Matematická analýza 1 - Sbírka příkladů

Kolektiv autorů

20. září 2023

Obsah

1 První týden **6**

1.1 Přípravný týden . . . 6

1.2 Rovnice a nerovnice . . . 6

1.3 Logaritmy a logaritmické rovnice . . . 8

1.4 Goniometrické rovnice . . . 8

1.5 Komplexní čísla . . . 9

2 Druhý týden **10**

2.1 Výroková a predikátová logika . . . 10

2.2 Důkazy: přímý, sporem a indukce . . . 12

2.3 Zobrazení, funkce, definiční obor, obor hodnot, zobrazení surjektivní, injektivní a bijektivní, skládání zobrazení . . . 12

3 Třetí týden **14**

3.1 Zobrazení, funkce, definiční obor, obor hodnot, zobrazení M-surjektivní, injektivní a bijektivní, skládání zobrazení . . . 14

3.2 Cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické funkce . . . 15

3.3 Množinové operace, velikost a ekvivalence množin . . . 16

3.4 Omezenost množin . . . 17

4 Čtvrtý týden **19**

4.1 Supremum a infimum množiny . . . 19

4.2 Pojem posloupnost, vybraná posloupnost, monotonie posloupnosti . . . 21

5 Pátý týden **23**

5.1 Pojem limita posloupnosti, důkaz limity posloupnost z definice, neexistence limity . . . 23

5.2 Limita vybrané posloupnosti . . . 23

5.3 Limita racionální funkce . . . 25

6 Šestý týden **27**

6.1 Limita racionální funkce (dokončení) . . . 27

6.2 Limity na odmocniny . . . 27

6.3 Limity s obecnou mocninou . . . 29

7 Sedmý týden **31**

7.1 Limita sevřené posloupnosti . . . 31

7.2 Výpočet limit pomocí posloupností konvergujících k Eulerově číslu e, Stirlingova formule . . . 32

7.3 Limity s logaritmem . . . 33

7.4 Výpočet limit pomocí posloupnosti konvergující k Eulerově konstantě C . . . 34

8 Osmý týden **35**

8.1 Limity posloupností zadaných rekurentně . . . 35
8.2 Podílové a odmocninové kritérium . . . 35
8.3 Stolzův a Cauchyův vzorec . . . 36
8.4 Bolzano-Cauchyovo (BC) kritérium . . . 37
8.5 Limes superior, limes inferior . . . 38

9 Devátý týden **39**

9.1 Hromadný bod množiny . . . 39
9.2 Limita funkce . . . 39
9.3 Spojitost funkce . . . 40
9.4 Limita složené funkce, limita sevřené funkce . . . 41
9.5 Výpočet složitějších limit pomocí referenčních I . . . 41

10 Desátý týden **43**

10.1 Heineho věta a jednostranné limity . . . 43
10.2 Výpočet složitějších limit pomocí referenčních II . . . 43
10.3 Derivace funkce . . . 46

11 Jedenáctý týden **47**

11.1 Výpočet derivací . . . 47

12 Dvanáctý týden **51**

12.1 Geometrická interpretace derivace . . . 51
12.2 Spojitost, body nespojitosti . . . 51
12.3 Extrémy funkcí . . . 52
12.4 Slovní úlohy na extrémy . . . 53

13 Třináctý týden **54**

13.1 Konkávnost a konvexnost . . . 54
13.2 Důkazy nerovností . . . 54
13.3 Průběhy funkcí . . . 55

Předmluva

Tato sbírka příkladů z matematické analýzy vznikla původně jako materiál pro cvičící tohoto předmětu. V první fázi se o její vznik nejvíce zasloužil Michal Kozák, který společně s Ondrou Pártlem, Katkou Henclovou, Mirkem Kolářem a Davidem Celným vytvořili kostru sbírky - tj. zadání třiceti příkladů pro každý týden. V další fázi byla tato sbírka rozšířena o vzorové řešení všech příkladů, v tomto bodě patří největší kredit Tomáši Smejkalovi, který odvedl zdaleka nejvíce práce a společně s Jakubem Kořenkem, Petrem Gálisem, Janou Vackovou a Zuzkou Szabovou nakonec i přes mnohá úskalí a neshody, při kterých někdy takřka tekla krev, sbírku dokončili. Vzhledem k obsáhlosti materiálu se bohužel nepodařilo odstranit veškeré překlepy a drobné chyby - jakožto poslední správce této sbírky, se kterou už se pro původní účel nepočítá, předávám sbírku do rukou studentů a prosím je, aby tento poslední úkol dokončili za nás. Pevně věřím, že práce nás všech, co jsme se na sepsání sbírky podíleli, bude zúročena v podobě brilantních výsledků studentů u zkoušky prvácké jaderňácké analýzy.

1. září 2022 Jakub Kořenek

1 První týden

1.1 Přípravný týden

Příklad 1.1 *Sečtěte* $\sum_{k=1}^{n}(ak+b)$, *kde* $a, b \in \mathbb{C}$, *a* $\sum_{k=0}^{n} q^k$, *kde* $q \in \mathbb{C}$ *a* $q \neq 1$ *a* $q \neq 0$.

Příklad 1.2 *Sečtěte* $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Příklad 1.3 *Sečtěte* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$ *pro pevné* $x \in \mathbb{R} - \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 1.4 *Dokažte matematickou indukcí binomickou větu.*

Příklad 1.5 *Dokažte matematickou indukcí Moivrovu větu. Nechť* $z = |z|(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$ *a* $n \in \mathbb{N}$. *Pak* $z^n = |z|^n(\cos n\theta + \boldsymbol{i}\sin n\theta)$.

Příklad 1.6 *Matematickou indukcí dokažte, že platí*

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

1.2 Rovnice a nerovnice

Příklad 1.7 *Určete všechna* $a \in \mathbb{R}$, *pro která má rovnice*

$$\frac{x}{x-a} = a+1$$

alespoň jeden záporný kořen.

Příklad 1.8 *Řešte v* $\mathbb{R}^2$ *soustavu*

$$\begin{aligned} x + (b-1)y &= 1, \\ (b+1)x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

s reálným parametrem b.

Příklad 1.9 *Určete, pro které hodnoty reálného parametru* $a \in \mathbb{R}$ *má soustava*

$$\begin{aligned} ax - 2y &= 3, \\ 3x + ay &= 4 \end{aligned}$$

množinu řešení S, která je podmnožinou čtvrtého kvadrantu v $\mathbb{R}^2$, tj.

$$S \subset \{(x,y)|x > 0 \wedge y < 0\}.$$

Příklad 1.10 *Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici*

$$\frac{(x^2-1)(x-2)^2(x-3)}{x} \geq 0.$$

Příklad 1.11 *Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici*

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

kde a, b, c jsou reálné parametry.

Příklad 1.12 *Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici*

$$|ax^2 - b| < a,$$

s reálnými parametry a, b.

Příklad 1.13 *Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici*

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{1-x}} = 1 + \sqrt{x}.$$

Příklad 1.14 *Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici*

$$\sqrt[3]{\frac{25-x}{3+x}} + 3\sqrt[3]{\frac{3+x}{25-x}} = 4.$$

Příklad 1.15 *Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici*

$$\sqrt{x^2+b^2} + b = x$$

s reálným parametrem b.

Příklad 1.16 *Pro která reálná čísla m bude mít rovnice*

$$4x^2 - 8mx - 6m + 9 = 0$$

jeden kořen roven trojnásobku druhého kořene?

1.3 Logaritmy a logaritmické rovnice

Příklad 1.17 *Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici*

$$x^{\log^2 x^2 - 3\log(x) - \frac{9}{2}} = 10^{-2\log(x)}.$$

Příklad 1.18 *Řešte v $\mathbb{R}^2$ soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} log_5 x + 3^{log_3 y} &= 7, \\ x^y &= 5^{12}. \end{aligned}$$

1.4 Goniometrické rovnice

Příklad 1.19 *Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici*

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}.$$

Příklad 1.20 *Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici*

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 2\cos 2x.$$

Příklad 1.21 *Řešte v $\mathbb{R}$*

$$|\cos x|^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1.$$

Příklad 1.22 *Řešte rovnici v $\mathbb{R}$*

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

Příklad 1.23 *Řešte nerovnici v* $\mathbb{R}$

$$2\sin x \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Příklad 1.24 *Řešte v* $\mathbb{R}$

$$16^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{2\cos 2x} = 10.$$

Příklad 1.25 *Určete všechna čísla* $x \in \mathbb{R}$ *tak, aby čtvrtý člen binomického rozvoje*

$$\left(x^{\frac{1}{2(1+\log x)}} + \sqrt[12]{x}\right)^6$$

byl roven 200.

