 0$ pro $x < -4$, $f'(x) < 0$ pro $x \in (-4, 0) \setminus \{-1\}$, $f'(x) > 0$ pro $x > 0$. Funkce tedy ostře roste na $(-\infty, -4)$, klesá na $(-4, -1)$, klesá na $(-1, 0)$ a opět roste na $(0, +\infty)$. Tedy v bodě -4 je ostré lokální maximum $f(-4) = -\frac{256}{27}$. V $x = 0$ je ostré lokální minimum $f(0) = 0$.

- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x \in D_f$ platí:

$$f''(x) = 12\frac{x^2}{(x+1)^5} -$$

  Pak $f''(x) > 0$ pro $x > -1$ a $f''(x) < 0$ pro $x < -1$. Funkce je tedy ryze konvexní na $\langle -1, +\infty)$ a ryze konkávní na $(-\infty, -1\rangle$.

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 7.*

Příklad 13.11 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = (x-3)\sqrt{x}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

$$D_f = \mathbb{R}_0^+$$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Platí

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3,$$
$$x = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

  Průsečíky s osami tedy jsou $[0,0]$ *(bod dotyku) a* $[3,0]$. *Pro limitu v plus nekonečnu platí* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Funkce nemá žádnou z těchto vlastností.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech D_f.

- *existence asymptot Svislá asymptota neexistuje, v* $+\infty$ *máme*

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \notin \mathbb{R}.$$

  Funkce tedy nemá žádnou asymptotu.

- *monotonie funkce, lokální extrémy:*

  Protože $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}$, *pak pro* $x > 0$ *platí*

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

  Z Darbouxovy věty získáme, že $f'(0) = -\infty$. *Jediný podezřelý bod z extrému tedy je* $x = 1$. *Zároveň* $f'(x) < 0$ *pro* $x \in (0,1)$, f *je tedy na* $\langle 0,1\rangle$ *ostře klesající. Naopak* $f'(x) > 0$ *pro* $x \in (1,+\infty)$, *a* f *je na* $\langle 1,+\infty)$ *ostře rostoucí. Podezřelý bod z extrému* $x = 1$ *je tedy ostré lokální minimum.*

- *konvexnost, konkávnost, inflexní body:*

  Pro $x > 0$ *platí*

$$f''(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^{2/3}}\right)$$

  Funkce je na $\langle 0,+\infty)$ *ryze konvexní.*

- *obor hodnot:*

  Z výpočtů plyne, že $H_f = \langle f(1),+\infty) = \langle -2,+\infty)$

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 7.*

Příklad 13.12 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{|1+x|^{3/2}}{\sqrt{x}}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

$$D_f = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$$

  Pozorujeme, že můžeme psát $f(x) = \frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{x}}$.

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty: Platí*

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin D_f, \\ x = 0 \notin D_f. \end{aligned}$$

  Funkce nemá průsečík s žádnou osou. Pro limity v zajímavých bodech platí

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} &= +\infty, \\ \lim_{x\to 0+} &= +\infty. \end{aligned}$$

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Funkce nemá žádnou z těchto vlastností.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti*
  Funkce je spojitá ve všech bodech D_f

- *existence asymptot:*

  Existuje svislá asymptota $x = 0$. *Pro asymptotu v* $+\infty$ *platí*

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \in \mathbb{R} \\ q &= \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+x)^{3/2} - x^{3/2}}{x^{1/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+x)^3 - x^3}{x^{1/2}((1+x)^{3/2} + x^{3/2})} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + x^3 + 3x^2 + 3x - x^3}{x^{1/2}((1+x)^{3/2} + x^{3/2})} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

  Funkce tedy má asymptotu v $+\infty$ *o rovnici* $y(x) = x + \frac{3}{2}$.

- *monotonie funkce, lokální extrémy:*

  Pro $x > 0$ *platí*

$$f'(x) = \frac{(2x-1)\sqrt{1+x}}{x^{3/2}}.$$

Jediný podezřelý bod z extrému je $x = \frac{1}{2}$. Zároveň pozorujeme, že $f'(x) < 0$ pro $x \in (0, \frac{1}{2})$ a f je na $(0, \frac{1}{2}\rangle$ ostře klesající, $f'(x) > 0$ pro $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ a tedy f je na $\langle \frac{1}{2}, +\infty)$ ostře rostoucí. Z výše uvedeného (monotonie) plyne, že $x = \frac{1}{2}$ je bodem ostrého lokálního minima.

- *konvexnost, konkávnost, inflexní body:*

  Pro $x > 0$ platí

$$f''(x) = \frac{3}{4x^{5/2}\sqrt{1+x}}.$$

  Funkce je tedy na $(0, +\infty)$ ryze konvexní. Inflexní body na tomto intervalu neexistují.

- *obor hodnot: z výpočtů plyne, že $H_f = \langle f(\frac{1}{2}), +\infty) = \langle \frac{3\sqrt{3}}{2}, +\infty)$*
- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 7.*

Příklad 13.13 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = e^{-x} + x.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Platí

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -e^{-x} \Rightarrow x \notin \mathbb{R},$$
$$x = 0 \Rightarrow f(x) = 1.$$

  Rovnice $e^{-x} = -x$ nemá řešení, jelikož $e^x > x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Funkce má průsečík s osou y v bodě $[0, 1]$. Pro limity v nekonečnech platí $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

- *sudost, lichost, periodicita:*
  Funkce nemá žádnou z těchto vlastností.
- *spojitost, druhy bodů nespojitosti*
  Funkce je spojitá ve všech bodech D_f
- *existence asymptot:*

Svislá asymptota neexistuje. Pro asymptoty v nekonečnech platí

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x} + 1 = 1 \in \mathbb{R} \\
q_1 &= \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = 0, \\
k_2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} = \frac{e^{-x}}{x} + 1 = +\infty \notin \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Funkce tedy má asymptotu v $+\infty$ danou rovnicí $y = x$.

- *monotonie funkce, lokální extrémy:*

  Pro $x \in D_f$ platí

  $$f'(x) = 1 - e^{-x} = 0.$$

  Jediný podezřelý bod z extrému je $x = 0$. Zároveň $f'(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a f je tedy na $(-\infty, 0\rangle$ ostře klesající. Dále $f'(x) > 0$ pro $x \in (0, +\infty)$ a f je na $\langle 0, +\infty)$ ostře rostoucí. Z výše uvedeného (monotonie) plyne, že $x = 0$ je bodem ostrého lokálního minima (dokonce globálního).

- *konvexnost, konkávnost, inflexní body:*

  Pro $x \in D_f$ platí

  $$f''(x) = e^{-x}.$$

  Funkce je na celém D_f ryze konvexní. Inflexní body na tomto intervalu neexistují.

- *obor hodnot: z výpočtů plyne, že $H_f = \langle f(0), +\infty) = \langle 1, +\infty)$.*
- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 7.*

Příklad 13.14 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = x + \operatorname{arctg} x.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty: Platí*

  $$
  \begin{aligned}
  f(x) = 0 &\implies x = 0, \\
  x = 0 &\implies f(x) = 0.
  \end{aligned}
  $$

  Funkce má průsečík s osou y a osou x v bodě $[0, 0]$. Pro limity v nekonečnech platí

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Jelikož
  $$f(-x) = -x \operatorname{arctg}(-x) = -(x + \operatorname{arctg} x) = -f(x),$$
  je funkce lichá.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech D_f.

- *existence asymptot Svislá asymptota neexistuje. Pro asymptoty v nekonečnech platí*
  $$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \in \mathbb{R} \\ q_1 &= \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \\ k_2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \in \mathbb{R} \\ q_2 &= \lim_{x\to-\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
  Funkce má asymptotu $y(x) = x + \frac{\pi}{2}$ v $+\infty$ a $y(x) = x - \frac{\pi}{2}$ v $-\infty$.

- *monotonie funkce, lokální extrémy:*

  Pro $x \in D_f$ platí
  $$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}.$$
  Pozorujeme, že $f'(x) > 0$ pro $\forall x \in D_f$ a tedy f je na celém D_f ostře rostoucí. Funkce nemá žádný lokální extrém.

- *konvexnost, konkávnost, inflexní body:*

  Pro $x \in D_f$ platí
  $$f''(x) = -\frac{2x}{1+x^2}.$$
  Pozorujeme, že $f''(x) < 0$ pro $x > 0$ a tedy f je na $\langle 0, +\infty)$ ryze konkávní. Zároveň $f''(x) > 0$ pro $x < 0$ a tedy f je na $(-\infty, 0\rangle$ ryze konvexní. Bod $x = 0$ je inflexním bodem f.

- *obor hodnot: z výpočtů plyne, že $H_f = (-\infty, +\infty)$*
- *nakreslit graf funkce: viz. Obrázek 8.*

Příklad 13.15 *Vyšetřete průběh funkce*
$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty: Platí*

$$f(x) = 0 \implies x = 1,$$
$$x = 0 \notin D_f.$$

  Funkce má průsečík s osou x v bodě $[1, 0]$. Pro limity v krajních bodech platí

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \ \lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty.$$

- *sudost, lichost, periodicita:*
  Funkce nemá žádnou z těchto vlastností.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*
  Funkce je spojitá ve všech bodech D_f.

- *existence asymptot: Existuje svislá asymptota $x = 0$. Pro asymptotu v $+\infty$ platí*

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{3/2}} = 0 \in \mathbb{R},$$
$$q = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \in \mathbb{R}.$$

  Funkce má asymptotu v$+\infty$ s předpisem $y(x) = 0$.

- *monotonie funkce, lokální extrémy:*

  Pro $x \in D_f$ platí

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{3/2}}.$$

  Jediný podezřelý bod z extrému je $x = e^2$. Zároveň platí

  - $f'(x) > 0$ *pro* $x \in (0, e^2) \Rightarrow f$ *je na* $(0, e^2\rangle$ *ostře rostoucí,*
  - $f'(x) < 0$ *pro* $x \in (e^2, +\infty) \Rightarrow f$ *je na* $\langle e^2, +\infty)$ *ostře klesající.*

  Z výše uvedeného (monotonie) plyne, že $x = e^2$ je bodem ostrého lokálního maxima (dokonce globálního).

- *konvexnost, konkávnost, inflexní body:*

  Pro $x \in D_f$ platí

$$f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{5/2}}.$$

  Pozorujeme, že

  - $f''(x) < 0$ *pro* $x \in (0, e^{\frac{8}{3}}) \Rightarrow f$ *je na* $(0, e^{\frac{8}{3}}\rangle$ *ryze konkávní,*

– $f''(x) > 0$ *pro* $x \in (e^{\frac{8}{3}}, +\infty) \Rightarrow f$ *je na* $\langle e^{\frac{8}{3}}, +\infty)$ *ryze konvexní.*

Bod $x = e^{\frac{8}{3}}$ *je inflexním bodem* f.

- *obor hodnot: z výpočtů plyne, že* $H_f = (-\infty, f(e^2)\rangle = (-\infty, \frac{2}{e}\rangle$
- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 8.*

Příklad 13.16 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 2}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Platí

$$x = 0 \implies f(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0) + 2} = 0,$$
$$f(x) = 0 \implies \sin x = 0 \implies x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

  Průsečíky tedy jsou body $[k\pi, 0]$ *pro* $k \in \mathbb{Z}$. *Limity v* $\pm\infty$ *neexistují.*

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Sinus i cosinus jsou funkce periodické s periodou 2π, *funkce* f *je tedy periodická s touto periodou. Při vyšetřování monotonie a konvexnosti se tedy stačí zaměřit na interval* $\langle 0, 2\pi\rangle$. *Jelikož platí:*

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x) + 2} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x) + 2} = -f(x),$$

  je funkce lichá.

- *spojitost:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru.

- *asymptoty:*

  Funkce nemá svislé asymptoty a jelikož je periodická, nemá ani asymptoty v nekonečnech.

- *monotonie:*

  Pro $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\,(\cos(x) + 2) + \sin^2(x)}{(\cos(x) + 2)^2} = \frac{1 + 2\cos(x)}{(\cos(x) + 2)^2}.$$

  Podezřelý bod z extrému splňuje rovnici $\cos x = -\frac{1}{2}$, *tj. body* $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ *a* $x_2 = \frac{4\pi}{3}$. *Zároveň*

- $f'(x) > 0$ *pro* $x \in (0, \frac{2\pi}{3})$ *a* $x \in (\frac{4\pi}{3}, 2\pi)$*, tedy funkce f je na těchto intervalech ostře rostoucí,*
- $f'(x) < 0$ *pro* $x \in (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ *a f je tedy na tomto intervalu ostře klesající.*

Bod $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ *je tedy ostré lokální maximum a bod* $x_2 = \frac{4\pi}{3}$ *je ostré lokální minimum.*

- *konvexnost, konkávnost a inflexní body: Pro* $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2\cos(x)\,(\cos(x)+2)^2 + 2\,(\cos(x)+2)\sin(x)\,(1+2\cos(x))}{(\cos(x)+2)^4} \\ &= \frac{2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(x)}{(\cos(x)+2)^3} = \frac{2\sin(x)\,(\cos(x)-1)}{(\cos(x)+2)^3}. \end{aligned}$$

Pozorujeme, že $f''(x)$ *je záporná na intervalu* $(0, \pi)$ *a kladná na intervalu* $(\pi, 2\pi)$*. Původní funkce f je tedy konvexní na* $\langle \pi, 2\pi \rangle$ *a konkávní* $(\langle, \pi\rangle$*.*

- *Z výpočtu plyne* $H_f = \langle f(\frac{4\pi}{3}), f(\frac{2\pi}{3}) \rangle = \langle -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle$*.*
- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 8.*

Příklad 13.17 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = |x^3 - 6x^2 + 11x - 6|.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}$
- *průsečíky s osami souřadnic a funkční hodnoty v zajímavých bodech:*

  Platí

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies f(0) = 6, \\ f(x) = 0 &\implies 0 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3) \implies x \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

  Průsečíky tedy jsou body $[0, 6]$*,* $[1, 0]$*,* $[2, 0]$ *a* $[3, 0]$*. Pro limity v nekonečnech platí* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = +\infty$*.*
- *sudost, lichost, periodicita*

  Funkce není periodická, ani sudá čí lichá.
- *spojitost*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru.

