01 MMDY

verze 2023/2024

- popis kinematiky a dynamiky kontinua (tekutiny)
- NS rovnice a jejich varianty
- matematická analýza rovnic
- úlohy pro proudění ve 3D, 2D, 1D + okrajové podmínky
- turbulentní proudění
- modely z praxe
  - přestup tepla, radiace
  - chemické děje (reagující proudění, hoření)
  - vícefázové proudění a fázové přechody
- inženýrský přístup k návrhu mat. modelů

MATEMATICKÝ APARÁT

- $\mathbb{R}^n$ (typicky $\mathbb{R}^3$) s bází $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ .. std. báze
  - standardní skal. součin $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

    \+ norma

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Co to je TENZOR :

vekt. p. V dimenze n nad T $(T = \mathbb{R})$. Tenzor $\mathbb{T}$ typu (p,q) a řádu $p+q$ kde $p,q \in \mathbb{N}$ je multilineární forma

$$\mathbb{T}: \underbrace{V^* \times V^* \times V^* \cdots \times V^*}_{p\text{-krát}} \times \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{q\text{-krát}} \to \mathbb{R}$$

resp. $\quad T \in \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{p\text{-krát}} \otimes \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q\text{-krát}}$

V^* .. duální prostor

$\otimes$ ... tenzorový součin vektorových prostorů

Př. $\quad V_1 \otimes V_2 \quad$ kde $\dim V_1 = n_1$
$\dim V_2 = n_2$

dim je $n_1 \cdot n_2$

$V_1 = \mathbb{R}^{n_1}$ $\quad$ std. báze V_1 je $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_{n_1}$
$V_2 = \mathbb{R}^{n_2}$ $\quad$ $\vec{f}_1 \dots \vec{f}_{n_2}$
$V_1 \otimes V_2 = \mathbb{R}^{n_1 n_2}$

prvky báze $V_1 \otimes V_2$ jsou $\underbrace{\vec{e}_i \otimes \vec{f}_j}_{} =$

$$\begin{array}{c c} & j \\ i & \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & 1 \\ & & \end{array} \right) \end{array}$$

$(\vec{g}_{ij})_{kl} = e_i^k f_j^l$

Př. $\quad$ tenzor typu $(1,0)$ $\quad \vec{v} : V^* \to \mathbb{R}$ $\quad \updownarrow$ Riesz ... je to vektor
$\vec{v} \in V$

tenzor typu $(0,1)$ $\quad \overleftarrow{v} : V \to \mathbb{R}$ $\quad \updownarrow$ $\quad$ je to lin. funkcionál
$\overleftarrow{v} \in V^*$

T je nezávislý na volbě báze V, ale v bázi V má reprezentaci
typu (p,q)

χ

$$= [T] = \left(\tau^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} \right)$$

$[T]_\chi = \hat{T}$

jestliže $q = 0 \implies T$ říkáme kontravariantní tenzor
$p = 0 \implies T$ —"— kovariantní t.
$pq \neq 0 \implies T$ je smíšeného typu

Einsteinovo sumační pravidlo

$$\rho^{i}_{klm} = \sigma^{ij}_{kl}\,\tau_{jm} = \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}_{kl}\,\tau_{jm}$$

$[R]$ $[S]$ $[T]$

$\hat{R}$ $\hat{S}$ $\hat{T}$

Př tenzor T typu $(1,2)$ aplikujeme na $(\underleftarrow{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in V^* \times V^2$

$$T(\underleftarrow{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \tau^{i}_{jk}\, u_i v^j w^k$$

$$\left(\sum_i^n \sum_j^n \sum_k^n \right.$$

TENZOROVÝ A VNITŘNÍ SOUČIN

$\hat{S} = [S] = \left(\sigma^{kl}_{m}\right)$ řádu 3 $\quad \hat{T} = [T] = \left(\tau^{i}_{j}\right)$ řádu 2

TENZOROVÝ: $\mathcal{U} = S \otimes T$ řádu 3+2 $\quad [\mathcal{U}] = \left(\mu^{ikl}_{jm}\right)$ a $\mu^{ikl}_{jm} = \sigma^{kl}_{m}\,\tau^{i}_{j}$

VNITŘNÍ (skalární): $[S] = \left(\sigma^{kl}_{m}\right)$ řádu 3 $\quad [T] = \left(\tau^{kl}_{m}\right)$ řádu 3 $\quad$ stejný typ

$$u = S \odot T = \sigma^{kl}_{m}\,\tau^{kl}_{m}$$

KOVARIANCE A KONTRAVARIANCE

V nad $\mathbb{R}$ $\quad \mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$, $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ jsou báze V.