1.5 Komplexní čísla

Příklad 1.26 *Zapište číslo* $z = \frac{\boldsymbol{i}^{10}-1}{\boldsymbol{i}^5+1}$ *v goniometrickém tvaru.*

Příklad 1.27 *Řeště v* $\mathbb{C}$*:*

$$z^2 - 4\boldsymbol{i}z - 3 = 0.$$

Příklad 1.28 *Řešte v* $\mathbb{C}$*:*

$$(5 - \frac{1}{\boldsymbol{i}})\overline{z} + 2z = 22\boldsymbol{i}.$$

Příklad 1.29 *V Gaussově rovině zakreslete množinu řešení v* $\mathbb{C}$ *rovnice*

$$(|z - \boldsymbol{i}| - |z + 3\boldsymbol{i}|)\,(|z| - 2) = 0.$$

Příklad 1.30 *V* $\mathbb{C}$ *řešte rovnici*

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.$$

2 Druhý týden

2.1 Výroková a predikátová logika

Příklad 2.1 *Znegujte výroky: „Pokud bude hezky a budu-li mít čas, půjdu si zaběhat.“, „Existuje člověk vysoký 2 metry.“, „*$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in N, n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon)$*“.*

Příklad 2.2 *Zapište výrok: „Platí A i B nebo neplatí A ani B.“ Výrok zjednodušte. Pozn: Je důležité uzávorkování?)*
(Řešení: $[(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)] \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$. Uzávorkování důležité je.)

Příklad 2.3 *Ukažte, že platí*

$$
\begin{aligned}
(A \vee (B \wedge C)) &\Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)),\\
(A \wedge (B \vee C)) &\Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))
\end{aligned}
$$

(distributivní zákon). Zobecněte vztahy výše pro výrok složený z konečného počtu výroků.

Příklad 2.4 *Ukažte, že*

$$
\begin{aligned}
\neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B),\\
\neg(A \vee B) &\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)
\end{aligned}
$$

(De Morgan). Zobecněte vztahy výše pro výrok složený z konečného počtu výroků.

Příklad 2.5 *Ukažte, že* $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$.

Příklad 2.6 *Zjednodušte výrok* $(A \wedge B) \vee \neg B$.

Příklad 2.7 *Rozhodněte o tranzitivitě implikace a ekvivalence.*

Příklad 2.8 *Zapište pomocí kvantifikátorů následující výroky. Pozor na správné umístění závorek. Výroky posléze znegujte.*

i. *„Pro všechna reálná čísla x platí, že jejich druhá mocnina je nezáporná.“*

ii. *„Existuje reálné číslo menší než jedna.“*

iii. *„Existují dvě přirozená čísla n a m taková, že jejich součet je 10.“*

iv. *„Pro každé přirozené číslo n existuje právě jedno přirozené číslo m takové, že jejich součet je 10.“*

Příklad 2.9 *Zapište pomocí kvantifikátorů následující výroky. Pozor na správné umístění závorek. Výroky posléze znegujte.*

i. *„Pro každé přirozené číslo platí, že jeho součet i součin se sebou samým je opět přirozené číslo.“*

ii. *„Pro každé racionální číslo r platí, že existuje celé číslo p a přirozené číslo q takové, že r je rovno podílu p a q.“ (Tj. racionální čísla lze psát jako zlomky.)*

iii. *„Pro všechna přirozená čísla n platí, že je-li liché, pak $n+1$ je sudé.“*

iv. *„Když a dělí b, pak dělí také každý násobek b.“*

Příklad 2.10 *Zapište pomocí kvantifikátorů následující výroky. Pozor na správné umístění závorek. Výroky posléze znegujte.*

i. *„Je-li a rovno 2 nebo 3, pak je menší než 10.“*

ii. *„Číslo je dělitelné šesti právě tehdy, když je dělitelné dvěma a třemi.“*

iii. *„Pro všechna ϵ kladná existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší než n_0 je n-tý člen posloupnosti (a_n) vzdálen od čísla a méně než o ϵ.“*

Příklad 2.11 *Negujte následující výroky a rozhodněte, jestli platí výrok, nebo jeho negace:*

i. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x^2 + y^2 > 0)$

ii. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{N})\big((y \le x) \wedge (y+1 > x)\big)$

iii. $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})\big((0 < |x-1| < \delta) \Rightarrow (|x-3| < \epsilon)\big)$

Příklad 2.12 *Zapište pomocí kvantifikátorů následující výrok a jeho negaci; vyšetřete pravdivost obou výroků: „Každá kvadratická rovnice s reálnými koeficienty má kladné řešení.“*

Příklad 2.13 *Zapište pomocí kvantifikátorů následující výrok a jeho negaci; výrok dokažte: „Pro každé celé číslo n platí, že pokud n^2 je liché, potom n je rovněž liché.“*

Příklad 2.14 *Slovně napište následující výroky zapsané pomocí kvantifikátorů a rozhodněte o jejich pravdivosti:*

i. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x > y)$

ii. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x > y)$

iii. $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})\Big((a+b=1) \Rightarrow \big((a \ge \frac{1}{2}) \vee (b \ge \frac{1}{2})\big)\Big)$

2.2 Důkazy: přímý, sporem a indukce

Příklad 2.15 *Dokažte, že:*

i. *pro* $\forall n \in \mathbb{N}$ *platí: je-li* n^2 *dělitelné* 9*, potom* n *je dělitelné* 3*.*

ii. *pro* $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$*, platí* AG *nerovnost:*

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Příklad 2.16 *Ukažte, že množina všech prvočísel je nekonečná.*

Příklad 2.17 *Dokažte, že neexistuje nejmenší kladné racionální číslo.*

Příklad 2.18 *Dokažte, že* $\sqrt{2}$ *není racionální číslo (tj. nelze jej zapsat jako zlomek* $\frac{p}{q}$*, kde* $p \in \mathbb{Z}$ *a* $q \in \mathbb{N}$ *jsou nesoudělná).*

Příklad 2.19 *Dokažte, že pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *platí:*

$$\sin x + \cos x \neq 1{,}5.$$

Příklad 2.20 *Dokažte, že pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 2$*, platí nerovnost*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$$

Příklad 2.21 *Dokažte, že pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$ *platí nerovnost*

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

2.3 Zobrazení, funkce, definiční obor, obor hodnot, zobrazení surjektivní, injektivní a bijektivní, skládání zobrazení

Příklad 2.22 *Definujme množiny* $J = \{1, 2\}$ *a* $H = \{3, 4\}$*. Vypište všechny podmnožiny* $J \times H$*, které definují zobrazení*

i. $f\colon J \to H$

ii. $f\colon (J) \to H$

Příklad 2.23 *Určete definiční obory funkcí daných předpisem*

$$f(x) = \ln(\sin(2x)), \quad g(x) = \log_2 \log_3 \log_4 x, \quad w(x) = (2x)!, \quad h(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin(\pi x)}.$$

Příklad 2.24 *Určete obory hodnot funkcí f, g a w z předchozí úlohy, tj.:*

$$f(x) = \ln(\sin(2x)), \quad g(x) = \log_2 \log_3 \log_4 x, \quad w(x) = (2x)!.$$

Příklad 2.25 *Nalezněte obory hodnot následujících funkcí:*

i. $f(x) = x^2, \quad D_f = \langle -1, 2)$

ii. $f(x) = \log x, \quad D_f = (10, 1000\rangle$

iii. $f(x) = x + \lfloor 2x \rfloor, \quad D_f = \langle 0, 1)$

iv. $f(n) = n(-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}$

Příklad 2.26 *Nalezněte obory hodnot následujících funkcí:*

i. $f(x) = (x+1)/(x^2+x+1), \quad D_f = \mathbb{R}$

ii. $f(x) = (x+1)/(x^2+3x+1), \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{(-3 \pm \sqrt{5})/2\}$

Příklad 2.27 *Určete obor hodnot funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definované vztahem*

$$f(z) = z + 2\bar{z} + z\bar{z} + \boldsymbol{i}z.$$

Příklad 2.28 *Buďte $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 2^x$, $f_3(x) = \operatorname{sgn} x$. Určete definiční obory a obory hodnot funkcí $f_i \circ f_j$, kde $i, j = 1, 2, 3$, a napočítejte $(f_i \circ f_j)(x)$.*

Příklad 2.29 *Zapište pomocí kvantifikátorů, že zobrazení h je injektivní, resp. M-surjektivní, resp. bijektivní.*

Příklad 2.30 *Nechť zobrazení $f : (\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ je definováno vztahem $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Určete*

i. D_f *a* H_f,

ii. $f^{-1}(M)$ *pro* $M = (2, 3)$

iii. $f(N)$ *pro* $N = \langle 3, 4\rangle$.