- *asymptoty: Funkce nemá svislé asymptoty. Pro asymptoty v nekonečnech platí*

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x^3 - 6x^2 + 11x - 6|}{x} = +\infty$$

Asymptota v $+\infty$ *tedy neexistuje, ze stejných důvodů nebude existovat ani asymptota v* $-\infty$.

- *monotonie:*

Pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ *má derivace funkce* f *tvar*

$$f'(x) = \operatorname{sgn}((x-1)(x-2)(x-3))(3x^2 - 12x + 11),$$

v inkriminovaných bodech $\{1, 2, 3\}$ *derivace neexistuje. Body podezřelé z extrému jsou tedy* $\{1, 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 2, 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 3\}$. *Zároveň*

  - $f'(x) > 0$ *na intervalech* $(1, 2 - \frac{\sqrt{3}}{3})$, $(2, 2 + \frac{\sqrt{3}}{3})$ *a* $(3, +\infty)$. *Původní funkce* f *je tedy na těchto intervalech ostře rostoucí,*
  - *naopak na interval* $(-\infty, 1)$, $2 - \frac{(\sqrt{3}}{3}, 2)$ *a* $(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 3)$ *je* $f'(x) < 0$ *a* f *je zde tedy ostře klesající.*

Z monotonie pozorume, že body $1, 2, 3$ *jsou ostrá lokální minima a body* $2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ *jsou ostrá lokální maxima.*

- *konvexnost, konkávnost, inflexní body:*

Pro $x \in D_f \setminus \{1, 2, 3\}$ *platí,*

$$f''(x) = sgn((x-1)(x-2)(x-3))(6x - 12).$$

Pozorujeme, že $f''(x)$ *je na intervalu* $(-\infty, 1)$ *a na intervalu* $(3, +\infty)$ *kladná, tedy funkce* f *je na těchto intervalech ryze konvexní, naopak na intervalech* $(1, 2)$ *a* $(2, 3)$ *je* $f''(x)$ *záporná a* f *je tedy na tomto intervalu ryze konkávní.*

- *Z výpočtů plyne* $H_f = \mathbb{R}$
- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 8.*

Příklad 13.18 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

$D_f = \mathbb{R}$

- *průsečíky s osami souřadnic a funkční hodnoty v zajímavých bodech: Platí*

$$x = 0 \implies f(0) = -2,$$
$$f(x) = 0 \implies x = 2.$$

Funkce má tedy průsečíky $[2, 0]$ *a* $[0, -2]$. *Pro limity v nekonečnech platí* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 1$.

- *sudost, lichost, periodicita*

Funkce není periodická, ani sudá či lichá.

- *spojitost*

Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru.

- *asymptoty: Funkce nemá svislé asymptoty. Pro asymptoty v nekonečnech platí*

$$\begin{aligned}
k_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x\sqrt{x^2+1}} = 0,\\
q_1 &= \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1,\\
k_2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x\sqrt{x^2+1}} = 0,\\
q_2 &= \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1.
\end{aligned}$$

Funkce má tedy v $+\infty$ *asymptotu* $y = 1$ *a v* $-\infty$ *asymptotu* $y = -1$.

- *monotonie: Pro* $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x-2)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1+2x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Jediný podezřelý bod z extrému je $x = \frac{-1}{2}$. *Zároveň*

  - $f'(x)$ *je na intervalu* $(-\infty, -\frac{1}{2})$ *záporná, tedy funkce* f *je na intervalu* $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$ *ostře klesající,*
  - *naopak na intervalu* $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ *je* $f'(x)$ *kladná a* f *je tedy na intervalu* $\langle -\frac{1}{2}, +\infty)$ *ostře rostoucí.*

Z monotonie pozorujeme, že bod $x = -\frac{1}{2}$ *je ostré lokální minimum.*

- *konvexnost, konkávnost, inflexní body: Pro* $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - (1+2x)\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^3} = -\frac{4x^2+3x-2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

Pozorujeme, že $f''(x)$ *je na intervalu* $(-\infty, \frac{-3-\sqrt{41}}{8})$ *a na intervalu* $(\frac{-3+\sqrt{41}}{8}, +\infty)$ *záporná, tedy funkce* f *je na intervalech* $(-\infty, \frac{-3-\sqrt{41}}{8}\rangle$ *a* $\langle\frac{-3+\sqrt{41}}{8}, +\infty)$ *ryze konkávní, naopak na intervalu* $(\frac{-3-\sqrt{41}}{8}, \frac{-3+\sqrt{41}}{8})$ *je* $f''(x)$ *kladná a* f *je tedy na intervalu* $\langle\frac{-3-\sqrt{41}}{8}, \frac{-3+\sqrt{41}}{8}\rangle$ *konvexní.*

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 9.*

Příklad 13.19 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}$

- *průsečíky s osami souřadnic:*

  Platí

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies f(0) = 1, \\ f(x) = 0 &\implies x \notin \mathbb{R}, \end{aligned}$$

  a tedy bod $[0, 1]$ *je jediný průsečík. Pro limity v nekonečnech platí* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Jelikož

$$f(-x) = \frac{1}{1+x^2} = f(x),$$

  je funkce sudá.

- *spojitost*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru.

- *asymptoty: Funkce nemá svislé asymptoty. Pro asymptoty v nekonečnech platí*

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} = 0, \\ q_1 &= \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \\ k_2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} = 0, \\ q_1 &= \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0. \end{aligned}$$

  Dostáváme tedy stejnou asymptotu $y = 0$.

- *monotonie: Pro* $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

  Jediný podezřelý bod z extrému je $x = 0$. *Zároveň*

– *$f'(x)$ je na intervalu $(0,+\infty)$ záporná, tedy funkce f je na $\langle 0,+\infty)$ intervalu ostře klesající,*

– *naopak na intervalu $(-\infty,0)$ je $f'(x)$ kladná a f je tedy na intervalu $(-\infty,0\rangle$ ostře rostoucí.*

Bod $x=0$ je tedy ostré lokální maximum.

- *konvexnost, konkávnost, inflexní body:*

  Pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)+8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}.$$

  Pozorujeme, že $f''(x)$ je na intervalu $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$ a na intervalu $(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$ kladná, tedy funkce f je na intervalech $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\rangle$ a $\langle\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$ ryze konvexní. Naopak na intervalu $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ je $f''(x)$ záporná a f je tedy na intervalu $\langle-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\rangle$ ryze konkávní.

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 9.*

Příklad 13.20 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- *průsečíky s osami souřadnic a limity v zajímavých bodech:*

  Platí

$$\begin{aligned} x=0 &\implies f(0)=0,\\ f(x)=0 &\implies x=0 \vee x=1. \end{aligned}$$

  Tedy body $[0,0]$ a $[1,0]$ jsou průsečíky s osami. Zároveň pro limity platí

$$\lim_{x\to\pm\infty} = \pm\infty, \lim x \to -1\pm = -\infty.$$

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Funkce nemá žádnou z uvedených vlastností.

- *spojitost:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru. Funkce je nespojitá v bodě $x=-1$, jedná se o nespojitost druhého druhu.

- *asymptoty:*

  Existuje svislá asymptota $x = -1$. Pro asymptoty v nekonečnech dostáváme

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(x-1)}{x(x^2+1)} = 1,\\
q_1 &= \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2-x}{(x+1)^2} = -3,\\
k_1 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(x-1)}{x(x^2+1)} = 1,\\
q_1 &= \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2-x}{(x+1)^2} = -3.
\end{aligned}
$$

  Dostáváme tedy asymptotu ve tvaru $y = x - 3$ u obou nekonečen.

- *monotonie:*

  Pro $x \in D_f$ platí

$$
f'(x) = \frac{(3x^2-2x)(x^2+2x+1)-(x^3-x^2)(2x+2)}{(x+1)^4} = \frac{x(x^2+3x-2)}{(x+1)^3}.
$$

  Podezřelé body z extrémů jsou $x \in \{0, -3 \pm \sqrt{17}\}$. Pozorujeme

  - *$f'(x)$ je na intervalech $(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, -1)$ a $(0, \frac{-3+\sqrt{17}}{2})$ záporná, tedy funkce f je na intervalech $\langle\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, -1\rangle$ a $\langle 0, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\rangle$ ostře klesající,*
  - *naopak na intervalech $(-\infty, \frac{-3-\sqrt{17}}{2})$, $(-1, 0)$ a $(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, +\infty)$ je $f'(x)$ kladná a f je tedy na intervalech $(-\infty, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\rangle$, $\langle -1, 0\rangle$ a $\langle\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, +\infty)$ ostře rostoucí.*

  Z monotonie plyne, že body $x = 0$ a $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ jsou ostrá lokální maxima, bod $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ je ostré lokální minimum.

- *konvexnost, konkávnost, inflexní body:*

  Pro $x \in D_f$ platí

$$
f''(x) = \frac{(3x^2+6x-2)(x+1)^3 - 3(x^3+3x^2-2x)(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{2(5x-1)}{(x+1)^4}.
$$

  Pozorujeme, že $f''(x)$ je na intervalu $(\frac{1}{5}, +\infty)$ kladná, tedy funkce f je na intervalu $\langle\frac{1}{5}, +\infty)$ ryze konvexní, naopak na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, \frac{1}{5})$ je $f''(x)$ záporná a f je tedy na intervalech $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle -1, \frac{1}{5}\rangle$ ryze konkávní.

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 9.*

Příklad 13.21 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

Postup řešení:

- *definiční obor*

$$\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \le 1 \Leftrightarrow (1-x^2)^2 \le (1-x^2)^2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Definiční obor D_f jsou tedy všechna reálná čísla.

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{1+x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Máme tedy pouze jeden průsečík v počátku $[0,0]$. Pro limitu v $\pm\infty$ platí $\lim\limits_{xto\pm\infty} f(x) = \pi$.

- *případnou sudost, lichost, periodicitu:*

Jelikož $f(-x) = f(x)$ je funkce je sudá, budeme tedy vyšetřovat pouze na $\langle 0, +\infty)$.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

Funkce je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru

- *existenci asymptot (svislých i těch v nekonečnech), Pro asymptotu v $+\infty$ platí*

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arccos\left(\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}\right)}{x} = 0,\\ q_1 &= \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi. \end{aligned}$$

Funkce má tedy v $+\infty$ asymptotu $y = \pi$.

- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

Pro $x > 0$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Funkce je tedy na $\langle 0, +\infty)$ ostře rostoucí. Jediným podezřelým bodem z extrému je bod $x = 0$, jelikož v tomto bodě derivace neexistuje (pro $x < 0$ je $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$) díky Daurboxově větě. V tomto bodě je tedy ostré lokální minimum.

- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x > 0$ platí
$$f''(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2}2x = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}.$$
  Na intervalu $\langle 0, +\infty)$ je tedy funkce ryze konkávní. Inflexní body na tomto intervalu neexistují.

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 9.*

Příklad 13.22 *Vyšetřete průběh funkce*
$$f(x) = |x+2|e^{-\frac{1}{x}}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor*

  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Průsečík s osou y není, s osou x je průsečík $[-2, 0]$. Limity v zajímavých bodech:
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty.$$

- *případnou sudost, lichost, periodicitu:*

  Funkce nemá žádnou s těchto vlastností.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru. Funkce je nespojitá v bodě $x = 0$ (2. druhu).

- *existenci asymptot:*

  Existuje svislá asymptota $x = 0$. Pro asymptoty v nekonečnech platí
$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = 1,$$
$$q_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1-e^{\frac{1}{x}})+2}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} -x\underbrace{\frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}}}_{\to 1}\frac{1}{x} + \frac{2}{e^{\frac{1}{x}}} = -1+2 = 1,$$
$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1+\frac{2}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = -1,$$
$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x(1-e^{\frac{1}{x}})+2}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to-\infty} +x\underbrace{\frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}}}_{\to 1}\frac{1}{x} - \frac{2}{e^{\frac{1}{x}}} = 1-2 = -1,$$
  U $+\infty$ dostáváme asymptotu $y = x+1$, u $-\infty$ asymptotu $y = -x-1$.

- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Pro první derivaci platí

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{x+2}{x^2}\right), & x \in (-2,0) \cup (0,+\infty) \\ -e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{x+2}{x^2}\right), & x \in (-\infty,-2) \end{cases}$$

  Z Darbouxovy věty derivace v bodě -2 neexistuje. O znaménku derivace rozhodne výraz $x^2 + x + 2$. Ten je vždy kladný. Funkce je tedy ostře rostoucí na intervalu $(0, +\infty)$, ostře rostoucí na intervalu $\langle -2, 0)$ a ostře klesající na $(-\infty, -2\rangle$. Jediným podezřelým bodem z extrému je bod $x = -2$, kde derivace neexistuje. Z monotonie plyne, že $x = -2$ je ostré lokální minimum.

- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Druhá derivace funkce f má tvar

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}(2-3x), & x \in (-2,0) \cup (0,+\infty) \\ -\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}(2-3x), & x \in (-\infty,-2) \end{cases}$$

  Pozorujeme, že funkce je na intervalu $\langle \frac{2}{3}, +\infty)$ ryze konkávní, na $(0, \frac{2}{3}\rangle$ ryze konvexní, na $\langle -2, 0)$ ryze konvexní a ryze konkávní na $(-\infty, -2\rangle$

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 10.*

Příklad 13.23 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right).$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Průsečík s osou x neexistuje, s osou y máme průsečík $[0, f(0)] = [0, -\frac{\pi}{4}]$. Pro limity v nekonečnech platí

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Funkce je sudá, budeme ji tedy vyšetřovat pouze na $D_f \bigcap \langle 0, +\infty)$.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru. Pro jednostranné limity v bodě 1 *platí*

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = +\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 1-} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

  V bodě 1 *je tedy nespojitost typu 'skok'.*

- *asymptoty:*

  Svislá asymptota je $x = 1$. *Pro asymptotu v* $+\infty$ *platí*

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$
$$q_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) - k_1 x = \frac{\pi}{4}.$$

- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ *platí*

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2} \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{x^4+1}.$$

  Funkce je tedy ostře klesající na intervalu $\langle 0, 1)$ *a na intervalu* $(1, +\infty)$. *Jediným podezřelým bodem z extrému je* $x = 0$. *Jelikož* $f'(x) > 0$ *na intervalu* $(-1, 0)$ *je bod* $x = 0$ *ostré lokální maximum.*

- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ *platí*

$$f''(x) = -2\frac{1(x^4+1) - x(4x^3)}{(x^4+1)^2} = \frac{6x^4-2}{(x^4+1)^2}.$$

  Pro $0 < x < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ *je* $f''(x) < 0$, *pro* $x > \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ *je* $f''(x) > 0$. *Z toho plyne, že funkce* f *je ryze konkávní na intervalu* $\langle 0, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\rangle$, *ryze konvexní na* $\langle \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, 1)$ *a ryze konvexní na* $(1, +\infty)$.

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 10.*

Příklad 13.24 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor*

  $D_f = \mathbb{R}$
- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Existuje jediný průsečík $[0, 1]$. *Limity v nekonečnech mají hodnotu* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = 0$.
- *sudost, lichost, periodicita:*

  Funkce je sudá. Budeme ji vyšetřovat na $\langle 0, +\infty)$
- *spojitost, druhy bodů nespojitosti,*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru.
- *asymptoty:*

  Svislé asymptoty neexistují. Pro asymptotu v $+\infty$ *platí*

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$
$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

  Dostáváme tedy asymptotu $y = 0$.
- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Pro $x \geq 0$ *platí*

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}.$$

  Funkce je tedy na intervalu $\langle 0, +\infty)$ *ostře klesající. Jediným podezřelým bodem z extrém je bod* $x = 0$. *Z monotonie funkce na okolí lze usoudit, že* $x = 0$ *je ostré lokální maximum.*
- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x \geq 0$ *platí*

$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(-2x) = 2e^{-x^2}\left(-1 + 2x^2\right).$$

  Inflexním bodem je $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Funkce je ryze konvexní na intervalu* $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ *a ryze konkávní na intervalu* $\langle 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$
- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 10.*

Příklad 13.25 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = |x| + \operatorname{arctg}|x - 1|.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Pro $x \in \mathbb{R}$ *je jistě* $f(x) > 0$*, tedy průsečík s osou* x *neexistuje. S osou* y *máme průsečík* $[0, f(0)] = [0, \operatorname{arctg} 1] = [0, \frac{\pi}{4}]$*. Zároveň platí* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$*.*

- *případnou sudost, lichost, periodicitu:*

  Funkce nemá žádnou z vlastností.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru.

- *asymptoty: Svislé asymptoty neexistují. Pro asymptotu v* $+\infty$ *platí*

  $$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} + \frac{\operatorname{arctg}|x-1|}{x} = 1 \\ q_1 &= \lim_{x\to+\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x-1) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

  V $+\infty$ *je tedy asymptota tvaru* $y = x + \frac{\pi}{2}$*. V* $-\infty$ *dostáváme*

  $$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} + \frac{\operatorname{arctg}|x-1|}{x} = -1 \\ q_2 &= \lim_{x\to-\infty} f(x) - k_2 x = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(-(x-1)) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

  V $-\infty$ *je tedy asymptota tvaru* $y = -x + \frac{\pi}{2}$*.*

- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *platí*

  $$f'(x) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{1+[-(x-1)]^2}(-1) = \frac{x^2-2x+3}{2x-x^2-2} & x \in (-\infty, 0) \\ 1 + \frac{1}{1+[-(x-1)]^2}(-1) = \frac{-(x-1)^2}{2x-x^2-2}, & x \in (0, 1) \\ 1 + \frac{1}{1+[(x-1)]^2} = \frac{x^2-2x+3}{x^2-2x+2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

  Z Darbouxovy věty plyne, že derivace v bodech $\{0, 1\}$ *neexistuje. Jelikož pro* $x \in (-\infty, 0)$ *je* $f'(x) < 0$ *je funkce na intervalu* $(-\infty, 0\rangle$ *ostře klesající. Na intervalu* $x \in (0, 1)$ *je* $f'(x) > 0$ *a tedy funkce je na* $\langle 0, 1\rangle$ *ostře rostoucí. Na posledním intervalu* $(1, +\infty)$ *je* $f'(x)$ *opět kladná, funkce opět ostře roste na intervalu* $\langle 1, +\infty)$*. Jediné podezřelé body z extrému jsou body* $\{0, 1\}$*. Z monotonie funkce na okolí těchto bodů plyne, že* $x = 0$ *je ostré lokální minimum a* $x = 1$ *není extrém.*

- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *platí*

  $$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(x-1)}{(2x-x^2-2)^2} & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{2(x-1)}{(2x-x^2-2)^2}, & x \in (0, 1) \\ \frac{-2(x-1)}{(x^2-2x+2)^2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Pozorujeme, že funkce je na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ ryze konkávní, na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ ryze konkávní a na intervalu $\langle 1, +\infty)$ ryze konkávní.

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 10.*

Příklad 13.26 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{1+x}}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Průsečník s osou y je $[0, f(0)] = [0, -1]$. S osou x máme průsečík $[f^{-1}(0), 0] = [1, 0]$. Zároveň platí

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-1+} f(x) = 0, \lim_{x\to-1-} f(x) = -\infty.$$

- *případnou sudost, lichost, periodicitu:*

  Funkce nemá žádnou z těchto vlastností.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru. Funkce je nespojitá pouze v bodě $x = -1$ (2.druhu).

- *asymptoty:*

  Existuje svislá asymptota $x = -1$. Pro asymptotu v $+\infty$ platí

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{x}{1+x}} = e,$$

$$q_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x\to+\infty} (x-1)e^{\frac{x}{1+x}} - ex = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{x}{1+x}} - e\right) - e^{\frac{x}{1+x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -e\frac{x}{x+1}\left(\frac{e^{\frac{-1}{1+x}} - 1}{\frac{-1}{1+x}}\right) - e^{\frac{x}{1+x}} = -2e.$$

V $+\infty$ je tedy asymptota tvaru $y = ex - 2e$. V $-\infty$ dostáváme

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{x}{1+x}} = e,$$

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x\to-\infty} (x-1)e^{\frac{x}{1+x}} - ex = \lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{x}{1+x}} - e\right) - e^{\frac{x}{1+x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -e\frac{x}{x+1}\left(\frac{e^{\frac{-1}{1+x}} - 1}{\frac{-1}{1+x}}\right) - e^{\frac{x}{1+x}} = -2e.$$

V $-\infty$ je tedy asymptota tvaru $y = ex - 2e$.

- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *platí*

$$f'(x) = e^{\frac{x}{1+x}} \frac{x(x+3)}{(1+x)^2}.$$

  Jelikož pro $x \in (-\infty, -3)$ *a* $x \in (0, \infty)$ *je* $f'(x) > 0$ *je funkce na intervalech* $(-\infty, -3\rangle$ *a* $\langle 0, \infty)$ *ostře rostoucí. Na intervalech* $x \in (-3, -1)$ *a* $x \in (-1, 0)$ *je* $f'(x) < 0$ *a funkce je ostře klesající na intervalech* $\langle -3, -1)$ *a* $(-1, 0\rangle$*. Jediné podezřelé body z extrému jsou body* $\{-3, 0\}$*. Z monotonie funkce na okolí těchto bodů plyne, že* $x = 0$ *je ostré lokální minimum,* $x = -3$ *je ostré lokální maximum.*

- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *platí*

$$f''(x) = e^{\frac{x}{1+x}} \frac{5x+3}{(1+x)^4}$$

  Pozorujeme, že funkce je na intervalech $(-\infty, -1\rangle$ *a* $\langle -1, -\frac{3}{5}\rangle$ *ryze konkávní a na intervalu* $\langle -\frac{3}{5}, +\infty)$ *ryze konvexní.*

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 11.*

Příklad 13.27 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Průsečík s osou y je $[0, f(0)] = [0, 0]$*. S osou x máme průsečík* $[f^{-1}(0), 0] = [0, 0]$*. Zároveň platí* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ *a* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$*.*

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Jelikož $f(-x) = -xe^{-x^2} = -f(x)$*, je funkce lichá.*

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru.

- *asymptoty:*

  Svislé asymptoty neexistují. Pro asymptotu v $+\infty$ *platí*

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0,$$
$$q_1 = \lim_{x \to +\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x \to +\infty} xe^{-x^2} - 0x = 0.$$

V $+\infty$ je tedy asymptota tvaru $y = 0$. V $-\infty$ dostáváme

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0,$$
$$q_2 = \lim_{x \to -\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x \to -\infty} x e^{-x^2} - 0x = 0.$$

V $-\infty$ je tedy asymptota tvaru $y = 0$.

- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Pro $x \in \mathbb{R}$ platí

  $$f'(x) = e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right).$$

  Jelikož pro $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ je $f'(x) < 0$ je funkce intervalech $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ a $\langle\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ ostře klesající. Na intervalu $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ je $f'(x) > 0$ a funkce je tedy na intervalu $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ ostře rostoucí. Jediné podezřelé body z extrému jsou body $\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Z monotonie funkce na okolí těchto bodů plyne, že $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ je ostré lokální minimum, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ je ostré lokální maximum.

- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x \in \mathbb{R}$ platí

  $$f''(x) = -e^{-x^2} 2x\left(3 - 2x^2\right).$$

  Pozorujeme, že funkce je na intervalech $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\rangle$ a $\langle 0, \sqrt{\frac{3}{2}}\rangle$ ryze konkávní a na intervalech $\langle -\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\rangle$ a $\langle\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$ ryze konvexní.

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 11.*

Příklad 13.28 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Nemá průsečík s osou x ani y. Zároveň platí

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1, \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1,$$

  $$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0, \lim_{x \to 0-} f(x) = 0.$$

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Jelikož $f(-x) = -x \operatorname{arctg} -\frac{1}{x} = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = f(x)$, *je funkce sudá.*

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru. Funkce je nespojitá pouze v bodě $x = 0$ *(odstranitelná nespojitost).*

- *asymptoty: Svislé asymptoty neexistují. Pro asymptotu v* $+\infty$ *platí*

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0, \\ q_1 &= \lim_{x \to +\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x \to +\infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 1. \end{aligned}$$

  V $+\infty$ *je tedy asymptota tvaru* $y = 1$. *V* $-\infty$ *dostáváme*

$$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0, \\ q_2 &= \lim_{x \to -\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x \to -\infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 1. \end{aligned}$$

  V $-\infty$ *je tedy asymptota tvaru* $y = 1$.

- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *platí*

$$f'(x) = -\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

  Z Darbouxovy věty plyne, že derivace v bodě $\{0\}$ *neexistuje. Jelikož pro* $x \in (-\infty, 0)$ *je* $f'(x) < 0$ *je funkce na tomto intervalu ostře klesající. Na intervalu* $x \in (0, +\infty)$ *je* $f'(x) > 0$ *a funkce je ostře klesající. Jediný podezřelý bod z extrému je* $\{0\}$. *Z monotonie funkce na okolí tohoto bodu plyne, že* $x = 0$ *je ostré lokální minimum.*

- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *platí*

$$f''(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2}$$

  Pozorujeme, že funkce je na intervalech $(-\infty, 0)$ *a* $(0, +\infty)$ *ryze konkávní.*

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 11.*

Příklad 13.29 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \arcsin \cos x.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Průsečík s osou y je $[0, f(0)] = [0, 0]$. *Průsečíky s osou x jsou* $x = 0$ *nebo* $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ *Zároveň platí, že neexistuje ani jedna z limit v* $\pm\infty$.