Nechť $\vec{v} \in V$. Pak

j-tý souř. funkcionál ... j-tá souřadnice $\vec{v}$ v $\mathcal{X}$

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} x^j(\vec{v})\,\vec{x}_j = \sum_{i=1}^{n} y^i(\vec{v})\,\vec{y}_i$$

Jaký je vztah mezi souřadnicemi v bázi $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$: ?

$$y^i(\vec{v}) = y^i\left(\sum_{j=1}^{n} x^j(\vec{v})\,\vec{x}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x^j(\vec{v})\, y^i(\vec{x}_j) = \sum_{j=1}^{n} y^i(\vec{x}_j)\, x^j(\vec{v})$$

$$\Rightarrow \boxed{[\vec{v}]_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}\hat{\mathbb{P}}^{\mathcal{Y}}\,[\vec{v}]_{\mathcal{X}}} \; (*) \qquad \text{kde} \qquad {}^{\mathcal{X}}\hat{\mathbb{P}}^{\mathcal{Y}}_{ij} = \vec{y}^{\,i}(\vec{x}_j)$$

pozn. značení v souladu s lin. algebrou v 1. roč. Bc studia na FJFI

analogicky $\quad [\vec{v}]_{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{Y}}\hat{\mathbb{P}}^{\mathcal{X}}\,[\vec{v}]_{\mathcal{Y}} \quad$ kde $\quad {}^{\mathcal{Y}}\hat{\mathbb{P}}^{\mathcal{X}}_{ij} = \vec{x}^{\,i}(\vec{y}_j)$

a zřejmě $\quad {}^{\mathcal{Y}}\hat{\mathbb{P}}^{\mathcal{X}} = \left({}^{\mathcal{X}}\hat{\mathbb{P}}^{\mathcal{Y}}\right)^{-1}$ $\quad$ (protože $[\vec{v}]_{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}\hat{\mathbb{P}}^{\mathcal{Y}}[\vec{v}]_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}\hat{\mathbb{P}}^{\mathcal{Y}}\,{}^{\mathcal{Y}}\hat{\mathbb{P}}^{\mathcal{X}}[\vec{v}]_{\mathcal{X}}$)

Když konkrétně $V = \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{X} = (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)$ $\quad \mathbb{Y} = (\vec{y}_1 \dots \vec{y}_n)$

Nechť $\quad \mathbb{Y} = \mathbb{X}\mathbb{A} \quad$ kde $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, regulární

Potom $\quad \vec{v} = \mathbb{Y}[\vec{v}]_{\mathcal{Y}} = \underline{\mathbb{X}\mathbb{A}[\vec{v}]_{\mathcal{Y}}} = \underline{\mathbb{X}[\vec{v}]_{\mathcal{X}}}$

$$\Rightarrow \quad [\vec{v}]_{\mathcal{Y}} = \mathbb{A}^{-1}[\vec{v}]_{\mathcal{X}} \quad (**)$$

$(*) + (**) \Rightarrow \quad \mathbb{A} = {}^{\mathcal{Y}}\hat{\mathbb{P}}^{\mathcal{X}} = \left({}^{\mathcal{X}}\hat{\mathbb{P}}^{\mathcal{Y}}\right)^{-1}$ $\quad$ souřadnice $\vec{v}$ se transformují "opačně" než vektory báze $\Leftrightarrow$ "kontravariantně"

Príklad, vzo: $(\underleftarrow{x}^1, \dots \underleftarrow{x}^n)$ je báze V^*

Naopak vezmeme $\underleftarrow{w} \in V^*$. Pak pro $\vec{v} \in V$ platí

$$\underleftarrow{w}(\vec{v}) = \underleftarrow{w}\left(\sum_{i=1}^{n} \underleftarrow{x}^i(\vec{v})\vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \underleftarrow{x}^i(\vec{v})\,\underleftarrow{w}(\vec{x}_i) = \Big(\underbrace{\sum \underleftarrow{w}(\vec{x}_i)\underleftarrow{x}^i}_{=\underleftarrow{w}}\Big)(\vec{v})$$

tj. souřadnice $\underleftarrow{w}$ v bázi $\mathcal{X}^* = (\underleftarrow{x}^1, \dots, \underleftarrow{x}^n)$
jsou $\underleftarrow{w}(\vec{x}_i)$ $i = 1, \dots, n$.

Nyní - jaký je vztah mezi souřadnicemi $\underleftarrow{w}$ v bázi $\mathcal{X}^*$ a $\mathcal{Y}^*$?

$$\underleftarrow{w}(\vec{y}_i) = \underleftarrow{w}\left(\sum_{j=1}^{n} \underleftarrow{x}^j(\vec{y}_i)\vec{x}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \underleftarrow{x}^j(\vec{y}_i)\,\underleftarrow{w}(\vec{x}_j)$$

neboli vektorově (ti:) $\rightarrow = A^T$ v případě $V = \mathbb{R}^n$

$$[\underleftarrow{w}]_{\mathcal{Y}^*} = ({}^{\mathcal{Y}}\hat{\mathbb{P}}^{\mathcal{X}})^T [\underleftarrow{w}]_{\mathcal{X}^*}$$

připomínáme: ${}^{\mathcal{Y}}\hat{\mathbb{P}}^{\mathcal{X}}_{ij} = \underleftarrow{x}^i(\vec{y}_j)$

Souřadnice $\underleftarrow{w}$ se transformují "souhlasně" (kovariantně) s bází

$\Rightarrow$ Prvky V^* se nazývají <u>kovektory</u> (jsou reprezentovány prvky V pomocí Rieszovy věty)