3 Třetí týden

3.1 Zobrazení, funkce, definiční obor, obor hodnot, zobrazení M-surjektivní, injektivní a bijektivní, skládání zobrazení

Příklad 3.1 *Volte vhodný definiční obor* $D_f \subset \mathbb{R}$ *pro funkci* $f : D_f \to \langle -1, 1\rangle$ *danou předpisem* $f(x) = \sin x$ *tak, aby byla*

i. $\langle -1, 1\rangle$*-surjektivní a současně neinjektivní,*

ii. injektivní a současně nebyla $\langle -1, 1\rangle$*-surjektivní,*

iii. $\langle -1, 1\rangle$*-bijektivní,*

iv. neinjektivní ani nebyla $\langle -1, 1\rangle$*-surjektivní.*

Příklad 3.2 *Najděte inverzní funkci k funkci*

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

na jejím definičním oboru. Jakou podmínku musí splňovat koeficienty a, b, c, d*, aby inverze existovala?*

Příklad 3.3 *Nechť zobrazení* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je definováno vztahem* $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

i. Určete H_f *a obor hodnot restrikce* $f|_{\langle 1,+\infty)}$.

ii. Vyšetřete injektivitu zobrazení f *i injektivitu restrikce* $f|_{\langle 1,+\infty)}$.

Příklad 3.4 *Nechť zobrazení* $f : (1, 2) \to \langle 0, 2\rangle$ *je definováno vztahem* $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$ *a zobrazení* $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *vztahem* $g(m, n) = m \cdot n$*. Vyšetřete u funkcí* f *a* g*, zda jsou*

i. injektivní,

ii. $\langle 0, 2\rangle$*-surjektivní (u funkce* f*), resp* $\mathbb{N}$*-surjektivní (u funkce* g*).*

Příklad 3.5 *Nechť zobrazení* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je definováno vztahem* $f(z) = z^3$*. Určete* $f^{-1}(\mathbb{R})$ *a vyšetřete, jestli* f *je injektivní a* $\mathbb{C}$*-surjektivní.*

Příklad 3.6 *Určete definiční obory funkcí* $f \circ g$ *a* $g \circ f$*, kde*

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

Okomentujte, zda se tyto dvě složené funkce rovnají či nikoli.

3.2 Cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické funkce

Příklad 3.7 *Určete definiční obor, obor hodnot a nakreslete graf následujících funkcí*

i. $f(x) = |\arcsin(-2x)|$,

ii. $f(x) = -2\arcsin(|x+1|) + \frac{\pi}{4}$,

iii. $f(x) = |\arccos(1-\frac{x}{2}) - \frac{\pi}{2}|$.

Příklad 3.8 *Dokažte vztah*

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

Pro která x tato identita platí?

Příklad 3.9 *Odvoďte následující vztahy*

i. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

ii. $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$.

Pro která x tyto identity platí?

Příklad 3.10 *Zjednodušte následující výrazy:*

i. $\sin(\operatorname{arctg} x)$,

ii. $\cos(\arcsin x)$,

iii. $\sinh(\operatorname{arg}\cosh x)$.

Pro která x jsou dané úpravy korektní?

Příklad 3.11 *Definujte funkce $\operatorname{arg}\sinh x$ a $\operatorname{arg}\operatorname{tgh} x$, nalezněte jejich definiční obory a obory hodnot a nakreslete jejich grafy.*

Příklad 3.12 *Odvoďte identity*

i. $\operatorname{arg}\sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$,

ii. $\operatorname{arg}\operatorname{tgh} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$.

Pro která x tyto rovnosti platí?

3.3 Množinové operace, velikost a ekvivalence množin

Příklad 3.13 *Dokažte De Morganovy zákony pro sjednocení a průnik množin přes indexovou množinu libovolné mohutnosti, tj.*

$$U \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in I_\alpha} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I_\alpha} (U \setminus A_\alpha)\,, \quad U \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I_\alpha} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I_\alpha} (U \setminus A_\alpha).$$

Příklad 3.14 *Dokažte, že*

$$(A \setminus C) \cap B = A \cap (B \setminus C), \quad (A \setminus B) \cap (B \setminus C) = \emptyset, \quad B \cup (A \cap C) \setminus (A \setminus B) = B.$$

Příklad 3.15 *Zjednodušte vyjádření následujících množin:*

i. $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$,

ii. $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)$,

iii. $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\langle \frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n} \right)$,

iv. $\displaystyle\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \left\langle r, \frac{r+1}{r^2+1} \right)$.

Příklad 3.16 *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ukažte, že platí*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \mathbb{R} |\, |f(x)| > \frac{1}{n} \right\} = \{ x \in \mathbb{R} |\, f(x) \neq 0 \}.$$

Příklad 3.17 *Volte nespočetné množiny A, B tak, aby $A \setminus B$ byla*

i. *prázdná,*

ii. *konečná,*

iii. *spočetná,*

iv. *nespočetná.*

Příklad 3.18

i. *Kolik prvků mají následující množiny*

$$\{1\}, \quad \{1, 1\}, \quad \{n \in \mathbb{N} |\, n < 10\}, \quad \{1, 2, \{1, 2\}, \emptyset\}?$$

ii. *Kolik prvků má prázdná množina? Kolik prvků má množina všech prázdných množin? Kolik prvků má množina všech množin obsahujících pouze prázdnou množinu?*

Příklad 3.19 *Dokažte, že*

i. $(a,b) \sim (c,d)$, $\langle a,b\rangle \sim \langle c,d\rangle$, $(a,b) \sim \langle a,b)$,

ii. $(0,1) \sim (0,\infty) \sim (-\infty,\infty)$,

kde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$.

Příklad 3.20 *Dokažte, že*

i. *množina* $\mathbb{Q}$ *je spočetná,*

ii. *množina* $\mathbb{R}$ *je nespočetná.*

3.4 Omezenost množin

Příklad 3.21 *Zapište pomocí kvantifikátorů definici omezené a shora či zdola omezené množiny a definici horní/dolní závory.*

Příklad 3.22 *Rozhodněte o omezenosti zdola a shora následujících podmnožin* $\mathbb{R}$

i. $\{2-n |\, n \in \mathbb{N}\}$,

ii. $\{x > 0 |\, \sin(5x) \geq 16\sin^5 x\}$,

iii. $\{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} |\, n \in \mathbb{N}\}$.

Příklad 3.23 *Rozhodněte o omezenosti zdola a shora pro následujících podmnožin* $\mathbb{R}$

i. $\{x^2 + 5x - 6 |\, x \in (-1,+\infty)\}$,

ii. $\{x \in \mathbb{R} |\, x^2 + 5x - 6 \in (-1,+\infty)\}$.

Příklad 3.24 *Rozhodněte o omezenosti zdola a shora pro následující podmnožiny* $\mathbb{R}$. *Pokuste se určit příslušné množiny všech dolních a horních závor.*

i. $\emptyset$

ii. $\{\frac{2n}{3n+1} |\, n \in \mathbb{N}\}$

iii. $\{\frac{x^3}{x^2+10} |\, x \in \mathbb{R}\}$

Příklad 3.25 *Rozhodněte o omezenosti zdola a shora pro následující podmnožiny* $\mathbb{R}$. *Pokuste se určit příslušné množiny všech dolních a horních závor.*

i. $\{\log_2(x) |\, x \in (0,5\rangle\}$, *ii.* $\{\operatorname{arctg}\left(\frac{x^5-x}{x^2+x+1}\right) |\, x \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 3.26 *Rozhodněte o omezenosti následujících podmnožin $\mathbb{C}$:*

i. $\{5 + \cos\varphi + \boldsymbol{i}(3 + \sin\varphi) |\, \varphi \in \mathbb{R}\}$,

ii. $\{100z + z^{20} |\, |z| < 2\}$.

Příklad 3.27 *Rozhodněte o omezenosti následujících podmnožin $\mathbb{C}$:*

i. $\{z^{-1} |\, |z + \boldsymbol{i} - 3| < 1\}$,

ii. $\{a + \boldsymbol{i}b |\, a, b \in \mathbb{R},\ (a+b)(a-b) = 1\}$.