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Jedná se o součin liché a sudé funkce. Funkce f je tedy lichá. Funkce není periodická.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru kromě $x = 0$. *V tomto bodě je nespojitost typu skok, jelikož*

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \lim_{x\to 0-} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

- *asymptoty:*

  Svislé asymptoty neexistují. Pro asymptotu v $+\infty$ *platí*

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sgn} x \arcsin \cos x}{x} = 0, \\ q_1 &= \lim_{x\to+\infty} f(x) - k_1 x \ldots \textit{ neexistuje.} \end{aligned}$$

  V $+\infty$ *asymptota neexistuje. V* $-\infty$ *dostáváme*

$$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sgn} x \arcsin \cos x}{x} = 0 \\ q_2 &= \lim_{x\to+\infty} f(x) - k_2 x \ldots \textit{ neexistuje.} \end{aligned}$$

  V $-\infty$ *asymptota rovněž neexistuje.*

- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-\sin x}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} = -\operatorname{sgn} \sin x & x \in (0, +\infty) \\ \frac{\sin x}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} = \operatorname{sgn} \sin x, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

  Derivaci v nule vyšetříme přímo z definice:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0+} \frac{\arcsin(\cos h)}{h} = +\infty, \\ \lim_{h\to 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= -\lim_{h\to 0-} \frac{\arcsin(\cos h)}{h} = +\infty, \end{aligned}$$

a tedy $f'(0) = +\infty$. Jelikož pro $x \in (0+2k\pi, \pi+2k\pi)$ a $x \in (0-2k\pi, -\pi-2k\pi)$, kde $k \in \mathrm{N}_0$ je $f'(x) < 0$ je funkce na těchto intervalech ostře klesající (včetně krajních bodů). Na intervalech $x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$ a $x \in (-\pi - 2k\pi, -2\pi - 2k\pi)$, kde $k \in \mathrm{N}_0$ je $f'(x) > 0$ a funkce je ostře klesající (včetně krajních bodů). Body podezřelé z extrému jsou $x = k\pi, k \in \mathrm{Z} \setminus \{0\}$. Z monotonie funkce na okolí tohoto bodu plyne, že $x = 2k\pi, k \in \mathrm{N}$ a $x = -\pi - 2k\pi, k \in \mathrm{N}_0$ jsou ostré lokální maxima a body $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathrm{N}_0$ a $x = -2k\pi, k \in \mathrm{N}$ jsou ostré lokální minima.

- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$f''(x) = 0.$$

  Pozorujeme, že funkce je po částech lineární.

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 11.*

Příklad 13.30 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \sinh \ln x.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}^+$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Nemá průsečík s osou y. S osou x pouze v $x = 1$. Zároveň platí $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim\limits_{x\to 0+} = -\infty$.

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Funkce nemá žádnou z těchto vlastností.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru. V bodě $x = 0$ je nespojitost druhého druhu.

- *asymptoty:*

  Funkce má svislou asymptotu $x = 0$. Pro asymptotu v $+\infty$ platí

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh \ln x}{x} = \frac{e^{\ln x} - e^{\ln \frac{1}{x}}}{2x} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2},$$
$$q_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x\to+\infty} \sinh \ln x - \frac{x}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} - \frac{x}{2} = 0.$$

  V $+\infty$ je tedy asymptota tvaru $y = \frac{x}{2}$. V $-\infty$ nemá smysl asymptotu vyšetřovat, kvůli omezení definičního oboru na $\mathbb{R}^+$.

- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Pro $x \in \mathbb{R}^+$ *platí*

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cosh \ln x = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right).$$

  Jelikož pro $x \in \mathbb{R}^+$ *je* $f'(x) > 0$ *je funkce na* $(0, +\infty)$ *ostře rostoucí. Z toho plyne, že funkce nemá extrémy, ani lokální, ani globální.*

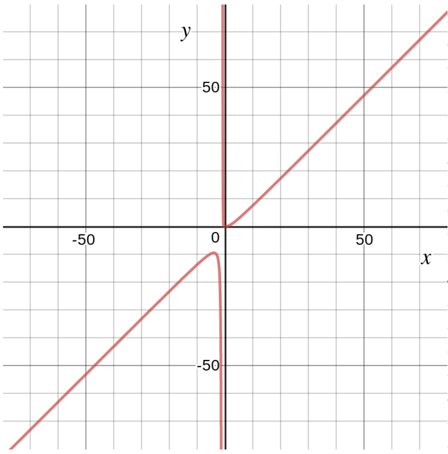
- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x \in \mathbb{R}^+$ *platí*

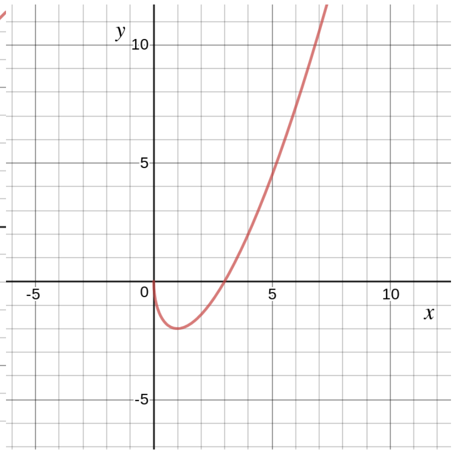
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \cosh \ln x + \frac{1}{x^2} \sinh \ln x = -\frac{1}{x^3}.$$

  Pozorujeme, že funkce je na intervalu a $(0, +\infty)$ *ryze konkávní.*

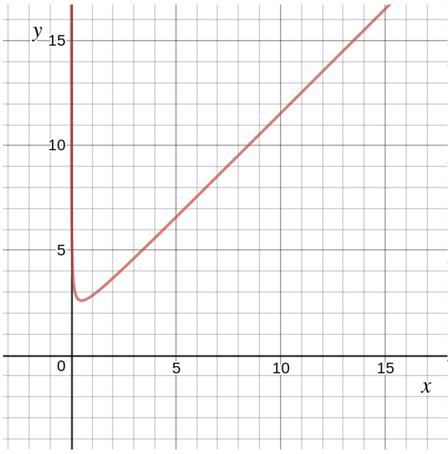
- *nakreslit graf funkce: viz. Obrázek 12.*



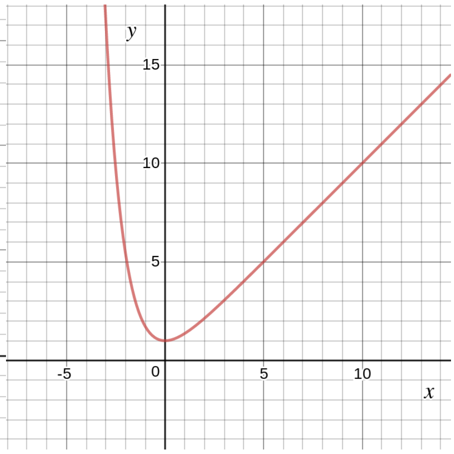
13.10 $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$



13.11 $f(x) = (x-3)\sqrt{3}$

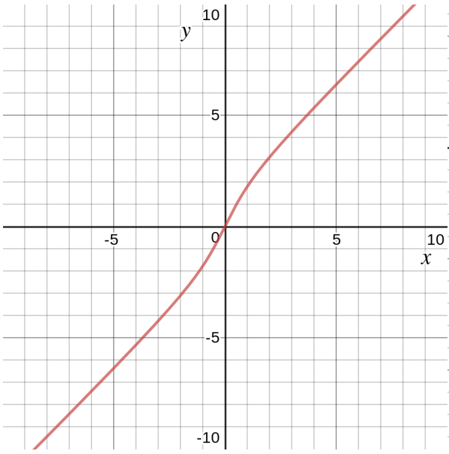


13.12 $f(x) = \frac{|1+x|^{\frac{2}{2}}}{\sqrt{x}}$

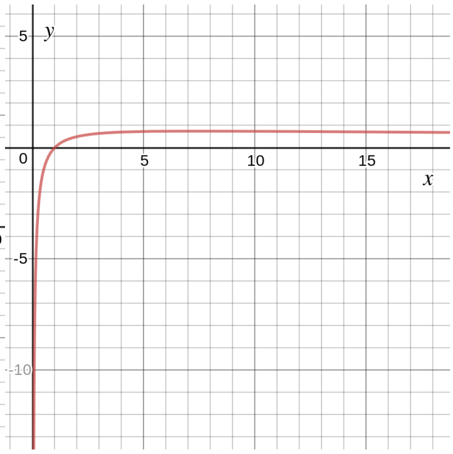


13.13 $f(x) = e^{-x} + x$

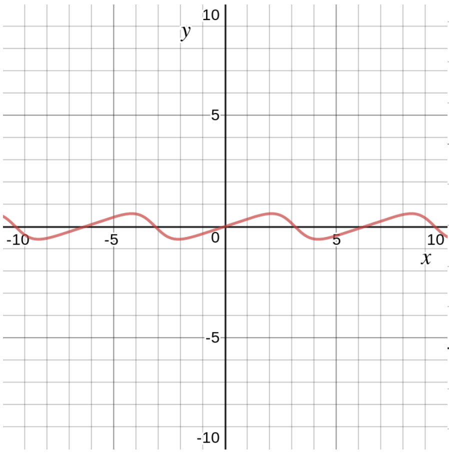
Obrázek 7:



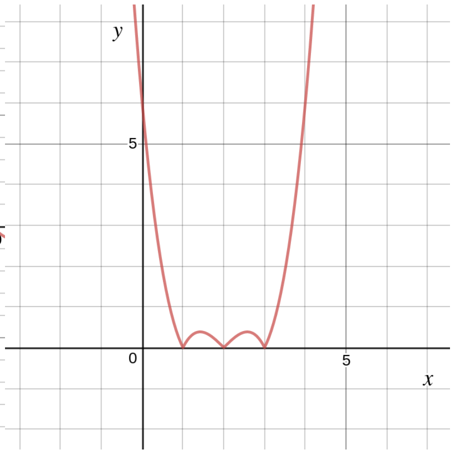
13.14 $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$



13.15 $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

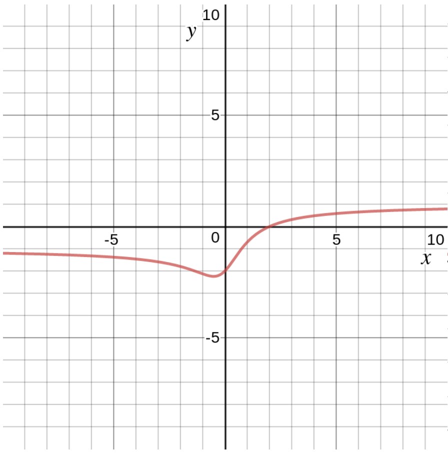


13.16 $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 2}$

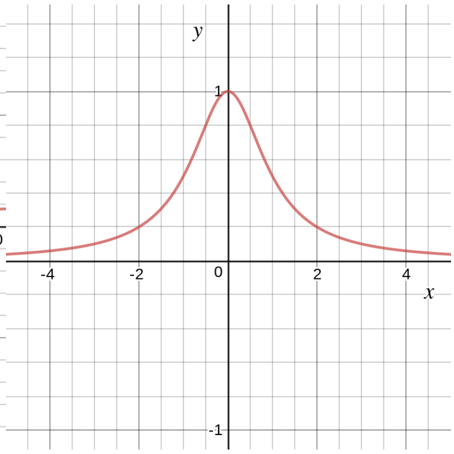


13.17 $f(x) = |x^3 - 6x^2 + 11x - 6|$

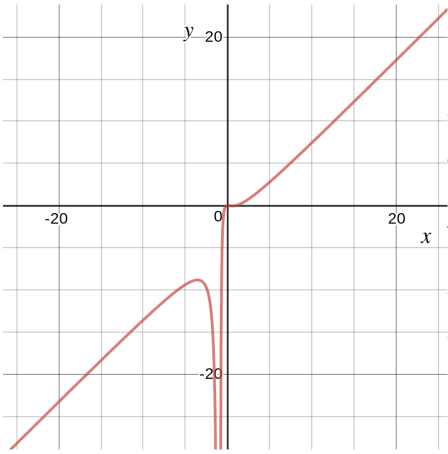
Obrázek 8:



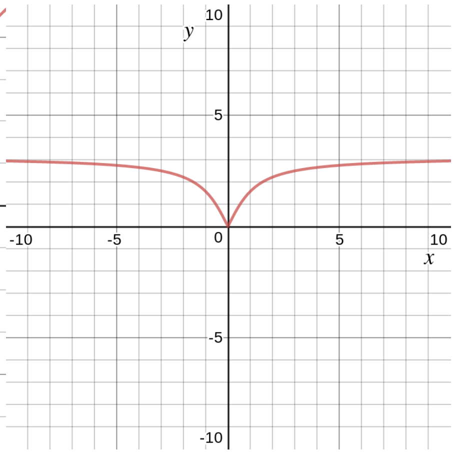
13.18 $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}$



