Otázky k písemné části zkoušky z předmětu

01MAN Matematická analýza 1

Pravidla

- V každém písemném testu se objeví **právě tři otázky** z následujícího seznamu.
- Každá otázka bude obsahovat **nejvýše 4** z dílčích úloh a), b), c) atd., případně i méně (podle obtížnosti).
- Je-li v rámci jedné dílčí úlohy uvedeno více možností (ve smyslu A, resp. B, resp. C, ...), pak v konkrétním zadání budou zpravidla pouze některé z těchto možností.
- **Konkrétní příklady** množin, zobrazení, posloupností, funkcí atd. **se mohou lišit** od těch uvedených v tomto dokumentu, při zachování úrovně obtížnosti.
- Odpověď na každou otázku bude ohodnocena **maximálně 5 body**.
- Zkoušející může již během písemné zkoušky se studenty interagovat. O časovém limitu pro vypracování řešení rozhoduje zkoušející individuálně podle svého uvážení a podle reakcí studenta.
- Student postupuje k ústní části zkoušky, pokud z písemného testu získá **alespoň 8 bodů**.
- Jestliže student písemný test vypracoval bezchybně a získal plný počet bodů, složí zkoušku nejhůře se známkou E, bez ohledu na průběh ústní části.

---

1. **Relace a zobrazení I.** Nechť A, B jsou libovolné množiny

   a) Definujte pojmy relace $\mathcal{R}$ mezi množinami A, B a zobrazení f z množiny A do množiny B.

   b) Co je to definiční obor zobrazení f a obor hodnot zobrazení f?

   c) Pomocí kvantifikátorů zapište, že zobrazení f je injektivní (prosté).

   d) Pomocí kvantifikátorů zapište, že zobrazení f je surjektivní (na množinu B).

   e) Nechť $M \subset A$, $N \subset B$. Definujte $f(M)$ a $f^{-1}(N)$.

   f) Za jakých podmínek existuje inverzní zobrazení f^{-1} a co je jeho definičním oborem?

2. **Relace a zobrazení II.** Nechť M, A, B jsou libovolné množiny

   a) Definujte pojem relace $\mathcal{R}$ na množině M.

   b) Pomocí kvantifikátorů napište, co to znamená, že $\mathcal{R}$ je ekvivalence na M.

   c) Pomocí kvantifikátorů napište, co to znamená, že $\mathcal{R}$ je uspořádání na M.

   d) Kdy říkáme, že množina A je ekvivalentní s množinou B?

   e) Nalezněte příklad dvou ekvivalentních množin.

3. **Spočetné a nespočetné množiny**.

   a) Kdy řekneme, že množina A je spočetná?

   b) Které z následujících množin jsou spočetné? $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $C = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $D = (0, 1)$

c) Nechť A je spočetná a B je konečná množina. Co lze říci o množinách $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$?

4. Množina reálných čísel, supremum a infimum. Nechť $A \subset \mathbb{R}$.

a) Definujte dolní a horní závoru množiny A.

b) Kdy řekneme, že $x_0 \in \mathbb{R}$ je minimum, resp. maximum množiny A?

c) Definujte množinu opačnou $-A$

d) Co to je A^* a A_*?

e) Jaké dva výroky charakterizují číslo $\beta = \sup A$, resp. $\alpha = \inf A$? Zapište je pomocí kvantifikátorů.

f) Jaká vlastnost množiny reálných čísel zaručuje existenci $\sup A$ pro libovolnou $A \subset \mathbb{R}$?

5. Rozšířené množiny reálných a komplexních čísel $\bar{\mathbb{R}}$, $\bar{\mathbb{C}}$, **okolí bodu**.

a) Nechť $x \in \mathbb{R}$. Jaké nerovnosti platí mezi x a $+\infty$, mezi x a $-\infty$?

b) Definujte ε-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{C}$.

c) Definujte okolí bodů $+\infty$ a $-\infty$ v $\mathbb{R}$, resp. ∞ v $\mathbb{C}$.

d) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Rozhodněte, zda platí

$$(\forall \varepsilon_1 > 0)(\forall \varepsilon_2 > 0)(\exists x \in \mathbb{R})(x \in H_a(\varepsilon_1) \wedge x \in H_b(\varepsilon_2)).$$

e) Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Rozhodněte, zda platí

$$a + \varepsilon \in H_a(\varepsilon).$$

6. Číselné posloupnosti.

a) Definujte pojem posloupnost reálných čísel pomocí pojmu zobrazení.

b) Kdy řekneme, že číselná posloupnost (b_n) je vybraná z posloupnosti (a_n)?

c) Rozhodněte, zda je posloupnost $b_n = 2n^2 - 1$ vybraná z posloupnosti $a_n = 2n - 1$.

d) Zapište pomocí kvantifikátorů, že posloupnost reálných čísel (a_n) je ostře rostoucí, resp. ostře klesající, resp. rostoucí, resp. klesající, resp. monotónní, resp. ryze monotónní, resp. omezená zdola, resp. omezená shora, resp. omezená.