Příklad 3.28 *Rozhodněte o omezenosti množiny*

$$\{x \in \mathbb{R} |\, (\exists n \in \mathbb{N})(\log_x n = n)\}\,.$$

Příklad 3.29 *Rozhodněte o omezenosti následujících množin:*

i. $M_1 = \{\frac{1}{1+x^2} |\, x \in \mathbb{R}\}$,

ii. $M_2 = \{\frac{1}{1+z^2} |\, z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}\}$.

Příklad 3.30 *Buďte*

i. $M_1 = \{z \in \mathbb{C} |\, (z+1)^{10} = (z-1)^{10}\}$,

ii. $M_2 = \{z \in \mathbb{C} |\, |z+1|^{10} = |z-1|^{10}\}$.

Určete v jakém vztahu jsou množiny $M_1,\ M_2$ a rozhodněte o jejich omezenosti.

4 Čtvrtý týden

4.1 Supremum a infimum množiny

Příklad 4.1 *Zapište pomocí kvantifikátorů definice minima, maxima, infima a suprema podmnožiny* $\mathbb{R}$. *Čemu se rovná* $\sup \emptyset$ *a* $\inf \emptyset$*?*

Příklad 4.2 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \left\{ \frac{2n}{3n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Příklad 4.3 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \left\{ \frac{x^3}{x^2+10} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Příklad 4.4 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \left\{ \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} \,\middle|\, x \in (0,+\infty) \right\}.$$

Příklad 4.5 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n}, 2\right).$$

Příklad 4.6 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(0, 2 - \frac{1}{n}\right\rangle.$$

Příklad 4.7 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \left\{ \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Příklad 4.8 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \left\{ a + \frac{1}{a} \,\middle|\, a \in (0,1) \right\}.$$

Příklad 4.9 *Zkuste uhádnout supremum, platnost své domněnky dokažte a rozhodněte, zda je supremum nabýváno:*

$$\sup \left\{ \frac{n^2+3n+5}{1-2n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Příklad 4.10 *Dokažte následující tvrzení a rozhodněte, zda je infimum nabýváno.*

$$\inf\left\{\frac{3x+1-2x^2}{x^2+5x}\,\middle|\, x\in\mathbb{R}^+\right\} = -2.$$

Příklad 4.11 *Zkuste uhádnout infimum a supremum následující množiny, platnost svých domněnek dokažte a rozhodněte, zda supremum a infimum jsou nabývána:*

$$\left\{(-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Příklad 4.12 *Dokažte následující tvrzení a rozhodněte, zda je infimum nebo supremum nabýváno.*

i. $\inf\{x^3-x^2-x+2 \,|\, x\in\langle 0,2\rangle\} = 1$,

ii. $\sup\{x^3-x^2-x+2 \,|\, x\in\langle 0,2\rangle\} = 4$.

Příklad 4.13 *Zkuste uhádnout infimum a supremum následující množiny, platnost svých domněnek dokažte a rozhodněte, zda supremum a infimum jsou nabývána:*

$$M = \left\{\frac{2n^2+n+11}{n^2+5}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Příklad 4.14 *Tipněte si supremum a infimum množiny*

$$M = \left\{x\in\mathbb{R}_0^+ \,\middle|\, \sin x\cos x = 0\right\}.$$

Správnost svých tipů dokažte.

Příklad 4.15 *Buď*

$$M = \left\{\sin\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Určete, čemu se rovná $\inf M$ *a svou hypotézu dokažte. Může se hodit nerovnost* $\sin x \le x$ *platná pro* $x \ge 0$*.*

Příklad 4.16 *Buď*

$$M_a = \{ax^2+2x-3ax-6 \,|\, x\in\mathbb{R}\}.$$

Určete, čemu se rovná $\inf M_a$ *a* $\sup M_a$ *v závislosti na parametru* $a\in\mathbb{R}$*, a svou hypotézu dokažte.*

Příklad 4.17 *Mohou existovat dvě neprázdné podmnožiny* $A, B\subset\mathbb{R}$ *s vlastnostmi*

$$\sup A = \sup B, \quad \inf A = \inf B, \quad A\cap B = \emptyset?$$

Příklad 4.18 *Dokažte, že pro* $A, B\subset\mathbb{R}$ *platí*

$$\sup(A\cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \quad \inf(A\cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

Diskutujte zvlášť případy, kdy A nebo B jsou prázdné či shora/zdola neomezené množiny.

Příklad 4.19 *Buď* $A\subset\mathbb{R}$*. Definujme* $-A := \{-x|\, x\in A\}$*. Dokažte, že*

$$\sup -A = -\inf A, \quad \inf -A = -\sup A.$$

4.2 Pojem posloupnost, vybraná posloupnost, monotonie posloupnosti

Příklad 4.20 *Pomocí kvantifikátorů zapište definici omezenosti posloupnosti, definici vybrané posloupnosti a definici skorovybrané posloupnosti. Tyto definice znegujte.*

Příklad 4.21 *Rozhodněte o monotonii (ostrá/neostrá) a omezenosti posloupnosti* (a_n), *kde*

i. $a_n = \dfrac{n}{2^n}$,

ii. $a_n = n^3 - 5n^2$.

Příklad 4.22 *Rozhodněte o monotonii (ostrá/neostrá) a omezenosti posloupnosti* (a_n), *kde*

i. $a_n = \dfrac{2n+3}{n^2+3n+1}$,

ii. $a_n = (n - \sqrt{n})^n$.

Příklad 4.23 *Vyšetřete (stejnými metodami jako u posloupností) monotonii funkce*

$$f(x) = \frac{5x+3}{2x-2}.$$

Příklad 4.24 *Vyšetřete (stejnými metodami jako u posloupností) monotonii funkce*

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Příklad 4.25 *Vyšetřete (stejnými metodami jako u posloupností) monotonii funkce*

$$f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x.$$

Příklad 4.26 *Vyšetřete (stejnými metodami jako u posloupností) monotonii funkce*

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{|\ln x|}{\ln x - 1}.$$

Příklad 4.27 *Buďte* (a_n), (b_n) *rostoucí posloupnosti. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků*

i. $(a_n + b_n)$ *je rostoucí*

ii. (a_n^2) *je rostoucí*

iii. $(a_n b_n)$ *je rostoucí*

Pokud výrok neplatí, doplňte (minimální) předpoklady tak, aby se stal pravdivým.

Příklad 4.28 *Určete, v jakých případech je posloupnost* (b_n) *vybraná (případně skoro vybraná) z posloupnosti* (a_n).

i. $a_n = c^{\sqrt{n}}, \quad b_n = c^n \ (c > 0, c \neq 1)$,

ii. $a_n = c^n, \quad b_n = c^{4n+3(-1)^n} \ (c > 0, c \neq 1)$,

iii. $a_n = c^n, \quad b_n = c^{n+(-1)^n} \ (c > 0, c \neq 1)$.

Příklad 4.29 *Určete, v jakých případech je posloupnost* (b_n) *vybraná (případně skoro vybraná) z posloupnosti* (a_n).

i. $a_n = n, \quad b_n = \dfrac{4n^2 + 4n + 1}{2n + 1}$

ii. $a_n = \dfrac{n+5}{n+2}, \quad b_n = \dfrac{(n+1)!/2 + 5}{(n+1)!/2 + 2}$

iii. $a_n = \dfrac{n+5}{n+2}, \quad b_n = \dfrac{n^{3/2} + 5}{n^{3/2} + 2}$

Příklad 4.30 *Dokažte, že každá prostá posloupnost přirozených čísel má ostře rostoucí podposloupnost.*

5 Pátý týden

5.1 Pojem limita posloupnosti, důkaz limity posloupnost z definice, neexistence limity

Příklad 5.1 *Uhádněte a následně použitím definice ukažte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} n^k,\ k\in\mathbb{Q}.$$

Příklad 5.2 *Uhádněte a následně použitím definice ukažte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}.$$

Příklad 5.3 *Uhádněte a následně použitím definice ukažte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{\alpha^n},\ \text{kde } k\in\mathbb{N},\ \alpha>1.$$

Příklad 5.4 *Uhádněte a následně použitím definice ukažte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \log_{\frac{1}{2}} n.$$

Příklad 5.5 *Uhádněte a následně použitím definice ukažte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{n}.$$

Příklad 5.6 *Uhádněte a následně použitím definice ukažte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}(n^2).$$

Příklad 5.7 *Uhádněte a následně použitím definice ukažte*

$$\lim_{n\to+\infty} i^n n\ (v\ \mathbb{C}).$$

Příklad 5.8 *Uhádněte a následně použitím definice ukažte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-5i}{2n+i}\ (v\ \mathbb{C}).$$