13.19 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

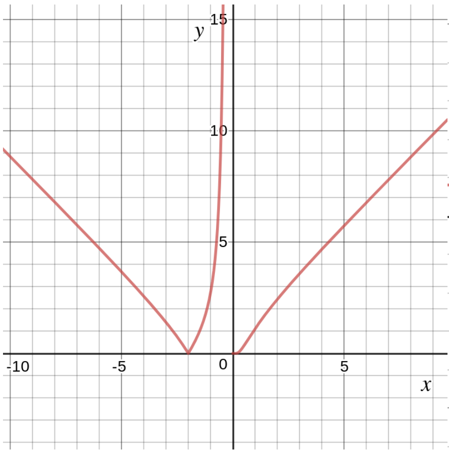


13.20 $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$

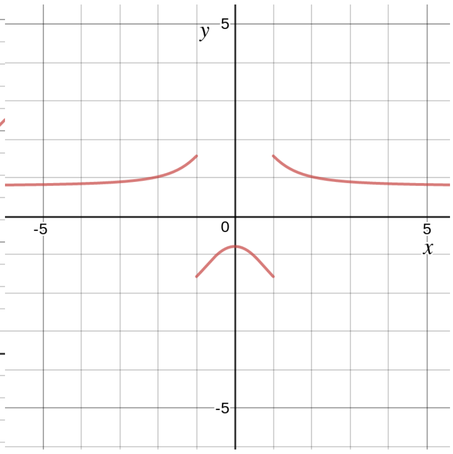


13.21 $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

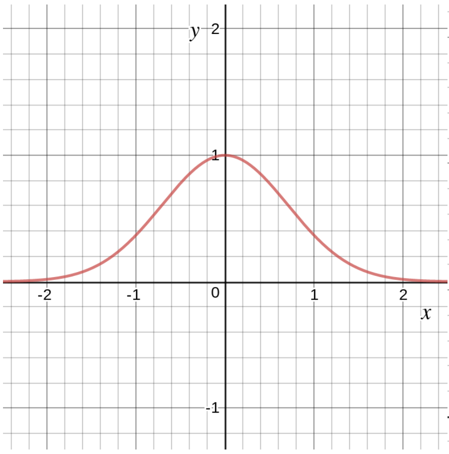
Obrázek 9:



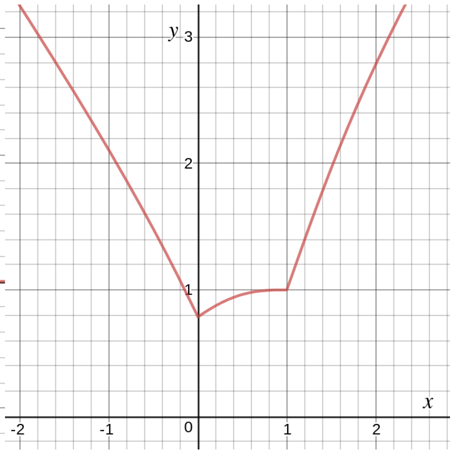
13.22 $f(x) = |x+2|e^{-\frac{1}{x}}$



13.23 $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

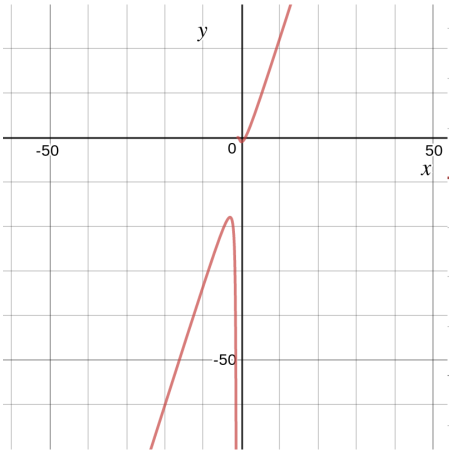


13.24 $f(x) = e^{-x^2}$

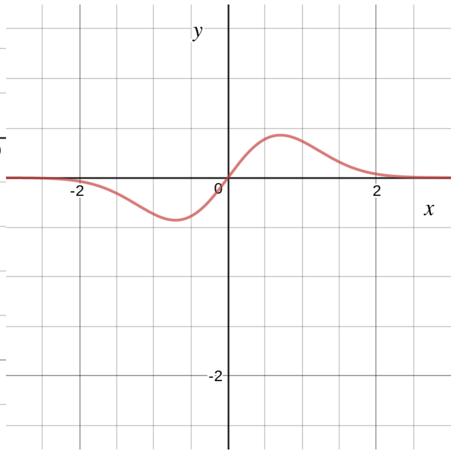


13.25 $f(x) = |x| + \operatorname{arctg}|x-1|$

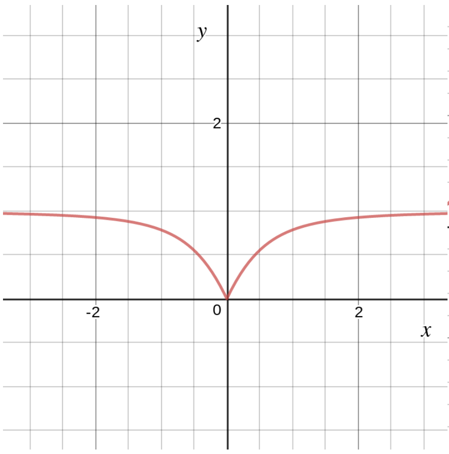
Obrázek 10:



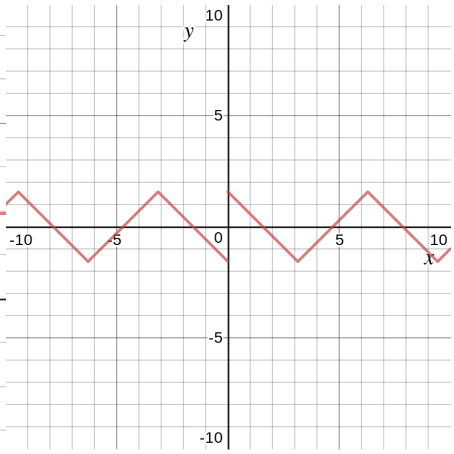
13.26 $f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{1+x}}$



13.27 $f(x) = xe^{-x^2}$

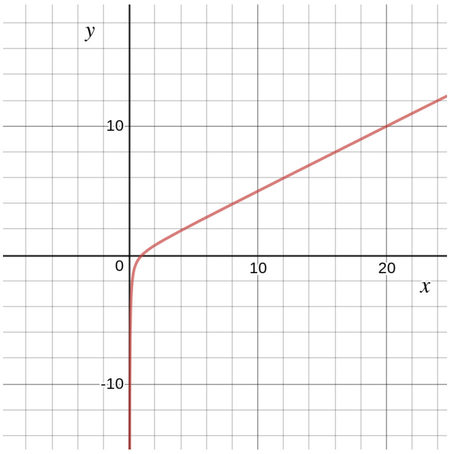


13.28 $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$



13.29 $f(x) = \operatorname{sgn} x \arcsin \cos x$

Obrázek 11:



13.30 $f(x) = \sinh \ln x$

Obrázek 12:

14 Teorie potřebná ke cvičením

14.1 Opakování středoškolské matematiky

14.1.1 Kvadratická rovnice

Kvadratická rovnice je rovnice ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$ a $a \neq 0$. Definujeme **diskriminant** $D := b^2 - 4ac$, díky čemuž můžeme pro její kořeny psát, že

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Dle hodnoty diskriminantu mohou nastat následující tři případy.

i. $D = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, tedy rovnice má jeden dvojnásobný kořen.

ii. $D > 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, tedy rovnice má dva různé kořeny.

iii. $D < 0$:

(a) V $\mathbb{R}$ řešení nemá.

(b) V $\mathbb{C}$ dostáváme dva komplexně sdružené kořeny $x_{1,2} = \frac{b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$.

14.1.2 Exponenciála, logaritmus

Exponenciála je funkce ve tvaru $y(x) = a^x$, kde $a \in \mathbb{R}^+$. Pro $a \in (0, 1)$ je funkcí klesající, pro $a \in (1, +\infty)$ je rostoucí. Číslo a nazýváme **základ**, číslo x **exponent**.

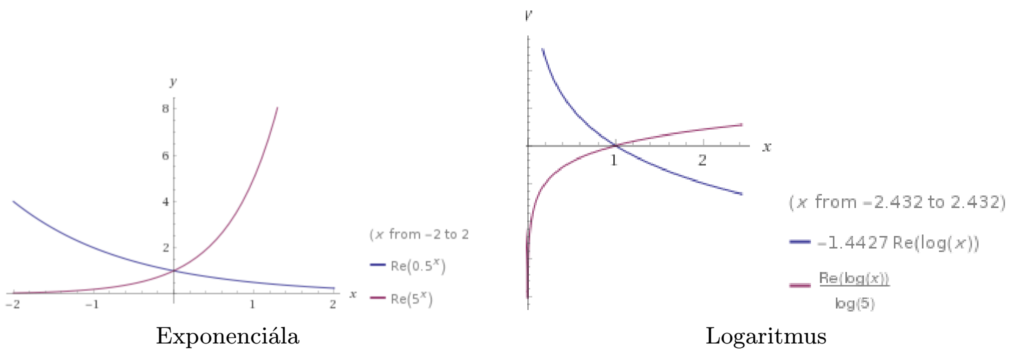
Logaritmus je inverzní funkce k exponenciále $y(x) = \log_a(x)$ kde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ a $x \in \mathbb{R}^+$, $\Leftrightarrow a^y = x$. Číslo a nazýváme **základ logaritmu (báze)**, číslo x **argument**, celkem mluvíme o logaritmu čísla x o základu a. Pro $a \in (0, 1)$ je funkcí klesající, pro $a \in (1, +\infty)$ je rostoucí. Vše na Obrázku 13.

Držíme následující konvence.

- Pro $a = 10$ mluvíme o desítkovém (dekadickém) logaritmu, píšeme $\log(x) := \log_{10}(x)$.
- Pro $a = e$ mluvíme o přirozeném logaritmu, $e \approx 2.71828$ nazýváme Eulerovým číslem, píšeme $\ln(x) := \log_e(x)$.
- Pro $a = 2$ mluvíme o binárním logaritmu, píšeme $\log_2(x)$.

Vlastnosti (pro $a \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}$, resp. $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}$):

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
- $(a^x)^y = a^{x\,y}$,
- $\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_b y$,
- $\log_a\left(\frac{a}{b}\right) = \log_a x - \log_b y$,
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$,
- $a^{\log_a x} = x$,
- $\log_a\left(x^t\right) = t\,\log_a x$.



Obrázek 13: Exponenciála a logaritmus

14.1.3 Goniometrické funkce

Definice z pravoúhlého trojúhelníku ABC, kde a, b jsou odvěsny, c přepona a α úhel u vrcholu A:

$$\sin\alpha := \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha := \frac{b}{c},$$

kde $D_f = \mathbb{R}$ a $H_f = \langle -1, 1\rangle$.

Definice z jednotkové kružnice, kde na ose x vystupuje cos, na ose y zase sin. Rychle můžeme vykoukat, že $\sin\beta = \sin(\pi - \beta)$ nebo $\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$.

Potom

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}, \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}, H_f = \mathbb{R},$$

a

$$\operatorname{cotg} x := \frac{\cos x}{\sin x}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{k\,\pi | k \in \mathbb{Z}\}, H_f = \mathbb{R}.$$

Goniometrické funkce jsou periodické s periodou $2\,\pi$, resp. π, tj. existuje p takové, že $f(x+p) = f(x)$ pro $\forall x \in D_f$.

Důležité hodnoty k zapamatování, lze je odvodit z rovnostranného (hodnoty pro $\pi/3$ a $\pi/6$ pomocí výšky délky $\sqrt{3}/2$) a rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku (hodnoty pro $\pi/4$).

-	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\cot x$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Důležité vzorce:

$$\begin{aligned}
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
\sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\
\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1 - \cos x}{2} \\
\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1 + \cos x}{2} \\
\sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\sin x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
\cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
\sin x &= \sin(\pi - x) \\
\cos x &= -\cos(\pi - x) \\
\sin(-x) &= -\sin x \ldots \text{lichá funkce} \\
\cos(-x) &= \cos x \ldots \text{sudá funkce}
\end{aligned}$$

14.2 Komplexní čísla

Komplexní čísla $\mathbb{C} = \left\{a + ib | a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\right\}$, kde i je **imaginární jednotka**, a je reálná část (Re), b imaginární část (Im). Pokud $a = 0$, číslo je **ryze imaginární**, pokud $b = 0$, jedná se o **reálné** číslo ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Označme $z = a + bi$, pak $\overline{z} := a - bi$ nazýváme číslo **komplexně sdružené** k z. **Absolutní hodnotu** pak definujeme jako $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Tvar $a + bi$ nazýváme **algebraický**, komplexní číslo z se dá ale vyjádřit ještě ve tvaru **goniometrickém** $z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$.