POZN: Ve fyzice

- "reálné" fyz. veličiny (poloha, síla, rychlost, ..) jednotky: jsou kontravariantní vektory ... m

- fyz. veličiny typu gradientu funkce $\nabla f(\vec{x})\cdot\vec{v} = f'(\vec{x})\vec{v}$ jsou kovektory ... $\frac{1}{m}$

ORTOGONÁLNÍ TRANSFORMACE TENZORŮ

$\mathbb{R}^3$ s ON bází $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ + (std.) skal. součin

Potom ($\vec{v} \in \mathbb{R}^3$) $\quad \vec{x}_j \cdot \vec{v} = \vec{x}_j \cdot \left(x^i(\vec{v})\, \vec{x}_i \right) = x^i(\vec{v}) \underbrace{(\vec{x}_j \cdot \vec{x}_i)}_{\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}} = x^j(\vec{v})$

když $\mathcal{Y}$ je ON báze splňující

$$(\vec{y}_1\, \vec{y}_2\, \vec{y}_3) = (\vec{x}_1\, \vec{x}_2\, \vec{x}_3)\, A \quad \text{kde } A \text{ je OG}$$

$$\iff \underline{\underline{A^{-1} = A^T}}$$

$\Rightarrow$ prvky $\mathbb{R}^{3*}$ mají stejné souřadnice v $\mathcal{X}^*, \mathcal{Y}^*$ jako jejich reprezentanti v $\mathbb{R}^3$ v bázích $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ a transformují se pomocí A^T

$\Rightarrow$ kovariantní = kontravariantní

- Tenzor $\mathbb{T}$ řádu s se přechodem od báze $\mathcal{X}$ do $\mathcal{Y}$ pomocí $A = (\alpha_{ij})$ transformuje jako

$$[\mathbb{T}]_{\mathcal{X}} \; (= \hat{\mathbb{T}}) = (\tau_{i_1 \dots i_s}) \;,\; [\mathbb{T}]_{\mathcal{Y}} = (\tau'_{i_1 \dots i_s})$$

kde $\quad \tau'_{i_1 \dots i_s} = \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_s j_s} \tau_{j_1 \dots j_s}$.

$\tau'_{ij} = \alpha_{iI} \alpha_{jJ} \tau_{IJ}$

V MMDY budeme mít:

- tenzory 2. řádu (matice), ON báze

$\mathbb{T} \equiv \hat{\mathbb{T}} = [\mathbb{T}]_{\mathcal{X}} \quad \Rightarrow$ "^" už nepíšeme $\quad [\mathbb{T}]_{\mathcal{Y}} = A^T [\mathbb{T}]_{\mathcal{X}} A$

$\mathbb{T}' \equiv \hat{\mathbb{T}}' = [\mathbb{T}]_{\mathcal{Y}} \quad\quad \mathbb{T}' = A^T \mathbb{T} A$

Kroneckerovo δ

- $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

Levi-Civitův symbol

- $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \dots (i,j,k) \text{ je sudá permutace } (1,2,3) \\ -1 & \text{lichá} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

- $(\vec{a}\times\vec{b})_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}_i$

- tenzor transponovaný k tenzoru $\mathbb{T} = (\tau_{ij})$ je $\mathbb{T}^T = (\tau_{ji})$

  (POZN: $\vec{y}\cdot\mathbb{T}\vec{x} = \vec{x}\cdot\mathbb{T}^T\vec{y} \quad \forall \vec{x},\vec{y}$)

- $\mathbb{E}$ je symetrický $\Leftrightarrow$ $\mathbb{E} = \mathbb{E}^T$
- $\mathbb{W}$ je antisymetrický $\Leftrightarrow$ $\mathbb{W} = -\mathbb{W}^T$ (skew-symmetric)

  $\Big\} \Rightarrow \mathbb{E}\cdot\mathbb{W} = 0$

- vnitřní (skalární) součin tenzorů: $\mathbb{S}\odot\mathbb{T} = \mathbb{S}\cdot\mathbb{T} = \sigma_{ij}\tau_{ij}$

- vnitřní (s.) tenzoru s vektorem: $\vec{v}\cdot\mathbb{T} = \mathbb{T}\cdot\vec{v} = \mathbb{T}\vec{v} = (\tau_{ij}v_j)$

  (nad R)

- rozklad tenzoru: $\mathbb{T} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbb{T}+\mathbb{T}^T)}_{\substack{\mathbb{E} \\ (\text{sym.})}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbb{T}-\mathbb{T}^T)}_{\substack{\mathbb{W} \\ (\text{antisym.})}}$

- $\mathbb{W} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = (w_i)$

  $\Rightarrow (\forall \vec{v}\in\mathbb{R}^3)(\mathbb{W}\cdot\vec{v} = \vec{w}\times\vec{v})$

OD TEĎ SLOŽKY PÍŠEME DOLE

TROCHA LINEÁRNÍ ALGEBRY

- Nechť $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Potom
  $A = (\alpha_{ij})$

$$\det A = \varepsilon_{ijk}\,\alpha_{1i}\,\alpha_{2j}\,\alpha_{3k} = \sum_{\pi} \mathrm{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{3} \alpha_{i\pi(i)}$$

$$= \boxed{\frac{1}{3!}\,\varepsilon_{IJK}\,\varepsilon_{ijk}\,\alpha_{Ii}\,\alpha_{Jj}\,\alpha_{Kk}}$$