5.2 Limita vybrané posloupnosti

Příklad 5.9 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n!-2n^2}.$$

Příklad 5.10 *Rozhodněte, zda následující limita (v $\mathbb{R}$) existuje. Existuje-li, určete její hodnotu, v opačném případě své tvrzení odůvodněte:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2+3(-1)^n}.$$

Příklad 5.11 *Rozhodněte, zda následující limita existuje. Existuje-li, určete její hodnotu, v opačném případě své tvrzení odůvodněte:*

$$\lim_{n\to+\infty} i^{n^2} \text{ (v } \mathbb{C}\text{)}.$$

Příklad 5.12 *Rozhodněte, zda následující limita (v $\mathbb{R}$) existuje. Existuje-li, určete její hodnotu, v opačném případě své tvrzení odůvodněte:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Příklad 5.13 *Rozhodněte, zda následující limita (v $\mathbb{R}$) existuje. Existuje-li, určete její hodnotu, v opačném případě své tvrzení odůvodněte:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

Příklad 5.14 *Rozhodněte, zda následující limita (v $\mathbb{R}$) existuje. Existuje-li, určete její hodnotu, v opačném případě své tvrzení odůvodněte:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{-1}+(-1)^{n+1}}.$$

Příklad 5.15 *Rozhodněte, zda následující limita (v $\mathbb{R}$) existuje. Existuje-li, určete její hodnotu, v opačném případě své tvrzení odůvodněte:*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{(-1)^n}.$$

Příklad 5.16 *Nechť* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ *a* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ *neexistují. Co můžeme říci o limitě* $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$*, resp.* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n$*?*

Příklad 5.17 *Buďte* (a_n) *omezená reálná posloupnost a* (b_n) *reálná posloupnost, která navíc splňuje*

i. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$

ii. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty.$

Čemu se rovná $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$*? Své tvrzení dokažte! Vyslovte analogické tvrzení pro komplexní posloupnosti.*

5.3 Limita racionální funkce

Příklad 5.18 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}(-7n^2+2n^3-10n).$$

Příklad 5.19 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\Big((1-n)(n^2+4n)+(1+n)(n^2-7n+3)\Big).$$

Příklad 5.20 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-2n+n^5}{2n^5+2^5}.$$

Příklad 5.21 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)^2}{n^3+2n-5}.$$

Příklad 5.22 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}\right)}{\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)}.$$

Příklad 5.23 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)^2+\frac{1}{n-2}}{(n-3)^3-(n+3)^3}.$$

Příklad 5.24 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5n^3-7n+1}{n^4+n^3\sin n}.$$

Příklad 5.25 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)^{10}(2n-1)^{10}}{(3n)^{20}}.$$

Příklad 5.26 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!-(n-1)!\,n^2}{n!}.$$

Příklad 5.27 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)^3 - n^3}{\big(1+(-1)^n\,n\big)\big(1+(-1)^{n+1}\,n\big)}$$

Příklad 5.28 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)},$$

kde P a Q jsou nenulové polynomy v n s reálnými koeficienty a žádné $n \in \mathbb{N}$ není kořenem Q.

Příklad 5.29 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+a)^2}{(n-1)(3-5n)}$$

v závislosti na reálné konstantě a.

Příklad 5.30 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(3n+5)(3-an)}{n(2n+3)}.$$

v závislosti na reálné konstantě a.

6 Šestý týden

6.1 Limita racionální funkce (dokončení)

Příklad 6.1 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$, existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+n+1)^{10}-(n+1)^{20}}{(n^2+1)^{10}-(n+1)^{20}}.$$

Příklad 6.2 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right).$$

Příklad 6.3 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n}\right).$$

Příklad 6.4 *Vypočtěte (v $\mathbb{C}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+i}{4-in}.$$

Příklad 6.5 *Vypočtěte (v $\mathbb{C}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n-i}{2+in}.$$

Příklad 6.6 *Vypočtěte (v $\mathbb{C}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+i}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+i}}.$$

6.2 Limity na odmocniny

Příklad 6.7 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

Příklad 6.8 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+5}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}.$$

Příklad 6.9 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[7]{n^2-3}-\sqrt[20]{n^7+1}}{5\sqrt[9]{n^2+1}+2\sqrt[20]{n^7}}.$$

Příklad 6.10 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}}.$$

Příklad 6.11 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{3n^2+1}-2n\right).$$

Příklad 6.12 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\sqrt{1+n^{-4}}}.$$

Příklad 6.13 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+(-1)^n n+1}-\sqrt{n^2+(-1)^{n+1} n+1}\right).$$

Příklad 6.14 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{4/3}(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}).$$

Příklad 6.15 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right).$$

Příklad 6.16 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}\right).$$

Příklad 6.17 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[4]{n^4-n}-\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right).$$

Příklad 6.18 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1/2}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}-\sqrt{3n+2}\right).$$

Příklad 6.19 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{1/2}\left(\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}-3\sqrt{n+2}\right).$$

Příklad 6.20 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}}-n\sqrt{1+\sqrt{2}}\right).$$

Příklad 6.21 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^2+(-1)^n\sqrt{n}}-n\right).$$

Příklad 6.22 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{an+1}-\sqrt{n})\sqrt{4n+3}$$

pro $a\in\mathbb{R}^+$.

Příklad 6.23 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{k-1}\left(\sqrt[k]{n^k+1}-\sqrt[k]{n^k-1}\right)$$

pro $k\in\mathbb{N}$.

Příklad 6.24 *Určete čísla $a, b\in\mathbb{R}$ tak, aby platilo*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an-b\right)=0.$$

6.3 Limity s obecnou mocninou

Příklad 6.25 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}.$$

Příklad 6.26 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$L=\lim_{n\to+\infty} a^{n^2+n}$$

pro $a\in\mathbb{R}$.

Příklad 6.27 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$$

pro $a\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$.

Příklad 6.28 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$$

pro $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,\pm1\}$.

Příklad 6.29 *Vypočtěte (existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n}{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^n},$$

kde $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}:\ |\alpha|<1, |\beta|<1.$

Příklad 6.30 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}.$$

7 Sedmý týden

7.1 Limita sevřené posloupnosti

Příklad 7.1 *Pomocí odhadů (sevřené posloupnosti) vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor \frac{\sqrt{n}}{2} \rfloor}{\sqrt{n}}.$$

Příklad 7.2 *Pomocí odhadů (sevřené posloupnosti) vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Příklad 7.3 *Pomocí odhadů (sevřené posloupnosti) vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}.$$

Příklad 7.4 *Pomocí odhadů (sevřené posloupnosti) vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+k^2}}.$$

Příklad 7.5 *Pomocí odhadů (sevřené posloupnosti) vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Příklad 7.6 *Pomocí odhadů (sevřené posloupnosti) vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin(k^2) \right).$$

Příklad 7.7 *Ukažte, že*

$$\lim_{n\to+\infty} \left\lfloor \frac{n}{n+1} \right\rfloor \neq \left\lfloor \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \right\rfloor,$$

ale naopak

$$\lim_{n\to+\infty} \left\lfloor \frac{n+1}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \right\rfloor.$$

7.2 Výpočet limit pomocí posloupností konvergujících k Eulerově číslu e, Stirlingova formule

Příklad 7.8 *Vypočtěte*

$$a.)\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n},\quad b.)\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n},\quad c.)\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{(-1)^n n}.$$

Příklad 7.9 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{n+1}.$$

Příklad 7.10 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n+2}.$$

Příklad 7.11 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+2}\right)^{n^2}.$$

Příklad 7.12 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+1}\right)^{n}.$$

Příklad 7.13 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+3n-1}{n^2-2n+3}\right)^{2n+1}.$$

Příklad 7.14 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n}{1+2^n}\right)^{2^n}.$$

Příklad 7.15 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}.$$

Příklad 7.16 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha n+2}{n+1}\right)^{n}$$

pro $\alpha\in\mathbb{R}^+$.

Příklad 7.17 *Dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$ platí*

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}. \tag{1}$$

Tuto nerovnost si zapamatujte a využijte v následujících příkladech.

Příklad 7.18 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{3^n n!}.$$

Příklad 7.19 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\ldots(2n)}}{n}.$$

7.3 Limity s logaritmem

Příklad 7.20 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \Big(n - \ln n\Big).$$

Příklad 7.21 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{\log_a(10n)},$$

kde $a > 0$, $a \neq 1$.