Věta 14.1 (Moivreova) *Pro $z \in \mathbb{C}$ s $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ a $n \in \mathbb{Z}$ platí*

$$z^n = |z|^n(\cos(\varphi n) + i \sin(\varphi n)).$$

Odtud můžeme vyjádřit odmocninu komplexního čísla

$$z^{1/n} = \left\{|z|^{1/n}(\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i \sin((\varphi + 2k\pi)/n)), k \in \widehat{\underline{n-1}}\right\}.$$

Pro mocniny imaginární jednotky, kde $n, k \in \mathbb{N}$, platí

$$i^n = \begin{cases} 1 & \dots \quad n = 4k, \\ i & \dots \quad n = 4k+1, \\ -1 & \dots \quad n = 4k+2, \\ -i & \dots \quad n = 4k+3. \end{cases}$$

14.3 Matematická logika

- cíl: formulace myšlenek jednoduše a přesně, umět najít pravdu
- výroková logika: **výrok** = tvrzení, o jehož pravdivosti lze rozhodnout (1 pravda, 0 nepravda); **složené výroky** = z výroků vznikají pomocí výrokových spojek

$\neg$	**negace**	není pravda, že ...
$\wedge$	**konjunkce**	a zároveň
$\vee$	**disjunkce**	nebo
$\Rightarrow$	**implikace**	jestliže ..., potom ...
$\Leftrightarrow$	**ekvivalence**	právě tehdy, když

- pravdivost výroků A, B vyhodnocujeme pomocí **pravdivostní tabulky** definující význam logických spojek

A	B	$\neg$ A	A $\wedge$ B	A $\vee$ B	A $\Rightarrow$ B	A $\Leftrightarrow$ B
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

- **tautologie** = výsledný výrok je vždy pravdivý (nezávisí na pravdivosti výroků, které obsahuje)
- **kontradikce** = výsledný výrok je vždy nepravdivý
- označme $V(x)$ výrokovou funkci na množině M
  - **obecný kvantifikátor** $\forall$: $V(x)$ je pravdivý pro $\forall x \in M$, pokud $V(a) = 1$ pro každé $a \in M$ (negace: $\exists$),
  - **existenční kvantifikátor** $\exists$: $\exists x \in M$, pro které je $V(x)$ pravdivý, pokud $V(a) = 1$ pro alespoň jedno $a \in M$ (negace: $\forall$),
  - **existence a jednoznačnost** $\exists!, \exists_1$: negace: neexistence nebo nejednoznačnost
- důležité vztahy, které dokážeme:
  - distributivní zákon: $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$,
    $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

- De Morganova pravidla: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$, $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- obměna implikace: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- negace implikace: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
- přepis implikace: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- negace ekvivalence: $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (\neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A))$

- typy důkazů:
  - **spor**: vyjdeme z negace, ukážeme blbost, pak tedy platí původní výrok
  - **přímý:** vyjdeme z předpokladů a (např. trikem) ukážeme požadovanou vlastnost
  - **nepřímý:** dokazujeme obměnu implikace
  - **matematická indukce:** předpokládáme, že
    1. nějaké tvrzení platí pro $n_0 \in \mathbb{N}$,
    2. platí-li tvrzení pro $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, pak platí také pro $n + 1$;

    pak dané tvrzení platí pro $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$

14.4 Zobrazení, vzor a obraz množiny

- **kartézský součin** dvou množin $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
- **zobrazení** (funkce) $f \subset A \times B : (\forall x, y, z)(((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f) \Rightarrow (y = z))$, zkráceně $(\forall x, y, z)((x, y) \in f \Leftrightarrow f(x) = y)$
- **definiční obor** $D_f = \{x | (\exists y)(y = f(x))\}$
- **obor hodnot** $H_f = \{y | (\exists x)(f(x) = y)\}$
- zobrazení množiny A do množiny B: $D_f = A \wedge H_f \subset B \Rightarrow f : A \to B$
- zobrazení z množiny A do množiny B: $D_f \subset A \wedge H_f \subset B \Rightarrow f : (A) \to B$
- **obraz** množiny M: $f(M) = \{y | (\exists x \in M)(y = f(x))\} = \{f(x) | x \in M\}$
- **vzor** množiny M: $f^{-1}(M) = \{x | (\exists y \in M)(f(x) = y)\}$
- **složené zobrazení** $(f \circ g)(x) := f(g(x))$, kde $f : A \to B$ a $g : C \to D$, $x \in D_{f \circ g} = g^{-1}(D_f) = g^{-1}(A)$
- vlastnosti zobrazení $f : A \to B$, kde M je libovolná množina:
  - **injektivní** (prosté): $(\forall x, y \in D_f)(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$
  - M-**surjektivní** (na M): pokud $M \subset H_f$
  - M-**bijektivní** (M vzájemně jednoznačné): současně injektivní a M-surjektivní
- **inverzní** zobrazení $f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$, pokud f je prosté zobrazení

14.4.1 Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou inverzní funkce ke goniometrickým, které ale nejsou prosté na celém svém definičním oboru. Proto nejprve provádíme restrikci (zúžení) na intervaly, kde již prosté jsou.

funkce	D_f	H_f
arcsin	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
arccos	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle 0, \pi \rangle$
arctan	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$
arccotg	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$

14.4.2 Hyperbolické a hyperbolometrické funkce

Hyperbolické funkce jsou definované jako

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Hyperbolometrické funkce jsou inverzní k hyperbolickým funkcím, ale opět bylo potřeba u některých při jejich definici provést příslušnou restrikci.

funkce	D_f	H_f	inverzní funkce	$D_{f^{-1}}$	$H_{f^{-1}}$
$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	argsinh$x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\langle 0, +\infty)$	argcosh$x$	$\langle 1, +\infty)$	$\langle 0, +\infty)$
$\tanh x$	$\mathbb{R}$	$(-1, 1)$	argtanh$x$	$(-1, 1)$	$\mathbb{R}$
cotgh$x$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\mathbb{R} - \langle -1, 1 \rangle$	argcotgh$x$	$\mathbb{R} - \langle -1, 1 \rangle$	$\mathbb{R} - \{0\}$

14.5 Množiny

- **Ekvivalence množin**: množina A je ekvivalentní s množinou B (neboli má stejnou mohutnost), pokud existuje bijekce $f : A \to B$ množiny A na množinu B, zn. $A \sim B$. Má následující vlastnosti:
  - *reflexivita:* $A \sim A$,
  - *symetrie:* $A \sim B \Rightarrow B \sim A$,
  - *tranzitivita:* $A \sim B \land B \sim C \Rightarrow A \sim C$.
- Množina je:
  - **konečná**, pokud je prázdná nebo je ekvivalentní s $\{1, \ldots, n\} =: \hat{n}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$,
  - **spočetná**, pokud je ekvivalentní s $\mathbb{N}$ (např. $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$),

  - **nejvýše spočetná**, pokud je spočetná nebo konečná,
  - **nespočetná**, pokud není spočetná ani konečná (např. $\mathbb{R}$).

- Sjednocení spočetného systému je opět spočetné.

14.5.1 Omezenost množin

- Množina $A \subset \mathbb{R}$ je **omezená shora**, pokud $(\exists H \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x \leq H)$. Každé takové H s uvedenou vlastností se nazývá **horní závora** množiny A.
- Množina $A \subset \mathbb{R}$ je **omezená zdola**, pokud $(\exists D \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x \geq D)$. Každé takové D s uvedenou vlastností se nazývá **dolní závora** množiny A.
- Množina $A \subset \mathbb{R}$ je **omezená**, pokud je současně omezená shora i zdola.

14.5.2 Maximum, minimum množiny

- Číslo $a \in A$ je **minimem** (nejmenším prvkem) množiny $A \subset \mathbb{R}$, pokud $(\forall x \in A)(x \geq a)$, zn. $a := \min A$.
- Číslo $b \in A$ je **maximem** (největším prvkem) množiny $A \subset \mathbb{R}$, pokud $(\forall x \in A)(x \leq b)$, zn. $a := \max A$.
- Ne každá množina má minimum či maximum, např. $\langle 1, 8)$ má minimum, ale nemá maximum. Proto zavádíme pojmy jako supremum a infimum.

14.5.3 Supremum, infimum

Věta 14.2 (O supremu) *Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Pak $\exists_1 \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ tak, že*

i. $(\forall x \in A)(x \leq \beta)$*, tj. β je horní závora množiny A,*

ii. $(\forall \beta' \in \mathbb{R}, \beta' < \beta)(\exists x \in A)(x > \beta')$*, tj. β je nejmenší ze všech horních závor.*

Číslo β nazýváme supremem množiny A, zn. $\beta = \sup A$.

Věta 14.3 (O infimu) *Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Pak $\exists_1 \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ tak, že*

i. $(\forall x \in A)(x \geq \alpha)$*, tj. α je dolní závora množiny A,*

ii. $(\forall \alpha' \in \mathbb{R}, \alpha' > \alpha)(\exists x \in A)(x < \alpha')$*, tj. α je největší ze všech dolních závor.*

Číslo α nazýváme infimem množiny A, zn. $\alpha = \inf A$.

Poznámky:

- Pokud v bodě 1. platí rovnost, bod 2. nemusíme ověřovat - α, resp. β je totiž prvkem množiny A a je tedy i minimem, resp. maximem, což je jistě největší dolní, resp. nejmenší horní závora této množiny.

- Má-li $A \subset \mathbb{R}$ maximum, pak $\sup A = \max A$, obdobně pro minimum.
- Výhodný přepis 2. bodu věty pro příklady:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)(x > \beta - \varepsilon),$$

  resp.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)(x < \alpha + \varepsilon).$$

- Prázdná množina: $\sup \emptyset = -\infty$ a $\inf \emptyset = +\infty$.

14.6 Číselné posloupnosti

Číselná posloupnost je zobrazení s definičním oborem rovným $\mathbb{N}$, tj. platí pro ně vše, co pro zobrazení (je to jen speciální případ).

Definice 14.1 (Posloupnost) *Každé zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do nějaké neprázdné množiny M nazýváme posloupnost. Pokud $M = \mathbb{R}$, resp. $M = \mathbb{C}$, nazýváme ho číselná posloupnost reálná, resp. komplexní. Značíme $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$.*

Posloupnost je:

- **omezená shora**, pokud $(\exists H \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq H)$, tj. obor hodnot je množina omezená shora;
- **omezená zdola**, pokud $(\exists D \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geq D)$, tj. obor hodnot je množina omezená zdola;
- **omezená**, pokud je obor hodnot omezená množina;
- **(ostře) klesající**, pokud $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq (<) a_{n+1})$;
- **(ostře) rostoucí**, pokud $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geq (>) a_{n+1})$;
- **(ryze) monotónní**, pokud je (ostře) klesající nebo (ostře) rostoucí.

14.6.1 Okolí bodu

Pro $\mathbb{R}$, kde $\varepsilon > 0, \alpha > 0$:

- $a \in \mathbb{R}$: ε-okolí bodu a definujeme jako $H_a(\varepsilon) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, tj. $x \in H_a(\varepsilon)$ splňují $|x - a| < \varepsilon$ (obdobně pravostranné a levostranné okolí);
- $a = +\infty$: α-okolí bodu $+\infty$ definujeme jako $H_{+\infty}(\alpha) := (\alpha, +\infty)$;
- $a = -\infty$: α-okolí bodu $-\infty$ definujeme jako $H_{-\infty}(\alpha) := (-\infty, \alpha)$.

Pro $\mathbb{C}$, kde $\varepsilon > 0, \alpha > 0$:

- $a \in \mathbb{C}$: ε-okolí bodu a definujeme jako $H_a(\varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} | |z - a| < \varepsilon\}$;
- $a = \infty$: α-okolí bodu ∞ definujeme jako $H_\infty(\alpha) := \{z \in \mathbb{C} | |z| > \alpha\}$.

14.6.2 Limita posloupnosti

Definice 14.2 (Limita číselné posloupnosti) *Řekneme, že daná reálná, resp. komplexní posloupnost $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ má limitu $a \in \overline{\mathbb{R}}$, resp. $a \in \overline{\mathbb{C}}$ právě tehdy, když*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{R})\,(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\,(a_n \in H_a(\epsilon)).$$

Značíme $a := \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Poznámka 14.1 *Definice říká, že v libovolném okolí H_a leží všechny členy posloupnosti (a_n) až na konečný počet výjimek.*

Rozepsání všech případů v $\mathbb{R}$:

- vlastní limita, tj.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{R})\,(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\,(|a_n - a| < \varepsilon);$$

- nevlastní limita, tj.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall \alpha > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{R})\,(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\,(a_n > \alpha),$$

  resp.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall \alpha > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{R})\,(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\,(a_n < -\alpha).$$

Věta 14.4 (O jednoznačnosti) *Každá číselná posloupnost může mít nejvýše jednu limitu.*

Definice 14.3 (Konvergentní posloupnost)

- *Má-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ limitu $a \in \mathbb{R}$, resp. $a \in \mathbb{C}$, nazývá se* konvergentní.
- *Posloupnost, která není konvergentní, se nazývá* divergentní.
  - *Posloupnost, která má limitu $\pm\infty$ (resp. ∞), se nazývá* podstatně divergentní.
  - *Reálná posloupnost, která nemá limitu, se nazývá* oscilující.
- *Je-li limita reálné, resp. komplexní číslo, nazývá se* vlastní, *je-li rovna $\pm\infty$, resp. ∞, nazývá se* nevlastní.