- Cramerovo pravidlo: $A\vec{x} = \vec{b}$, $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ regulární

$\Leftrightarrow \; x_i = \frac{1}{\det A}\,\Delta_i$ kde Δ_i je determinant matice,

která vznikne z A náhradou i-tého sloupce vektorem $\vec{b}$

- $AA^{-1} = I$ jestliže $A^{-1} = (\tilde{\alpha}_{ij})$, tak

$$\boxed{\tilde{\alpha}_{ij} = \frac{1}{\det A}\cdot \Delta_{ji}}$$

kde Δ_{ji} je determinant matice, která vznikla z A
nahrazením i-tého sloupce j-tým sloupcem I

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i,j) \;\; \ldots \text{ algebraický doplněk } \alpha_{ij}$$

$$\begin{array}{cc} & i \\ I & \begin{pmatrix} \cdot & 0 & \cdot \\ - & 1 & - \\ \cdot & 0 & \cdot \end{pmatrix} \end{array} \qquad \Delta_{Ii} = (-1)^{I+i} \det A\,(I,i) \qquad (\text{kofaktor } \alpha_{ij})$$

$$\boxed{\Delta_{Ii} = \frac{1}{2!}\,\varepsilon_{IJK}\,\varepsilon_{ijk}\,\alpha_{Jj}\,\alpha_{Kk}}$$

Diferenciální počet na vektorech a tenzorech v $\mathbb{R}^3$

- $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ (pozor! druhý $\frac{\partial}{\partial t}$!)

grad skal. pole
- $\nabla f = (\partial_i f)$ ← reprezentace "tenzoru" řádu 1 v std. bázi, $i \in \{1,2,3\}$

grad. vekt. pole
- $\nabla \vec{f} = (\partial_i f_j) = (\nabla \otimes \vec{f})^T$

divergence vektorového pole
- $\nabla \cdot \vec{f} = (\partial_i f_i) = \partial_i f_i = \operatorname{div} \vec{f}$ $\begin{cases} > 0 \ldots \text{"zdroj" v daném bodě} \\ < 0 \ldots \text{"propad"} \end{cases}$

divergence tenzorového pole řádu 2
- $\nabla \cdot \mathbb{T} = (\partial_j \tau_{ij}) = \begin{pmatrix} \nabla \cdot (\tau_{11}\ \tau_{12}\ \tau_{13}) \\ \nabla \cdot (\tau_{21}\ \tau_{22}\ \tau_{23}) \\ \nabla \cdot (\tau_{31}, \tau_{32}\ \tau_{33}) \end{pmatrix}$

- rotace vektoru (curl) $\quad \operatorname{rot} \vec{f} = \operatorname{curl} \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \varepsilon_{ikl} \partial_k f_l$

kde $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

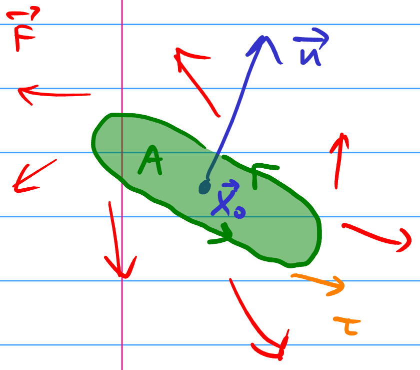
$(a \times b)_i = \varepsilon_{ikl} a_k b_l$

Levi-Civitův tenzor

- standardní báze $\mathbb{R}^3 = \mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$(e_i^j) = \delta_{ij}$

$\operatorname{rot} \vec{F}$ – jak to je

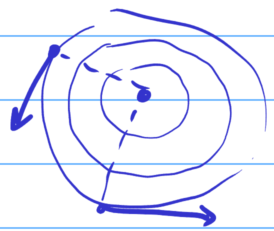


DEF :

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}_0) \cdot \vec{n} = \lim_{|A| \to 0} \frac{1}{|A|} \int_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

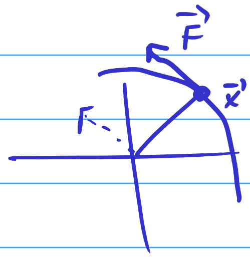
kde $\vec{n}$ je normála k A

Př: 2D rotující vekt. pole s úhlovou rychlostí ω



$A = B(\vec{0}, r)$ koule o poloměru r

$$\vec{F}(\vec{x}) = r\omega \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad d\vec{l} = \vec{\tau}\, dl$$

$\vec{F} \cdot \vec{\tau} = r\omega$

skal. součin nabývá největší hodnoty pokud

$\vec{F} \parallel \vec{\tau} \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{F} \parallel \vec{n}$

$$\operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(\vec{0}, r)|} \int_{\partial B(\vec{0}, r)} \vec{F} \cdot \vec{\tau}\, dl =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial B(\vec{0}, r)} r\omega\, dl = \lim_{r \to 0} \frac{2\pi r^2 \omega}{\pi r^2} = \underline{\underline{2\omega}}$$