Příklad 7.22 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^2+3n-2)}{\ln(n^5+7n^2-n)}.$$

Příklad 7.23 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2+e^{3n})}{\ln(1+n+e^{2n})}.$$

Příklad 7.24 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \big(\log_{2n}(10n)\big)^{\ln n}.$$

Příklad 7.25 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n+2)}\right)^n.$$

7.4 Výpočet limit pomocí posloupnosti konvergující k Eulerově konstantě C

Příklad 7.26 *Na přednášce bylo odvozeno, že posloupnost tzv.* ***harmonických čísel***

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \nearrow +\infty.$$

Tuto posloupnost lze však regularizovat odečtením $\ln n$. *Dokažte, že posloupnost* $x_n := h_n - \ln n$ *je ostře klesající, posloupnost* $y_n := h_{n-1} - \ln n$ *je ostře rostoucí a platí*

$$0 < \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} x_n < 1.$$

Společná limita C *se nazývá* ***Eulerova konstanta*** *(*$C = 0,577216$*).*

Příklad 7.27 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Příklad 7.28 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Příklad 7.29 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \ldots + \frac{1}{n^2} \right).$$

Příklad 7.30 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

8 Osmý týden

8.1 Limity posloupností zadaných rekurentně

Příklad 8.1 *Vypočtěte* $\lim_{n\to+\infty} a_n$, *je-li* $a_1 = 10$, $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Příklad 8.2 *Vypočtěte* $\lim_{n\to+\infty} a_n$, *je-li* $a_{n+1} = 2a_n - 5$ *a*

i. $a_1 = 4$

ii. $a_1 = 5$

iii. $a_1 = 6$.

Příklad 8.3 *Vypočtěte* $\lim_{n\to+\infty} a_n$, *je-li* $a_{n+1} = a_n^2 + 6a_n + 4$ *a*

i. $a_1 = 0$

ii. $a_1 = -1$

iii. $a_1 = -4$

iv. $a_1 = -2$.

Příklad 8.4 *Vypočítejte limitu posloupnosti* (a_n)*, když víte, že její členy pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *splňují podmínku* $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n + 3$.

8.2 Podílové a odmocninové kritérium

Příklad 8.5 (Podílové kritérium) *Nechť* (a_n) *je posloupnost nenulových čísel. Potom*

i. je-li $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$, *je* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$;

ii. je-li $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$, *je* $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$.

Dokažte.

Příklad 8.6 (Odmocninové kritérium) *Nechť* (a_n) *je číselná posloupnost. Potom*

i. je-li $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *je* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$;

ii. je-li $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *je* $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$.

Dokažte.

Příklad 8.7 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$$

pro $a \in \mathbb{R}$.

Příklad 8.8 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k^2+1}{3k^2-1}.$$

Příklad 8.9 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n^2}}{(n!)^n}$$

pro $a \in \mathbb{R}$.

Příklad 8.10 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{2^n n!}.$$

Příklad 8.11 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^n}.$$

8.3 Stolzův a Cauchyův vzorec

Příklad 8.12 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}}$$

pro $p \in \mathbb{N}$.

Příklad 8.13 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (k!)^p}{(n!)^p}$$

pro $p > 0$.

Příklad 8.14 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^k}{n^n}.$$

Příklad 8.15 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Příklad 8.16 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Příklad 8.17 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n)}}{n}.$$

Příklad 8.18 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^n+n-5}.$$

Příklad 8.19 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln^2 n}{n}.$$

Příklad 8.20 *Vypočtěte*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$$

Příklad 8.21 *Nalezněte posloupnosti* (a_n), (b_n) *tak, aby* $0 < b_n \nearrow +\infty$, *limita posloupnosti* $(\frac{a_n}{b_n})$ *existovala a současně limita posloupnosti* $(\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n})$ *neexistovala.*

Příklad 8.22 *Nalezněte posloupnost* (a_n) *kladných čísel, pro níž* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$ *existuje, ale* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *neexistuje.*

8.4 Bolzano-Cauchyovo (BC) kritérium

Příklad 8.23 *Určete, které z následujících tvrzení jsou ekvivalentní s tvrzením* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{C}$, *tj. s BC kritériem.*

i. $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n>n_0)(|a_n-a_{n_0}|<\varepsilon)$

ii. $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n>n_0)(\forall p\in\mathbb{N})(|a_{n+p}-a_n|<\sqrt{\varepsilon})$

iii. $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n>n_0)(\forall p\in\mathbb{N}\setminus\{1,2,3,4\})(|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon)$

iv. $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n>n_0)(\forall p\in\mathbb{N})(|a_{n+2p}-a_n|<\varepsilon)$

v. $(\forall\varepsilon>0)(\forall p\in\mathbb{N})(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n>n_0)(|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon)$

Příklad 8.24 *Ukažte z BC kritéria, že existuje konečná*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

Příklad 8.25 *Ukažte z BC kritéria, že existuje konečná*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Příklad 8.26 *Pomocí Bolzanova-Couchyho kritéria vypočítejte* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

8.5 Limes superior, limes inferior

Příklad 8.27 *Nalezněte všechny hromadné hodnoty posloupnosti* (a_n) *a určete* $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ *a* $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ *pro*

$$a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n.$$

Příklad 8.28 *Nalezněte všechny hromadné hodnoty posloupnosti* (a_n) *a určete* $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ *a* $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ *pro*

$$a_n = \cos^n\left(\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Příklad 8.29 *Určete* $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ *a* $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ *pro*

$$a_n = \sqrt[n]{\left(2 + (-1)^n\right)^n + \left(3 + (-1)^n\right)^n}.$$

Příklad 8.30 *Sestrojte omezenou posloupnost* (a_n) *tak, aby* $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ *a současně* $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n < \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$.

9 Devátý týden

9.1 Hromadný bod množiny

Příklad 9.1 *Pomocí kvantifikátorů zapište definice hromadného a izolovaného bodu množiny $A \subset \mathbb{R}$. Za jakých dodatečných předpokladů platí, že bod je izolovaný právě tehdy, není-li hromadný?*

Příklad 9.2 *Rozhodněte, je-li a hromadný bod množiny A pro*

i. $a = 1,\ A = (0, 2)$

ii. $a = 1,\ A = (0, 1)$

iii. $a = \pi,\ A = \mathbb{Z}$

iv. $a = 3,\ A = \mathbb{Z}$

Příklad 9.3 *Rozhodněte, je-li a hromadný bod množiny A pro*

i. $a = 0,\ A = \left\{\frac{1}{x} | \, x \text{ prvočíselné}\right\}$

ii. $a = +\infty,\ A = \{\operatorname{tg} x | \, x \in (-\pi/2, \pi/2)\}$

iii. $a = -\infty,\ A = \{n(\cos n + \sin n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

9.2 Limita funkce

Příklad 9.4 *Buď $p = p(x)$ polynom stupně alespoň 1. Ukažte následující limitu funkce* $|\lim_{x\pm\infty} p(x)| = +\infty$.

Příklad 9.5 *Vypočtěte limitu funkce*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sum_{k=0}^{m} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k},$$

kde $a_m,\ b_n \neq 0$.

Příklad 9.6 *Vypočtěte limitu funkce*

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}.$$

pro $a = 0,\ 1,\ +\infty$.

Příklad 9.7 *Vypočtěte limitu funkce*

$$\lim_{x\to a} \frac{x^4+2x^2-3}{x^3-3x^2+2x}.$$

pro $a=-\infty,\ 1$.

Příklad 9.8 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1},$$

kde $m,\ n\in\mathbb{N}$.

Příklad 9.9 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}.$$

Příklad 9.10 *Vypočtěte limitu funkce*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

Příklad 9.11 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}.$$

Příklad 9.12 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}.$$

Příklad 9.13 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}.$$

Příklad 9.14 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}.$$

9.3 Spojitost funkce

Příklad 9.15 *Pomocí kvantifikátorů zapište definici spojitosti (realné) funkce (reálné proměnné). Diskutujte vztah mezi limitou v konečném bodě a spojitostí.*

Příklad 9.16 *Buď* $a\in\mathbb{R}$. *Nechť existuje konečná limita* $\lim\limits_{x\to a} f(x) =: c$. *Ukažte, že funkce*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x\in D_f\setminus\{a\} \\ c & x=a \end{cases}$$

je spojitá v a.

Příklad 9.17 *Z definice ukažte, že funkce $f(x) = x^2 + 1$, $D_f = \mathbb{R}$, je spojitá v libovolném $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Příklad 9.18 *Dokažte, že libovolná funkce je spojitá v libovolném izolovaném bodě svého definičního oboru.*

9.4 Limita složené funkce, limita sevřené funkce

Příklad 9.19 *Vypočtěte limitu funkce*

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}).$$

Korektně odůvodněte použití věty o limitě složené funkce.