7. Limita číselné posloupnosti I. Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel

a) Zapište pomocí kvantifikátorů, co to znamená, že

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \in \mathbb{R}.$$

b) Zapište pomocí kvantifikátorů, co to znamená, že

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty.$$

c) Formulujte větu o limitě vybrané posloupnosti. Jak lze tuto větu použít k důkazu neexistence limity posloupnosti (a_n)?

d) Co to je posloupnost skorovybraná z posloupnosti (a_n)?

e) Formulujte větu o limitě skorovybrané posloupnosti.

f) Co lze říci o limitě monotónní posloupnosti? V jakém případě bude tato limita konečná?

g) Dokažte, že když $\lim_{n\to+\infty}|a_n| = 0$, tak i $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

8. Limita číselné posloupnosti II. Nechť (a_n), (b_n) jsou číselné posloupnosti, kde $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, kde $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.

a) Čemu se rovná

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n), \text{ resp. } \lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n), \text{ resp. } \lim_{n\to+\infty}(a_n b_n), \text{ resp. } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)?$$

a za jakých předpokladů?

b) Nalezněte posloupnosti (a_n), (b_n) tak, že vztah z předchozího bodu nelze použít.

c) Nechť $(\forall n \in \mathbb{N})\,(a_n > 0)$ a $k \in \mathbb{N}$. Čemu se rovná

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[k]{a_n}?$$

9. Limita číselné posloupnosti III.

a) Vyslovte větu o limitě sevřené posloupnosti (sendvičovou větu).

b) Víme, že

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

Nechť $a > 1$ je pevné číslo. Dokažte, že

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a} = 1.$$

10. Limita číselné posloupnosti IV.

a) Kdy řekneme, že posloupnost reálných čísel (a_n) je cauchyovská?

b) Vyslovte Bolzanovo-Cauchyovo kritérium konvergence číselné posloupnosti.

11. Eulerovo číslo e**.**

a) Definujte číslo e jako společnou limitu jistých dvou číselných posloupností. Jaké vlastnosti těchto posloupností jsou podstatné pro závěr, že mají limitu a že tato limita je konečná?

b) Znáte číslo e alespoň s přesností na 3 desetinná místa? Pokud ne, formulujte větu, která jej umožňuje efektivně a s dostatečnou přesností vypočítat.

c) Nechť (a_n) je kladná a (b_n) reálná číselná posloupnost. Nechť limity těchto posloupností jsou a, resp. b. Čemu se rovná

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n}$$

a proč?

12. Limes superior a limes inferior reálné posloupnosti.

a) Definujte pojem *hromadná hodnota posloupnosti reálných čísel* (a_n).

b) Jaký je nejmenší počet hromadných hodnot, které může reálná posloupnost mít?

c) Definujte pojem $\limsup a_n$, resp. $\liminf a_n$.

d) Vyslovte větu, která diskutuje případ, kdy $\limsup a_n = \liminf a_n$.

e) Nechť platí $\limsup a_n = -\infty$. Co lze říci o limitě posloupnosti a_n?

f) Napište pomocí kvantifikátorů, že dvě posloupnosti vybrané z (a_n) „pokrývají“ celou původní posloupnost (a_n). Jaký závěr lze učinit, pokud obě tyto posloupnosti mají stejnou limitu?

13. Stolzova věta a Cauchyův vzorec. Nechť (a_n), (b_n) jsou posloupnosti reálných čísel.

a) Vyslovte Stolzovu větu, který diskutuje výpočet limity

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

b) Vyslovte znění věty, které říkáme Cauchyův vzorec, a která hovoří o limitě

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

14. Funkce reálné proměnné. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Zapište pomocí kvantifikátorů, co to znamená, že f je na svém definičním oboru omezená, resp. omezená shora, resp. omezená zdola, resp. rostoucí, resp. ostře rostoucí, resp. klesající, resp. ostře klesající, resp. monotónní, resp. ryze monotónní.

b) Nalezněte funkci f, která na svém přirozeném definičním oboru (tj. pro všechna x, která lze dosadit do jejího předpisu) není prostá.

c) Nalezněte množinu A tak, že $f|_A$ již prostá je.

d) Nechť f je na A ostře rostoucí. Co lze říci o existenci a monotonii inverzní funkce f^{-1}?