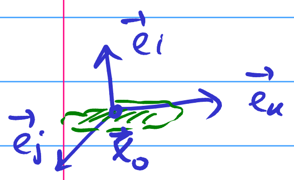
$\Downarrow$

INTUITIVNÍ INTERPRETACE

velikost $\operatorname{rot} \vec{F}$ je rovna dvojnásobku úhlové rychlosti rotace $\vec{F}$ kolem osy orientované souhlasně s $\operatorname{rot} \vec{F}$, vedené daným bodem

vektor $\mathrm{rot}\,\vec{F}$ v kartézských souřadnicích :

$$(\mathrm{rot}\,\vec{F})_i = \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{e}_i \qquad \text{kde } (\vec{e}_i)_j = \delta_{ij}$$ ... vektor standardní báze



$$(\mathrm{rot}\,\vec{F})_i = \lim_{|A|\to 0}\frac{1}{|A|}\int_{\partial A}\vec{F}\cdot d\vec{\ell} =$$

$$\boxed{A \text{ leží v rovině } \vec{e}_j\vec{e}_k \Rightarrow d\vec{\ell} = dx_j\vec{e}_j + dx_k\vec{e}_k}$$

$$= \lim_{|A|\to 0}\frac{1}{|A|}\int_{\partial A} F_i\vec{e}_i\cdot(dx_j\vec{e}_j + dx_k\vec{e}_k)\,d\ell = \lim_{|A|\to 0}\frac{1}{|A|}\int_{\partial A} F_j dx_j + F_k dx_k$$

Green v 2D (rovina x_1, x_2)

$$\int_{\partial A}\overbrace{\vec{F}\cdot d\vec{\ell}}^{F_1 dx_1 + F_2 dx_2} = \int_A \partial_2 F_1 - \partial_1 F_2\, d\vec{x}$$

$$= \lim_{|A|\to 0}\frac{1}{|A|}\int_{\partial A}\partial_k F_j - \partial_j F_k\, dx_j dx_k = \partial_k F_j - \partial_j F_k\Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0}$$

kde (i,j,k) je uspořádaná tak, že $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$ tvoří pravotočivou bázi $\Rightarrow$ záměna (i,j,k) musí zohlednit zn. permutace

$$\Rightarrow \quad \mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{x}_0) = \nabla\times\vec{F}(\vec{x}_0) = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\partial_j F_k = \begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}$$

INVARIANTY TENZORU

$$\mathbb{T}' = (\tau'_{ij})$$

- skalární fce $\lambda(\mathbb{T})$ je invariant tenzoru $\mathbb{T}$ $\Leftrightarrow$

$$\lambda((\tau_{ij})) = \lambda((\tau'_{ij}))$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{Q} = (q_{ij}) \ \text{... ortogonální} \\ \tau'_{ij} = q_{iI} q_{jJ} \tau_{IJ} \end{array}}$$

- např. mějme $\mathbb{S}, \mathbb{T}$ $\quad \mathbb{S} = (\sigma_{ij})$, $\mathbb{T} = (\tau_{ij})$

$$\mathbb{S} \cdot \mathbb{T} = \mathbb{S} \odot \mathbb{T} = \sigma_{ij} \tau_{ij} \quad \text{.. je invariant}$$

$$\boxed{\sigma'_{ij} \tau'_{ij}} = q_{ik} q_{jl} \sigma_{kl} q_{ir} q_{js} \tau_{rs} = \delta_{kr} \delta_{ls} \sigma_{kl} \tau_{rs} = \boxed{\sigma_{kl} \tau_{kl}}$$

$$\delta_{kr} \qquad \delta_{ls}$$

Konkrétně $\mathbb{S} = \mathbb{I}$: $\quad \mathbb{I} \cdot \mathbb{T} = \delta_{ij} \tau_{ij} = \tau_{ii} = \operatorname{Tr} \mathbb{T}$

stopa $\mathbb{T}$

$$\ell(\lambda) = \det(\mathbb{T} - \lambda \mathbb{I})$$

protože $\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det \mathbb{A} \cdot \det \mathbb{B}$, tak

$$\det(\underbrace{\mathbb{Q}^T \mathbb{T} \mathbb{Q}}_{\mathbb{T}'} - \lambda \mathbb{I}) = \det(\mathbb{Q}^T (\mathbb{T} - \lambda \mathbb{I}) \mathbb{Q}) = \det(\mathbb{T} - \lambda \mathbb{I})$$

koeficienty char. polynomu $\mathbb{T} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

hlavní invarianty tenzoru $\mathbb{T}$

$$\begin{cases} {}_{\mathbb{T}}I_1 = \operatorname{Tr} \mathbb{T} \\ {}_{\mathbb{T}}I_2 = \frac{1}{2}\left((\operatorname{Tr} \mathbb{T})^2 - \operatorname{Tr}(\mathbb{T}^2)\right) \\ {}_{\mathbb{T}}I_2 = \det \mathbb{T} \end{cases}$$