Příklad 9.20 *Pomocí věty o limitě sevřené funkce vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}.$$

Příklad 9.21 (Referenční limity) *Na přednášce bylo odvozeno pomocí Heineho věty a věty o limitě složené funkce, že*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln(a), \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Dokažte poslední ze vztahů pomocí limity sevřené funkce.
(Nápověda: Pro $0 \le x \le 1$ platí $(1+\frac{x}{n})^n \nearrow e^x$ a $(1+\frac{x}{n})^{n+1} \searrow e^x$.)

Příklad 9.22 *Na přednášce byla následující limita odvozena pomocí Heineho věty. Dokažte pomocí limity sevřené posloupnosti:*

$$\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{e} - 1) = 1.$$

9.5 Výpočet složitějších limit pomocí referenčních I

Příklad 9.23 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)},$$

kde α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

Příklad 9.24 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin(mx)},$$

kde n, $m \in \mathbb{N}$.

Příklad 9.25 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Příklad 9.26 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Výsledek tohoto příkladu si zapamatujte.

Příklad 9.27 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

(Nápověda: Využijte výsledku předchozího příkladu.)

Příklad 9.28 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 1} (1-x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Příklad 9.29 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2-5x+1)}{x}.$$

Příklad 9.30 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}.$$

10 Desátý týden

10.1 Heineho věta a jednostranné limity

Příklad 10.1 *S použitím Heineho věty vyvraťe existenci limity*

$$\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Příklad 10.2 *Rozhodněte o existenci a konečnosti limity*

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}^2(x).$$

Příklad 10.3 *Rozhodněte o existenci a konečnosti limity*

$$\lim_{x \to +\infty} \sin(\pi\sqrt{x}).$$

Příklad 10.4 *Rozhodněte o existenci a konečnosti limity*

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{|x-2|}.$$

Příklad 10.5 *Rozhodněte o existenci a konečnosti limity*

$$\lim_{x \to +\infty} (-1)^{\lfloor x \rfloor}.$$

Příklad 10.6 *Rozhodněte o existenci a konečnosti limity*

$$\lim_{x \to 0} f(x), \quad \textit{kde } f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & x > 0 \\ x \cos\frac{1}{x} & x < 0. \end{cases}$$

10.2 Výpočet složitějších limit pomocí referenčních II

Příklad 10.7 *Vypočtěte*

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}.$$

Příklad 10.8 *Vypočtěte*

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}.$$

Příklad 10.9 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x^2-1}\right)^{\frac{3x+5}{x-1}}.$$

Příklad 10.10 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}.$$

Příklad 10.11 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to+\infty}\cos^x\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right),$$

kde $a\in\mathbb{R}$.

Příklad 10.12 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{\sin(e^x+4^x)}.$$

Příklad 10.13 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}$$

pro $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Příklad 10.14 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin^2 x}-e^x}{\sin(2x)}.$$

Příklad 10.15 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{x+3}\right)}{\ln\left(\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\sqrt{x+4}}\right)}.$$

Příklad 10.16 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Příklad 10.17 *Dokažte*

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\qquad\lim_{x\to0^+}\frac{\arccos x-\frac{\pi}{2}}{x}=-1.$$

Příklad 10.18 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} x \operatorname{arccotg} x.$$

Příklad 10.19 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

Příklad 10.20 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0^+} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Příklad 10.21 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}.$$

Příklad 10.22 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{\operatorname{tg}\sqrt{\sin x}} - 1}{\sin x}$$

Příklad 10.23 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x-a},$$

kde $a \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Příklad 10.24 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to b} \frac{a^x - a^b}{x-b},$$

kde $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Příklad 10.25 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to a} \frac{\sinh x - \sinh a}{x-a},$$

kde $a \in \mathbb{R}$.

10.3 Derivace funkce

Příklad 10.26 *Z definice spočítejte derivace následujících funkcí v libovolném bodě jejich definičního oboru.*

i. $f(x) = x^2 - 2x + 5$

ii. $f(x) = x^n$, *kde* $n \in \mathbb{Z}$

Příklad 10.27 *Z definice spočítejte derivace následujících funkcí v libovolném bodě jejich definičního oboru.*

i. $f(x) = \cos x$

ii. $f(x) = \sin x$

Příklad 10.28 *Z definice spočítejte derivace následujících funkcí v libovolném bodě jejich definičního oboru.*

i. $f(x) = e^x$

ii. $f(x) = \ln x$ *(a poté odvoďte i vzorec pro* $(\log_a x)'$*).*

Příklad 10.29 *Rozeberte vztah mezi existencí derivace a spojitostí. Na příkladě ukažte, že existence nevlastní derivace není postačující podmínka pro spojitost.*

Příklad 10.30 *Dokažte, že je–li funkce* f *diferencovatelná v bodě* x *a* $n \in \mathbb{N}$*, potom*

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right) = f'(x).$$

Vyplývá naopak z existence této limity existence derivace?

11 Jedenáctý týden

11.1 Výpočet derivací

Příklad 11.1 (Základní příklady) *Vypočtěte derivace následujících funkcí ve všech bodech, kde existují:*

i. $\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$

ii. $\sinh x$, $\cosh x$

iii. $\operatorname{tgh} x$, $\operatorname{cotgh} x$

iv. a^x, *kde* $a > 0$

v. x^α, *kde* $\alpha \in \mathbb{R}$.

vi. $\frac{2x}{1-x^2}$.

vii. $f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

viii. $f(x) = (1 + x - x^2)(1 - x + x^2)$.

ix. $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$

x. $f(x) = (1 + x)\sqrt{2 + x^2}\,\sqrt[3]{3 + x^3}$

Příklad 11.2 *Spočítejte jednostranné derivace funkce* f *v bodě* a.

i. $f(x) = |5x|$, $a = 0$

ii. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, $a = 2$

Příklad 11.3 *Vyslovte* ***Darbouxovu větu*** *a na příkladě funkce* sgn *ukažte, že požadavek spojitosti nelze vypustit.*

Příklad 11.4 *Rozhodněte o existenci derivace následujících funkcí v bodě* $x = 0$. *V kladném případě tuto derivaci vypočtěte.*

i. $f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

iii. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Příklad 11.5 *Pomocí věty o derivaci inverzní funkce vypočtěte derivaci následujících funkcí*

i. $f(x) = \ln x$,

ii. $f(x) = \sqrt[n]{x}$, *kde* $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 11.6 *Pomocí věty o derivaci inverzní funkce vypočtěte derivaci následujících funkcí*

i. $f(x) = \arcsin x$,

ii. $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Příklad 11.7 *Pomocí věty o derivaci inverzní funkce vypočtěte derivaci následujících funkcí*

i. $f(x) = \operatorname{arg\,sinh} x$,

ii. $f(x) = \operatorname{arg\,tgh} x$.

Příklad 11.8 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

Příklad 11.9 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 |x|}.$$

Příklad 11.10 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}.$$

Příklad 11.11 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \ln(\ln(\ln x)).$$

Příklad 11.12 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \ln \ln(\sin x).$$

Příklad 11.13 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = |x + 2| e^{-\frac{1}{x}}.$$

Příklad 11.14 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \log_a^3(x^2)$$

pro $a > 0$, $a \neq 0$.

Příklad 11.15 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}.$$

Příklad 11.16 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech definičního oboru $D_f = \mathbb{R}^+$, ve kterých existuje:*

$$f(x) = x^x.$$

Příklad 11.17 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech definičního oboru $D_f = \mathbb{R}^+$, ve kterých existuje:*

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

Příklad 11.18 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \log_x e.$$

Příklad 11.19 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1 - x}{\sqrt{2}}\right).$$

Příklad 11.20 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$

Příklad 11.21 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \frac{1}{\arccos^2(x^2)}.$$

Příklad 11.22 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1 + x^3}{1 - x^3}}.$$

Příklad 11.23 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

Příklad 11.24 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = x + \sqrt{1 - x^2} \arccos x.$$

Příklad 11.25 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1}{\cosh x}\right).$$

Příklad 11.26 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = |\operatorname{arctg} x| - |x|\,.$$

Příklad 11.27 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

Příklad 11.28 *Vypočtěte derivaci následující funkce ve všech bodech, kde existuje:*

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-\frac{1}{x}} & \textit{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \textit{pro } x = 0 \end{cases}$$

Příklad 11.29 *Uveďte seznam bodů, ve kterých funkce*

$$f(x) = \max\{\min\{x, 1\}, 0\}$$

nemá derivaci. Svou odpověď řádně zdůvodněte.