15. Limita funkce reálné proměnné I a spojitost v bodě. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) Definujte hromadný bod množiny D_f.

b) Zapište pomocí kvantifikátorů, že

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \in \mathbb{R}.$$

V jaké množině musí ležet bod a? Připouští definice limity i $a = +\infty$?

c) Zapište definici limity funkce f v bodě a zprava, resp. zleva.

d) Zapište pomocí kvantifikátorů, že funkce f je spojitá v bodě a. Jaká věta dává do souvislosti limitu a spojitost funkce v bodě a?

16. Limita funkce reálné proměnné II.

a) Vyslovte Heineovu větu.

b) Zapište libovolné z tvrzení o výpočtu limit funkcí, v jehož důkazu se s výhodou používá Heineova věta.

c) Ukažte, že

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$

d) S pomocí Heineovy věty ukažte, že

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$$

neexistuje.

17. Limita funkce reálné proměnné III.

a) Vyslovte větu o limitě složené funkce.

b) Z platnosti

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$$

a s pomocí věty o limitě složené funkce dokažte, že

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \text{ resp. } \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

18. Spojitost funkce v bodě a na intervalu.

a) Za jakých předpokladů je funkce f spojitá v izolovaném bodě svého definičního oboru?

b) Definujte, co to znamená, že f je spojitá na intervalu $\mathcal{J}$.

c) Nechť f je spojitá na intervalu $(0, 2)$ a g je spojitá na intervalu $\langle 1, 3\rangle$. Co lze říct o spojitosti funkce $f + g$?

d) Co to znamená, že funkce f má v bodě a odstranitelnou nespojitost?

e) Co to znamená, že funkce f má v bodě a skok?

f) Vyslovte postačující podmínku pro existenci řešení rovnice $f(x) = 0$ na intervalu (a, b).

19. Derivace funkce I.

a) Definujte derivaci funkce f v bodě a. V jaké množině musí ležet bod a, aby definice dávala smysl?

b) Jaký je rozdíl mezi výroky „f je diferencovatelná v bodě a“ a „f má derivaci v bodě a“?

c) Dokažte, že je-li f diferencovatelná v bodě a, tak f je též spojitá v bodě a.

d) Podle definice vypočítejte $f'(a)$ pro $f(x) = \ln x$ a $a > 0$.

20. Derivace funkce II.

a) Vyslovte větu o derivaci součinu funkcí f,g v bodě a.

b) Vyslovte větu o derivaci složené funkce.

c) S pomocí věty o derivaci složené funkce dokažte, že

$$f(x) = x^{\alpha} \implies f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

pro každé $x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.

21. Derivace funkce III.

a) Vyslovte větu o derivaci inverzní funkce.

b) Ze znalosti derivace funkce $f(x) = \sin x$ a z věty o derivaci inverzní funkce odvoďte vztah pro derivaci funkce $f^{-1}(x) = \arcsin x$ pro $x \in (-1, 1)$.

22. Derivace funkce IV. (jednostranné derivace)

a) Definujte $f'_+(a)$, tj. derivaci funkce f v bodě a zprava (resp. zleva).

b) Vyslovte Darbouxovu větu o jednostranné derivaci.

c) Pomocí Darbouxovy věty ukažte, že pro $f(x) = \arcsin x$ je $f'_+(-1) = +\infty$.

23. Vyšetřování průběhu funkce I.

a) Zapište pomocí kvantifikátorů, že funkce f má v bodě a lokální minimum, resp. ostré lokální minimum, resp. lokální maximum, resp. ostré lokální maximum.

b) Vysvětlete, co se myslí tím, že má f v bodě a lokální extrém.

c) Vyslovte větu, která dává do souvislosti výskyt lokálního extrému f v bodě a a derivaci funkce f.

d) Vyslovte větu, která dává do souvislosti monotonii funkce f a derivaci funkce f na intervalu $\mathcal{J}$,

24. Vyšetřování průběhu funkce II. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a nechť $\mathcal{J} \subset D_f$ je interval.

a) Zapište pomocí kvantifikátorů, že funkce f je konvexní, resp. ostře konvexní, resp, konkávní, resp. ostře konkávní na intervalu $\mathcal{J}$.

b) Vyslovte větu, která dává do souvislosti konvexnost (resp. konkávnost) funkce f a její první derivaci f'.

c) Vyslovte větu, která dává do souvislosti konvexnost (resp. konkávnost) funkce f a její druhou derivaci f''.

25. Vyšetřování průběhu funkce III.

a) Co to znamená, že f má v bodě a asymptotu danou rovnicí $x = a$?

b) Co to znamená, že f má v $+\infty$ (resp. $-\infty$) asymptotu danou rovnicí $y = kx + q$?

c) Jak poznáme, že asymptota $y = kx + q$ existuje? Jak se určí k a q?

Poslední úprava: 10. prosince 2023
Otázky a podněty zasílejte na: `pavel.strachota@fjfi.cvut.cz`