POZN: (Cayley–Hamiltonova věta) : $\mathbb{T}$ je kořenem svého char. polynomu

IZOTROPNÍ TENZOROVÉ FUNKCE

Tenzorová funkce $\mathbb{F} : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ se nazývá IZOTROPNÍ

$\Leftrightarrow$ pro každou ortogonální transf. $\mathbb{Q}$ a každý $\mathbb{T} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ platí

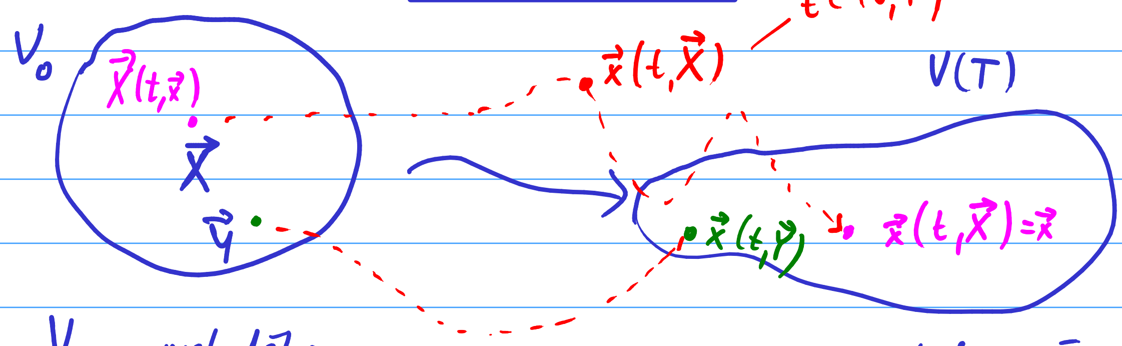
$$\mathbb{Q}^T \mathbb{F}(\mathbb{T}) \mathbb{Q} = \mathbb{F}(\mathbb{Q}^T \mathbb{T} \mathbb{Q})$$

Neboli: $\underline{\mathbb{F}'(\mathbb{T}) \quad = \mathbb{F}(\mathbb{T}')}$

KINEMATIKA TEKUTIN

→ $V \subset \mathbb{R}^3$ ... souvislá množina (oblast)

tzv. materiálové těleso



V_0 ... mat. těleso v čase $t=0$

mat. t. v čase $T>0$

materiálové (referenční) souřadnice

aktuální souřadnice

existuje zobrazení $\vec{x} : \underbrace{(0,T)}_{\text{časový interval}} \times V_0 \to \mathbb{R}^3$ poloha bodu $\vec{X}$ v čase t

$\vec{x}(t,\vec{X})$

$\vec{x}(t,\vec{Y})$

POZN: $\dfrac{\partial \vec{x}}{\partial t}(t,\vec{X}) = \vec{v}(t,\vec{X})$ .. rychlost bodu $\vec{X}$ v čase t

- $\vec{x}$ je prosté a regulární, tj. $\exists\, \vec{x}^{-1} = \vec{X}$

$$\vec{X} = \vec{X}(t,\vec{x})$$

a $\det \mathbb{J}_{\vec{x}} = \det \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) \neq 0$

Označujeme $\mathbb{F}(t,\vec{X}) = \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}(t,\vec{X}) \right)$ ... deformační gradient

MATERIÁLOVÁ DERIVACE

mějme $w : (0,T) \times V_0 \to \mathbb{R}$

mějme $W : (0,T) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ takovou, že platí

$$w(t,\vec{X}) = W(t, \vec{x}(t,\vec{X})) \iff W(t,\vec{x}) = w(t, \underbrace{\vec{X}}_{\vec{x}^{-1}}(t,\vec{x}))$$

$$= W(t,\vec{x}) \qquad\qquad = w(t,\vec{X})$$

kde $\overset{\text{prom.}}{\vec{x}} = \overset{\text{fce}}{\vec{x}}(t,\vec{X})$

$$\frac{\partial w(t,\vec{X})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(W(\vec{\Phi}(t,\vec{X}))\right) = \left\{ \text{kde } \vec{\Phi}(t,\vec{X}) = \begin{pmatrix}\phi_0\\ \phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x}(t,\vec{X})\end{pmatrix} \right.$$

$$\cancel{\frac{\partial W(t,\vec{x})}{\partial t}}$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial W}{\partial \phi_k}(\vec{\Phi}(t,\vec{X})) \cdot \frac{\partial \vec{\Phi}_k}{\partial t}(t,\vec{X}) =$$

$$= \frac{\partial W}{\partial t}(t,\vec{x}(t,\vec{X})) + \frac{\partial W}{\partial x_k}(t,\vec{x}(t,\vec{X})) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t}(t,\vec{X})$$

$$v_k(t,\vec{X}) = V_k(t,\vec{x}(t,\vec{X}))$$

$$= \left.\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{V}\cdot \operatorname{grad} W \right|_{(t,\vec{x}(t,\vec{X})) = (t,\vec{x})}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\right)}_{\frac{D}{Dt}} W(t,\vec{x}) = \frac{DW}{Dt}(t,\vec{x})$$

materiálová derivace

POZN: Pro vektorové veličiny def. $\frac{D}{Dt}$ po složkách.