Příklad 11.30 *Dokažte tzv.* ***Leibnitzovu formuli*** *pro $n \geq 2$ (pro $n = 1$ byla odvezena na přednášce),*

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x) g^{(n-i)}(x).$$

12 Dvanáctý týden

12.1 Geometrická interpretace derivace

Příklad 12.1 *Nalezněte rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě a pro*

i. $f(x) = \sin x, \quad a = \frac{\pi}{3}$,

ii. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad a = 2$.

Příklad 12.2 *Nalezněte tečnu ke grafu funkce $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ v bodě a, kde $a = -1$, $a = 2$, $a = 3$.*

Příklad 12.3 *Nalezněte tečnu ke grafu funkce f^{-1} v bodě nula, platí-li $f(x) = e^x \ln x$.*

Příklad 12.4 *Nalezněte všechny asymptoty následující funkce:*

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} + \frac{1}{|x|} + 1\right).$$

Příklad 12.5 *Nalezněte všechny asymptoty následující funkce:*

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} + x.$$

Příklad 12.6 *Nalezněte všechny asymptoty následující funkce:*

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x} + \sin x.$$

Příklad 12.7 *Pod jakým úhlem se protínají křivky $y = x^2$ a $x = y^2$?*

Příklad 12.8 *Nalezněte funkci diferencovatelnou na svém definičním oboru, která je omezená a současně její derivace je neomezená.*

12.2 Spojitost, body nespojitosti

Příklad 12.9 *Zjistěte, kde jsou následující funkce spojité a v jejich bodech nespojitosti určete, o jaký druh nespojitosti se jedná:*

i. $f(x) = \frac{1}{\ln x}$,

ii. $f(x) = \frac{x}{\sin x}$,

iii. $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Příklad 12.10 *Zjistěte, kde je následující funkce spojitá a v jejích bodech nespojitosti určete, o jaký druh nespojitosti se jedná:*

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{x}\right) \operatorname{sgn}(|x|-2).$$

Příklad 12.11 *Zjistěte, kde je následující funkce spojita a v jejích bodech nespojitosti určete, o jaký druh nespojitosti se jedná:*

$$f(x) = \frac{\lfloor \cos x \rfloor}{x}.$$

12.3 Extrémy funkcí

Příklad 12.12 *Vyšetřete lokální extrémy následující funkce*

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}.$$

Příklad 12.13 *Vyšetřete lokální extrémy následující funkce*

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}.$$

Příklad 12.14 *Vyšetřete lokální extrémy následující funkce*

$$f(x) = \sin x - \cos x.$$

Příklad 12.15 *Vyšetřete lokální extrémy následující funkce*

$$f(x) = \cos x + \frac{\cos(2x)}{2}.$$

Příklad 12.16 *Ukažte, že funkce*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

má v bodě $x = 0$ minimum a funkce

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

nemá v bodě $x = 0$ extrém, ačkoliv pro obě funkce platí

$$f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 12.17 *Nalezněte všechny extrémy následující funkce. U každého extrému rovněž určete, jakého je druhu.*

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

Příklad 12.18 *Nalezněte všechny extrémy následující funkce. U každého extrému rovněž určete, jakého je druhu.*

$$f(x) = \arcsin x - \operatorname{sgn}(x) \arccos \sqrt{1 - x^2}.$$

Příklad 12.19 *Nalezněte všechny extrémy následující funkce. U každého extrému rovněž určete, jakého je druhu.*

$$f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

kde $x \in (0, \pi)$.

Příklad 12.20 *Nalezněte infimum a supremum množin*

$$A = \left\{ \frac{1+x}{3+x^2} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \quad a \quad B = \left\{ \frac{1+x}{3+x^2} \middle| x \in (0, +\infty) \right\}.$$

Příklad 12.21 *Nalezněte supremum a infimum funkce f na intervalu I pro*

$$f(x) = x^2 - 4x + 6, \quad I = \langle -3, 10 \rangle.$$

Příklad 12.22 *Nalezněte supremum a infimum funkce f na intervalu I pro*

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad I = \langle 0.01, 100 \rangle.$$

Příklad 12.23 *Nalezněte supremum a infimum funkce f na intervalu I pro*

$$f(x) = e^{-x^2} \cos x^2, \quad I = \mathbb{R}.$$

Příklad 12.24 *Každá racionální lomená funkce, která není konstantní, je ostře monotónní na $(-\infty, -x_0) \cup (x_0, +\infty)$, kde x_0 je dostatečně velké kladné číslo. Dokažte.*

12.4 Slovní úlohy na extrémy

Příklad 12.25 *Mezi všemi obdélníky s konstantním obvodem nalezněte ten s největší plochou.*

Příklad 12.26 *Spočítejte rozměry kvádru se čtvercovou podstavou a s největším možným objemem, který lze vepsat do polokoule o daném poloměru.*

Příklad 12.27 *Spočítejte rozměry kuželu s nejmenším možným objemem, který lze opsat dané kouli.*

Příklad 12.28 *Nalezněte nejmenší vzdálenost bodu $(2, 2)$ od paraboly $y^2 = 4x$.*

Příklad 12.29 *Nalezněte nejkratší a nejdelší vzdálenost bodu $(2, 0)$ od kružnice $x^2 + y^2 = 1$.*

Příklad 12.30 *Kolmo k řece šíře a je přiveden kanál šíře b. Jakou maximální délku může mít kláda (zanedbatelného průřezu), která lze splavit z řeky do tohoto kanálu?*

13 Třináctý týden

13.1 Konkávnost a konvexnost

Příklad 13.1 *Dokažte, že následující definice konvexnosti funkce f na intervalu I jsou ekvivalentní.*

i. $(\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3)(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1})$

ii. $(\forall \lambda \in \langle 0,1\rangle)(\forall x, y \in I)(f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$

iii. $(\forall x_1, \ldots, x_n \in I)(\forall \lambda_1, \ldots \lambda_n \in \langle 0,1\rangle, \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1)(f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k))$

Obdobné ekvivalence lze dokázat i pro konkávnost.

Příklad 13.2 *S využitím konvexnosti nebo konkávnosti dokažte, že pro všechna kladná čísla $x_1, \ldots, x_n$, kde $n \in \mathbb{N}$, platí*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Příklad 13.3 *S využitím konvexnosti nebo konkávnosti dokažte, že pro všechna kladná čísla $x_1, \ldots, x_n$, kde $n \in \mathbb{N}$, platí*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n).$$

Příklad 13.4 *Nalezněte maximální intervaly, na kterých je následující funkce (ryze) konvexní/konkávní:*

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Příklad 13.5 *Nalezněte maximální intervaly, na kterých je následující funkce (ryze) konvexní/konkávní:*

$$f(x) = x\sin(\ln x).$$

Příklad 13.6 *Nalezněte maximální intervaly, na kterých je následující funkce (ryze) konvexní/konkávní:*

$$f(x) = \arcsin|x|.$$

13.2 Důkazy nerovností

Příklad 13.7 *Dokažte nerovnosti*

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

pro $x \in (0, \pi/2)$.

Příklad 13.8 *Dokažte nerovnost*

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x$$

pro $x > 0$. *(Pozn: jedná se o optimální odhad polynomem nejvýše třetího stupně na kladné poloose, neboť* $\sin x = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{2n+1}/((2n+1)!)$.*)*

Příklad 13.9 *Dokažte nerovnost*

$$2x < \sin x + \operatorname{tg} x,$$

pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

13.3 Průběhy funkcí

Příklad 13.10 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}.$$

Příklad 13.11 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = (x-3)\sqrt{x}.$$

Příklad 13.12 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{|1+x|^{3/2}}{\sqrt{x}}.$$

Příklad 13.13 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = e^{-x} + x.$$

Příklad 13.14 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = x + \operatorname{arctg} x.$$

Příklad 13.15 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Příklad 13.16 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 2}.$$

Příklad 13.17 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = |x^3 - 6x^2 + 11x - 6|.$$

Příklad 13.18 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Příklad 13.19 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Příklad 13.20 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}.$$

Příklad 13.21 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

Příklad 13.22 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = |x+2|e^{-\frac{1}{x}}.$$

Příklad 13.23 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right).$$

Příklad 13.24 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Příklad 13.25 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = |x| + \operatorname{arctg}|x-1|.$$

Příklad 13.26 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{1+x}}.$$

Příklad 13.27 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

Příklad 13.28 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = x \operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

Příklad 13.29 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \arcsin\cos x.$$

Příklad 13.30 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \sinh\ln x.$$