Definice 14.4 (Vybraná posloupnost) *Nechť je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ a nechť $(k_n)_{n=1}^{+\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{+\infty}$ nazýváme podposloupností neboli posloupností vybranou z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$.*

Definice 14.5 (Skorovybraná posloupnost) *Nechť je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ a nechť $(k_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost přirozených čísel s $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = +\infty$. Pak posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{+\infty}$ nazýváme posloupností skorovybranou z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$.*

Věta 14.5 (O limitě vybrané posloupnosti) *Nechť má* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *za limitu číslo* a*, pak i každá z ní vybraná má za limitu číslo* a*.*

Důsledek 14.1 *Lze-li z* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *vybrat dvě vybrané posloupnosti mající různé limity, pak* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *limitu nemá.*

Věta 14.6 (O limitě skorovybrané posloupnosti) *Nechť má* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *za limitu číslo* a*, pak i každá z ní skorovybraná má za limitu číslo* a*.*

Věta 14.7 (Existence a omezenost) *Každá konvergentní posloupnost (tj. má-li posloupnost konečnou limitu) je omezená. Každá reálná posloupnost s limitou* $\pm\infty$ *je omezená zdola, resp. shora a neomezená shora, resp. zdola.*

Důsledek 14.2 *Reálná posloupnost, která není omezená ani shora, ani zdola, nemá limitu.*

Poznámka 14.2 *Na omezenost a limitu (tj. existenci a její hodnotu) nemá vliv mírná modifikace posloupnosti, tj. přidání, ubrání, modifikace konečně mnoha členů.*

Věta 14.8 (Monotonie a limita) *Každá monotónní posloupnost má limitu.*

Poznámka 14.3 *Z předchozí věty plyne, že je-li posloupnost* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *rostoucí, pak* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n\}$*. Obdobně pro klesající posloupnost* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *je pak* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n\}$*.*

Věta 14.9 (Limita komplexní posloupnosti) *Mějme komplexní posloupnost* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$*, označme* $a_n = \alpha_n + i\beta_n$*, kde* $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$*. Pak posloupnost* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *konverguje právě tehdy, když posloupnosti* $(\alpha_n)_{n=1}^{+\infty}$ *a* $(\beta_n)_{n=1}^{+\infty}$*. Pokud je tato podmínka splněna, platí*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n + i \cdot \lim_{n\to\infty} \beta_n.$$

Definice 14.6 (Operace v $\overline{\mathbb{R}}$) *Pro všechna* $a, b \in \mathbb{R}$ *definujeme následující operace*

- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ *pro* $a > -\infty$,
- $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ *pro* $a < +\infty$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$ *pro* $a > 0$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty$ *pro* $a < 0$,
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$,
- $a - b = a + (-b)$ *pro* $\forall a, b$*, pro která je definovaná pravá strana,*
- $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ *pro* $\forall a, b$*, pro která je definovaná pravá strana,*
- $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$,

- $\sqrt[k]{+\infty} = +\infty$ *pro* $k \in \mathbb{N}$.

Poznámka 14.4 (Neurčité výrazy) *Nedefinujeme zejména tyto operace:* $(\pm\infty) \mp (\pm\infty)$, $\pm\infty \cdot 0$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\pm\infty}{0}$, $1^{\pm\infty}$, 0^0 *a* $(+\infty)^0$.

Věta 14.10 (Aritmetika limit) *Mějme reálně posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *a* $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$. *Pak platí*

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}$,

pokud mají výrazy na pravé straně smysl.

Věta 14.11 (Limita z odmocniny) *Buď* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *posloupnost nezáporných čísel, nechť* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ *a* $k \in \mathbb{N}$. *Pak* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.

Věta 14.12 (Limita z absolutní hodnoty) *Buď* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *číselná posloupnost. Je-li* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *pak* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. *Pokud je* $a = 0$ *nebo* $a = \infty$, *pak platí ekvivalence.*

Věta 14.13 (O nerovnostech)

- *Mějme reálné posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *a* $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ *mající limity v* $\overline{\mathbb{R}}$. *Je-li* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n < \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$, *pak* $(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall n > n_0, n \in \mathbb{N})(a_n < b_n)$.
- *Nechť existují limity posloupností* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *a* $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$. *Pokud* $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq b_n)$, *pak* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Věta 14.14 (Limita sevřené posloupnosti) *Nechť* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ *a* $(c_n)_{n=1}^{+\infty}$ *jsou reálné posloupnosti a nechť* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. *Pak platí následující*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(a_n \leq c_n \leq b_n) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Důsledek 14.3 *Nechť* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ *jsou reálné posloupnosti,* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *a posloupnost* $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ *je omezená. Pak* $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Poznámka 14.5 (Důležité limity) *Lze ukázat, že*

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ *pro* $a > 0$,

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ *pro* $a > 1$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 1$ *pro* $a = 1$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ *pro* $|a| \in (0, 1)$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n$ *neexistuje pro* $a \leq -1$ *(obdobně lze provést diskuzi v* $\overline{\mathbb{C}}$*).*

Věta 14.15 (O Eulerově čísle) *Označme pro všechna* $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \ c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Pak posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$*,* $(c_n)_{n=1}^{+\infty}$ *ostře rostou a* $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ *ostře klesá, pro* $\forall n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *a mají společnou limitu, jíž je iracionální číslo, označme ho* e*, ležící v intervalu* $(2, 3)$ *a platí pro* $\forall n \in \mathbb{N}$*, že* $e - c_n < \frac{1}{n \cdot n!}$*.*

Definice 14.7 (Eulerovo číslo) *Společná hodnota limit posloupností z předchozí věty nazýváme Eulerovým číslem, značíme* e*.*

Důsledek 14.4 *Buď* $(p_n)_{n=1}^{+\infty}$ *posloupnost reálných čísel taková, že* $\lim\limits_{n\to+\infty} |p_n| = +\infty$*. Pak platí, že* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$*.*

Věta 14.16 (Limita exponenciely a logaritmu) *Buď* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *reálná konvergentní posloupnost, pak* $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a_n} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}$*. Buď* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *posloupnost kladných reálných čísel s kladnou limitou, pak* $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln a_n = \ln \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$*. Pokud* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$*, pak* $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a_n} = +\infty$ *a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln a_n = +\infty$*. Pokud* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$*, pak* $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a_n} = 0$*.*

Definice 14.8 (Obecná mocnina) *Definujeme obecnou mocninu jako*

$$a^b = e^{b \ln a}.$$

Definice 14.9 (Hromadná hodnota) *Bod* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *nazveme hromadnou hodnotou reálné posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *právě tehdy, když existuje vybraná posloupnost* $(a_{k_n})_{n=1}^{+\infty}$ *z* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$*, která má limitu rovnu* a*, tj.* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{k_n} = a$*.*

Poznámka 14.6 *Když má* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *limitu, má jen jednu hromadnou hodnotu, a to* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$*.*

Definice 14.10 (Limes superior a limes inferior) *Největší hromadnou hodnotou dané reálné posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *nazýváme limes superior posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, *značíme* $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$. *Nejmenší hromadnou hodnotu* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *nazýváme limes inferior posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, *značíme* $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Věta 14.17 (Dobrý smysl předchozí definice) *Množina všech hromadných hodnot reálné posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *má největší a nejmenší prvek, tj. maximum a minimum.*

Věta 14.18 (Existence limity pomocí $\limsup$ **a** $\liminf$**)** *Pro každou reálnou posloupnost* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *platí, že* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ *existuje právě tehdy, když* $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$. *Existuje-li tedy limita, pak platí* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Věta 14.19 (Výpočet $\limsup$, $\liminf$**)** *Nechť vybrané posloupnosti* $\left(a_{k_n}^{(1)}\right)_{n=1}^{+\infty}$, $\left(a_{k_n}^{(2)}\right)_{n=1}^{+\infty}$, $\ldots$, $\left(a_{k_n}^{(m)}\right)_{n=1}^{+\infty}$ *s limitami* $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $\ldots$, $a^{(m)}$ *pokrývají původní reálnou posloupnost* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, *pak platí*

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \max\{a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}\}$$

a

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \min\{a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}\}.$$

Věta 14.20 (Bolzano-Cauchyovo kritérium konvergence pro číselné posloupnosti) *Číselná posloupnost je konvergentní právě tehdy, když je cauchyovská, tj.*

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists n_0 \in \mathbb{R})\, (\forall n > n_0, n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})(|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon).$$

Věta 14.21 (Stolzův vzorec) *Mějme dvě reálné posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *a* $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$. *Nechť* $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ *je ostře rostoucí posloupnost kladných čísel s* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. *Nechť existuje* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, *pak existuje i* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ *a je jí rovna.*

Věta 14.22 (Cauchyův vzorec) *Buď* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *posloupnost kladných čísel. Nechť existuje* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, *pak existuje i* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *a je jí rovna.*

14.7 Funkce

- Pod pojmem funkce rozumíme reálnou funkci reálné proměnné, tj. zobrazení f : $(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
- Pojmy jako supremum, infimum, maximum, minimum a omezenost funkce se vztahují k jejímu oboru hodnot.
- Klasicky definujeme pojmy týkající se *(ryzí) monotonie*, tj. (ostře) rostoucí, resp. klesající.

- Definujeme také *sudost*, tj. $f(x) = f(-x)$, *lichost*, tj. $-f(x) = f(-x)$ a *periodičnost* funkce, tj. $f(x+\ell) = f(x)$ pro $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$, $x+\ell \in D_f$. Pokud existuje minimum množiny všech čísel, s nimiž je funkce f periodická, nazýváme ho *základní periodou.*

- Mezi *elementární funkce* řadíme polynomy, racionální funkce, mocninné funkce, exponenciální funkce, logaritmy, goniometrické, cyklometrické funkce, hyperbolické a hyperbolometrické a ty, které vzniknou konečným počtem operací, složením či inverzí.

14.7.1 Hromadný bod množiny

Definice 14.11 (Hromadný bod, derivace množiny a izolovaný bod) *Bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se nazývá* hromadným bodem *množiny $A \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů z množiny A, tj. $(\forall H_a)\,(\exists x \in H_a \cap A - \{a\})$. Množinu všech hromadných bodů množiny A značíme A' a nazýváme ji též* derivace množiny *A. Bod $a \in A$, který není jejím hromadným bodem, se nazývá* izolovaný bod *množiny A.*

Příklady:

- $A' = \emptyset$ pro A konečnou, tj. konečná množina nemá žádný hromadný bod.
- Pro $A = \left\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\right\}$ a $B = A \cup \{0\}$ platí $A' = B' = \{0\}$.
- Hromadný bod množiny A může, ale nemusí být prvkem A. Příkladem budiž $A = \left\{(-1)^n \frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, pak $A' = \{-1, 1\}$.
- Pro $A = (0,1)$ je $A' = \langle 0,1\rangle$.
- $\mathbb{N}' = \{+\infty\}$, $\mathbb{Z}' = \{\pm\infty\}$, $\mathbb{Q}' = \overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}$.

14.7.2 Limita

Definice 14.12 (Limita funkce) *Nechť $f : (\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a $a \in D'_f$, tj. a je hromadný bod definičního oboru funkce f. Řekneme, že funkce f má v bodě a limitu $c \in \overline{\mathbb{R}}$ právě tehdy, když*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D_f \cap H_a(\delta) - \{a\})\,(f(x) \in H_c(\epsilon)),$$

zkráceně

$$(\forall H_c)\,(\exists H_a)\,(\forall x \in D_f \cap H_a - \{a\})\,(f(x) \in H_c).$$

Značíme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

Poznámka 14.7 *Limita funkce f v bodě a závisí na funkčních hodnotách funkce f v $H_a \cap D_f - \{a\}$, tj. nezávisí na tom, zda (a jak) je funkce definovaná v bodě a.*

Poznámka 14.8 *Definice lze ekvivalentně přepsat pro $a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ jako*

$$\lim_a f = c \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D_f,\, 0 < |x-a| < \delta) : |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Věta 14.23 (O jednoznačnosti) *Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

Věta 14.24 (Heineova věta) *Nechť f je funkce, $a \in D_f'$ a $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Pak platí $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ právě tehdy, když $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = c$ pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$, pro kterou platí pro $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in D_f - \{a\})$ a $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$.*

Definice 14.13 (Jednostranné limity) *Funkce f má v bodě a limitu zleva, resp. zprava rovnu c, pokud zúžení (restrikce) $f_{(-\infty,a)}$, resp. $(f_{(a,+\infty)})$ má v bodě a limitu c.*

Věta 14.25 (Rovnost limit zprava a zleva) *Buď a hromadným bodem $D_f \cap (-\infty, a)$ a $D_f \cap (a, +\infty)$. Pak funkce f má v bodě a limitu c právě tehdy, když limita f zprava i zleva v bodě a je rovna c.*

Věta 14.26 (Aritmetika limit funkcí) *Analogie jako u posloupností.*

Věta 14.27 (Limita z odmocniny funkce) *Analogie jako u posloupností.*

Věta 14.28 (Limita z absolutní hodnoty funkce) *Analogie jako u posloupností (ekvivalence platí pro $c = 0$).*

Věta 14.29 (O limitě složené funkce) *Nechť $a \in D_{f \circ g}'$, $b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ a $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, $\lim\limits_{y \to b} f(y) = c$ a platí*

$$(\exists H_a)\,(\forall x \in H_a \cap D_g - \{a\})\,(g(b) \neq c), \qquad \textit{nebo} \qquad (b \in D_f \wedge f(b) = c), \qquad \textit{nebo} \qquad b \notin D_f.$$

Pak

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = c.$$

Poznámka:

- Pokud je funkce g na okolí H_a prostá nebo b je nevlastní bod nebo f je spojitá, pak je podmínka splněna automaticky.
- Důležitost předpokladu předchozí věty: definujme $g(x) = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(y) = 1$ pro $y \neq 0$, $f(0) = 2$. Pak $\lim\limits_0 (f \circ g) = 2$, ale přitom $\lim\limits_0 g = 0$ a $\lim\limits_0 f = 1 \neq 2$.