(Př) zrychlení bodu $\vec{X}$ v čase t je

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(t,\vec{X}) = \frac{D\vec{V}}{Dt}(t,\vec{x}) \quad \text{kde } \vec{x} = \vec{x}(t,\vec{X})$$

HYPOTÉZA KONTINUA

Def: materiálové těleso V považujeme za kontinuum, právě když existuje míra M na $\mathbb{R}^3$, že pro každou měřitelnou (borelovskou) množinu $A \subset V$ platí

$$m_3(A) = 0 \Rightarrow M(A) = 0$$

klasická Lebesgueova míra .. objem

tj. M je spojitá vzhledem k m_3, a navíc $M(A)$ má fyzikální smysl hmotnosti množiny A.

Def: Nechť Ψ, resp. $\vec{\Psi}$ je míra (resp. "vektorová" míra) taková, že $\forall \vec{x} \in V^0$ existuje limita

$$\vec{\psi}(\vec{x}) = \lim_{R \to 0+} \frac{\vec{\Psi}(B_R(\vec{x}))}{M(B_R(\vec{x}))}$$

kde

$$B_R(\vec{x}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{x} - \vec{y}| < R\}$$

Potom Ψ (resp. $\vec{\Psi}$) nazýváme extenzivní skalární (resp. vektorovou) fyzikální veličinou. ψ (resp. $\vec{\psi}$) je příslušná "specifická" fyz. veličina

(Př) $\vec{\Psi}$ ... hybnost $\vec{P}$ $\Rightarrow$ $\vec{\psi}$ ... rychlost $\vec{v}$

Pozn.: Nechť $\mathcal{V} \subset V$ (kontrolní objem)

Pak $\Psi(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \psi(\vec{x})\, dM = \int_{\mathcal{V}} \psi(\vec{x}) \varrho(\vec{x})\, d\vec{x}$

ϱ ... hustota materiálu

$\psi = \frac{d\Psi}{dM}$ (Radon-Nikodymova derivace)

$$\varrho(\vec{x}) = \lim_{R \to 0+} \frac{M(B_R(\vec{x}))}{\underbrace{m_3(B_R(\vec{x}))}_{\frac{4}{3}\pi R^3}}$$

$\rho(\vec{X}) = \varrho(\vec{x})$ kde $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X})$ bez "t"

$$\Psi(\mathcal{V}_0) = \int_{\mathcal{V}_0} \psi(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}M = \int_{\mathcal{V}_0} \psi(\boldsymbol{x})\, \varrho(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

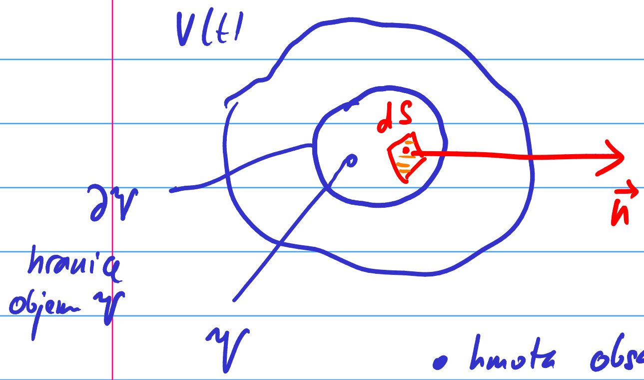
$$\boldsymbol{\Psi}(\mathcal{V}_0) = \int_{\mathcal{V}_0} \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}M = \int_{\mathcal{V}_0} \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})\, \varrho(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

ZÁKON ZACHOVÁNÍ HMOTY

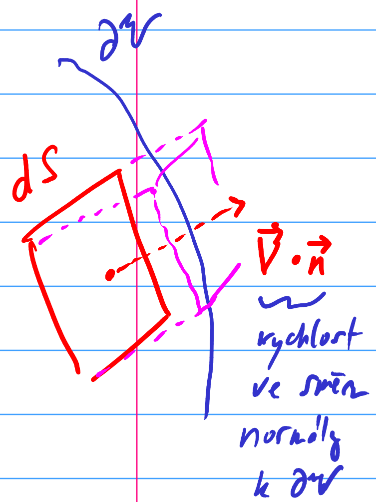
- $\vec{X} \in V_0$, $\mathcal{V}_0 \subset V_0$ (referenční konfigurace materiálového tělesa) $\Rightarrow$ Lagrangeův přístup
- $\vec{x} \in V_0$, $\mathcal{V} \subset V(t)$ ... Eulerův přístup – přirozený pro studium proudění tekutin

Zvolme $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ ... kontrolní objem

$\subset V(t)$



$\vec{n}$ normála k plošce $dS \subset \partial\mathcal{V}$
vnější



- hmota obsažená ve $\mathcal{V}$ v čase t

$$M(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \rho(t,\vec{x})\, d\vec{x}$$

- $$-\frac{dM}{dt}(\mathcal{V}) = \int_{\partial\mathcal{V}} \rho(t,\vec{x})\, \vec{V}(t,\vec{x}) \cdot \underbrace{\vec{n}\, dS}_{d\vec{S}} =$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\rho \vec{V})\, d\vec{x}$$