Vybrané referenční limity:

$$\lim x \to 0 \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln\left((1+x)^{1/x}\right) = \ln\left(\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(e^x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(1+e^x)-1}=1$$

Pro $a>0$, $a\neq 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\cdot\ln a=\ln a$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\,(\sqrt[n]{e}-1)=|\text{Heine}|=\lim_{x\to+\infty}x(e^{1/x}-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x}=1$$

Věta 14.30 (O nerovnostech pro funkce) *Nechť $a\in\overline{\mathbb{R}}$ a f, g jsou reálné funkce.*

- *Nechť existují $\lim\limits_a f$ a $\lim\limits_a g$. Pak platí*

$$\lim_a f<\lim_a g\Rightarrow(\exists H_a)\,(\forall x\in D_f\cap D_g\cap H_a-\{a\})\,(f(x)<g(x)).$$

- *Nechť existují $\lim\limits_a f$ a $\lim\limits_a g$, existuje okolí H_a tak, že $H_a\cap D_f-\{a\}=H_a\cap D_g-\{a\}$, pak platí*

$$(\forall x\in H_a\cap D_f-\{a\})(f(x)\le g(x)\Rightarrow\lim_a f\le\lim_a g).$$

Věta 14.31 (O limitě sevřené funkce) *Nechť $a\in\overline{\mathbb{R}}$ a $\lim\limits_a f=\lim\limits_a g=c$. Nechť $H_a\cap D_f-\{a\}=H_a\cap D_g-\{a\}$, pak platí*

$$(\forall x\in H_a\cap D_f-\{a\})(f(x)\le h(x)\le g(x)\Rightarrow\lim_a h=c).$$

14.7.3 Spojitost

Definice 14.14 (Spojitost, bod spojitosti) *Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $a\in D_f$, tj. že a je bod spojitosti f, pokud platí*

$$(\forall H_{f(a)})\,(\exists H_a)\,(\forall x\in D_f\cap H_a)(f(x)\in H_{f(a)}).$$

Ekvivalentní formulace k definici: f je spojitá v bodě a právě tehdy, když

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(\forall x\in D_f,\,|x-a|<\delta)(f(x)\in H_{f(a)}).$$

Poznámka 14.9 *Každý izolovaný bod D_f je bodem spojitosti f. Funkce může být spojitá pouze v bodě svého definičního oboru.*

Věta 14.32 (Spojitost a limita) *Buď $a\in D_f\cap D'_f$. Pak f je spojitá v bodě a právě tehdy, když $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.*

Věta 14.33 *Platí následující tvrzení.*

i. *Funkce f je spojitá v bodě a právě tehdy, když je spojitá v bodě a zprava i zleva.*

ii. *Pokud funkce f, g jsou spojité v bodě a, jsou spojité v bodě a i funkce $|f|$, $f \pm g$, $f \cdot g$ a $\frac{f}{g}$ za předpokladu, že $g(a) \neq 0$.*

iii. *Buď $a \in D_f$. Pak platí, že f je spojitá v bodě a právě tehdy, když pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ prvků z D_f, pro niž $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, platí $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.*

iv. *Nechť ϕ je spojitá v bodě a, f je spojitá v bodě $\phi(a)$. Pak $f \circ \phi$ je spojitá v bodě a.*

v. *Elementární funkce jsou spojité ve všech bodech svého definičního oboru.*

Definice 14.15 (Body nespojitosti) *Bod $a \in D'_f$, který není bodem spojitosti funkce f, se nazývá* bod nespojitosti *funkce f. Rozlišujeme tři druhy.*

i. *Pokud existuje $\lim\limits_a f \in \mathbb{R}$ a ($\lim\limits_a f \neq f(a)$ nebo $a \notin D_f$), nazýváme a* ***bodem odstranitelné nespojitosti****.*

ii. *Pokud existují navzájem různé konečné jednostranné limity $\lim\limits_{a+} f$ a $\lim\limits_{a-} f$, tj. $\lim\limits_{a+} f \neq \lim\limits_{a-} f$, nazýváme a* ***bodem nespojitosti prvního druhu (skok)****.*

iii. *Pokud nenastává první, ani druhý případ, tj. alespoň jedna z jednostranných limit není konečná, nazýváme a* ***bodem nespojitosti druhého druhu****.*

14.7.4 Derivace a její výpočet

Definice 14.16 (Derivace funkce) *Nechť $a \in D_f \cap D'_f$. Limitu $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ nazýváme derivace funkce f v bodě a, zn. $f'(a)$. Je-li $f'(a) \in \mathbb{R}$ (tj. je konečná), říkáme, že f je diferencovatelná v bodě a (má vlastní derivaci). Je-li $f'(a) = \pm\infty$, mluvíme o nevlastní derivaci.*

Poznámka 14.10 *Z věty o limitě složené funkce dostaneme často používaný ekvivalentní zápis pro derivaci*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Věta 14.34 (Vztah derivace a spojitosti) *Nechť je funkce f diferencovatelná v bodě a, pak je f v bodě a spojitá.*

Věta 14.35 (Aritmetika derivací) *Nechť funkce f, g jsou diferencovatelné v bodě a, nechť $a \in D_\phi \cap D'_\phi$, kde $\phi = f \pm g$, resp. $f \cdot g$, resp. $\frac{f}{g}$. Pak platí*

i. $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$,

ii. $(f \cdot g)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)$,

iii. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{g^2(a)}$.

Funkce	Derivace	Definiční obor
x^α	$\alpha\, x^{\alpha-1}$	$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ x>0$
e^x	e^x	$\forall x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x\ \ln(a)$	$\forall a>0,\ x \in \mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\forall x>0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{\pi}{2}+k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\coth(x)$	$-\frac{1}{\sinh^2(x)}$	$\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\forall x \in (-1,1)$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\forall x \in (-1,1)$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{arc}\cot(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\arg\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$\arg\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\forall x>1$
$\arg\tanh(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\forall x \in (-1,1)$
$\arg\coth(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\forall x \in \mathbb{R}-\langle -1,1\rangle$

Tabulka 6: Tabulka derivací základních funkcí

Věta 14.36 (Derivace složené funkce) *Nechť funkce ϕ je diferencovatelná v bodě a, funkce f je diferencovatelná v bodě $g(a)$ a $a \in D'_{f\circ g}$. Pak $f\circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí*

$$(f\circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Věta 14.37 (Derivace inverzní funkce) *Nechť je funkce f spojitá a prostá na otevřeném intervalu J a diferencovatelná v bodě $x_0 \in J$, kde $f'(x_0) \neq 0$. Pak inverzní funkce f_J^{-1} je diferencovatelná v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí, že*

$$\left(f_J^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Věta 14.38 (Darbouxova) *Nechť je f spojitá v bodě a zprava a diferencovatelná na nějakém H_a^+. Pak platí, že*

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x),$$

pokud limita napravo existuje.

14.7.5 Lokální extrémy

Definice 14.17 (Lokální extrém) *Řekneme, že funkce f má v bodě a lokální maximum, resp. minimum právě tehdy, když $\exists H_a \subset D_f$ tak, že $\forall x \in H_a$ platí $f(x) \leq f(a)$, resp. $f(x) \geq f(a)$. Společný název pro lokální maximum a minimum je lokální extrém. Dále řekneme, že funkce f má v bodě a ostré lokální maximum, resp. minimum právě tehdy, když $\exists H_a \subset D_f$ tak, že $\forall x \in H_a - \{a\}$ platí $f(x) < f(a)$, resp. $f(x) > f(a)$.*

Věta 14.39 (Nutná podmínka pro lokální extrém) *Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Pak $f'(a) = 0$ nebo $f'(a)$ neexistuje.*

Věta 14.40 (Postačující podmínka pro lokální extrém) *Nechť funkce f je spojitá v bodě a a existuje $H_a^{\pm}$ tak, že f je (ostře) rostoucí, resp. klesající v H_a^- a f je (ostře) klesající, resp. rostoucí v H_a^+. Pak f má v bodě a (ostré) lokální maximum, resp. minimum.*

Věta 14.41 (O druhu extrému) *Nechť existuje H_a tak, že je f na H_a diferencovatelná. Nechť $f'(a) = 0$ a $f''(a) > 0$, resp. $f''(a) < 0$. Pak f má v bodě a ostré lokální minimum, resp. maximum.*

Věta 14.42 (Vztah znaménka derivace a monotonie) *Nechť f je spojitá na intervalu I. Nechť má f derivaci v každém bodě I^0. Pak pro $\forall x \in I^0$*

- *$f'(x) \geq 0$ právě tehdy, když f je na I rostoucí,*
- *$f'(x) \leq 0$ právě tehdy, když f je na I klesající,*
- *$f'(x) = 0$ právě tehdy, když f je na I konstantní,*
- *pokud $f'(x) > 0$, pak f je na I ostře rostoucí,*
- *pokud $f'(x) < 0$, pak f je na I ostře klesající.*

Poznámka 14.11 *První tři body v předchozí větě fungují tedy jako postačující i nutná podmínka, poslední dva body představují jen postačující podmínku. Příkladem budiž $f(x) = x^3$, jejíž derivace není v bodě 0 kladná (opravdu tedy nefunguje směr zpět).*

14.7.6 Konvexnost, konkávnost

Definice 14.18 (Konvexnost a konkávnost) *Řekneme, že funkce f je na intervalu $J \subset D_f$ konvexní, resp. konkávní, pokud pro $\forall x_1, x_2, x_3 \in J$, kde $x_1 < x_2 < x_3$, platí, že*

$$f(x_2) \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1),$$

resp.

$$f(x_2) \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1).$$

V případě ostrých nerovností mluvíme o ostré či ryzí konvexnosti, resp. konkávnosti.

Poznámka 14.12 *Předchozí definice říká, že bod* $[x_2, f(x_2)]$ *musí ležet pod, resp. nad úsečkou spojující body* $[x_1, f(x_1)]$ *a* $[x_3, f(x_3)]$ *(nebo na ní v případě neostré nerovnosti).*

Věta 14.43 (Postačující podmínka pro konvexnost, resp. konkávnost) *Nechť* f *je spojitá na intervalu* I *a diferencovatelná na intervalu* I^0*. Pak je-li* f' *(ostře) rostoucí, resp. klesající na* I^0*, je* f *(ryze) konvexní, resp. konkávní na* I*.*

Důsledek 14.5 *Nechť* f *je spojitá na* I *a pro* $\forall x \in I^0$ *platí, že* $f''(x) \geq 0$*, resp.* $f''(x) \leq 0$*. Pak je* f *na* I *konvexní, resp. konkávní. Platí-li ostré nerovnosti, mluvíme o ryzí konvexnosti či konkávnosti.*

Definice 14.19 (Inflexní bod) *Říkáme, že funkce* f *má v bodě* a *inflexi (inflexní bod) právě tehdy, když je diferencovatelná v bodě* a *a platí následující*

$$(\exists H_a)\,(\forall x \in H_a)\,\big(x < a \Rightarrow f(x) \lesseqgtr f(a) + f'(a)(x-a)\big) \wedge$$
$$\wedge \big(x > a \Rightarrow f(x) \gtreqless f(a) + f'(a)(x-a)\big)\,.$$

Věta 14.44 (Nutná podmínka pro inflexní bod) *Nechť* f *má inflexi v bodě* a *a je na libovolném okolí* H_a *diferencovatelná. Pak* $f''(a) = 0$ *nebo* $f''(a)$ *neexistuje.*

Věta 14.45 (Postačující podmínka pro inflexní bod) *Nechť existuje* H_a *tak, že* f'' *je konečná na* H_a*, nechť* $f''(a) = 0$ *a* $f'''(a) \neq 0$*. Pak* f *má v bodě* a *inflexní bod.*

14.7.7 Tečna

Definice 14.20 (Tečna) *Řekneme, že funkce* f *má v bodě* a *tečnu*

- *o rovnici* $x = a$*, je-li* f *spojitá v bodě* a *a* $f'(a) = \pm\infty$*;*
- *o rovnici* $y = f(a) + f'(a)(x-a)$*, je-li* f *diferencovatelná v bodě* a*.*

Bodu $[a, f(a)]$ *říkáme bod dotyku.*

14.7.8 Asymptoty

Definice 14.21 (Asymptota)

- *Přímku o rovnici* $y = kx + q$*, kde* $k, q \in \mathbb{R}$*, nazveme asymptotou funkce* f *v bodě* $\pm\infty$*, pokud*

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (kx+q)) = 0.$$

- *Buď* $a \in D_f'$*. Přímku o rovnici* $x = a$ *nazveme svislou asymptotou funkce* f *v bodě* a*, pokud existuje alespoň jedna z limit* $\lim\limits_{a^+} f$ *nebo* $\lim\limits_{a^-} f$ *a je rovna* $\pm\infty$*.*

Věta 14.46 (Lineární a absolutní člen asymptoty) *Funkce* f *má v bodě* $\pm\infty$ *asymptotu o rovnici* $y = kx + q$ *právě tehdy, když*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}$$

a

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}.$$

14.7.9 Vyšetřování průběhu funkce

Vyšetřit průběh funkce zejména obnáší nalézt:

- definiční obor, obor hodnot,
- průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty (např. limity v nekonečnech),
- případnou sudost, lichost, periodicitu,
- spojitost, druhy bodů nespojitosti,
- existenci asymptot (svislých i těch v nekonečnech),
- monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy,
- konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body,
- nakreslit graf funkce.