úbytek hmoty v $\mathcal{V}$ za jednotku času prouděním přes hranici

$$\Downarrow$$

$$-\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho(t,\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\rho \vec{V})\, d\vec{x}$$

ZZ hmotnosti v $\int$ tvaru

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V})\, d\vec{x} = 0$$

pro lib. $\mathcal{V}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \right|_{(t,\vec{x})}}$$

rovnice kontinuity (ZZHm. v dif. tvaru)

Reynoldsův transportní teorém

Lemma: $$\left.\frac{\partial (\det \mathbb{F})}{\partial t}\right|_{(t,\vec{X})} = \left.\det \mathbb{F}\right|_{(t,\vec{X})} \left.\nabla\cdot\vec{V}\right|_{(t,\vec{x}(t,\vec{X}))}$$

$$\mathbb{F} = \left.\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right)\right|_{(t,\vec{X})}$$

deformační gradient

Dk: $$\left.\frac{\partial(\det \mathbb{F})}{\partial t}\right|_{(t,\vec{X})} = \left.\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{3!}\varepsilon_{IJK}\,\varepsilon_{ijk}\,\frac{\partial x_I}{\partial X_i}\frac{\partial x_J}{\partial X_j}\frac{\partial x_K}{\partial X_k}\right)\right|_{(t,\vec{X})} =$$

$$= \left.\frac{1}{3!}\varepsilon_{IJK}\,\varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial v_I}{\partial X_i}\frac{\partial x_J}{\partial X_j}\frac{\partial x_K}{\partial X_k} + \underbrace{\frac{\partial x_I}{\partial X_i}\frac{\partial v_J}{\partial X_j}\frac{\partial x_K}{\partial X_k}}_{\substack{J\leftrightarrow I\\ j\leftrightarrow i}} + \underbrace{\frac{\partial x_I}{\partial X_i}\frac{\partial x_J}{\partial X_j}\frac{\partial v_K}{\partial X_k}}_{\substack{K\leftrightarrow I\\ k\leftrightarrow i}}\right)\right|_{(t,\vec{X})}$$

$$= \frac{1}{2!}\varepsilon_{IJK}\,\varepsilon_{ijk}\,\frac{\partial v_I}{\partial X_i}\frac{\partial x_J}{\partial X_j}\frac{\partial x_K}{\partial X_k} = \left.\frac{\partial v_I}{\partial X_i}\,\underbrace{\frac{1}{2!}\varepsilon_{IJK}\,\varepsilon_{ijk}\,\frac{\partial x_J}{\partial X_j}\frac{\partial x_K}{\partial X_k}}_{\Delta_{Ii} = \det\mathbb{F}\cdot\frac{\partial X_i}{\partial x_I}}\right|_{(t,\vec{X})}$$

$$\boxed{\Delta_{Ii} = \frac{1}{2!}\varepsilon_{IJK}\,\varepsilon_{ijk}\,\alpha_{Jj}\,\alpha_{Kk}}$$

$$\mathbb{F}^{-1} = \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)$$

$$= \left.\frac{\partial V_I(t,\vec{x}(t,\vec{X}))}{\partial x_\ell}\left(\underbrace{\frac{\partial x_\ell}{\partial X_i}\frac{\partial X_i}{\partial x_I}}_{(\mathbb{F}\cdot\mathbb{F}^{-1})_{I\ell}=\delta_{I\ell}}\det\mathbb{F}\right)\right|_{(t,\vec{X})}$$

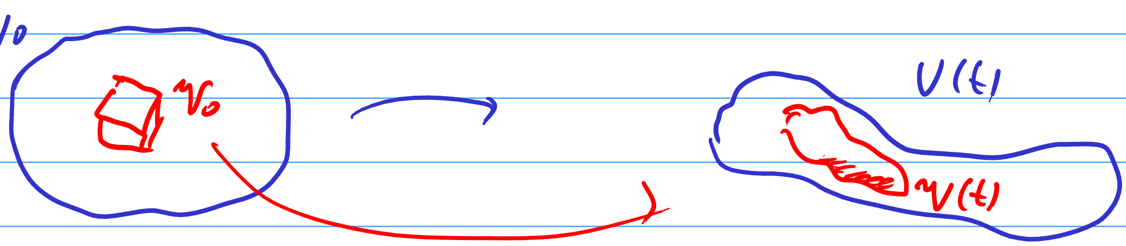
$$= \frac{\partial V_I(t,\vec{x}(t,\vec{X}))}{\partial x_I}\left.\det\mathbb{F}\right|_{(t,\vec{X})} = \left.\det\mathbb{F}\right|_{(t,\vec{X})}\left.\nabla\cdot\vec{V}\right|_{(t,\vec{x})}$$

Reynoldsův T.T.: Zvolme $\mathcal{V}_0 \subset V_0$ a nechť $\phi : (0,T) \times V_0 \to \mathbb{R}$

a $\Phi : (0,T) \times V(t) \to \mathbb{R}$ je def.

$$\Phi(t,\vec{x}) = \phi(t,\vec{X}) \quad \text{kde } \vec{x} = \vec{x}(t,\vec{X})$$

$$V(t) = \vec{x}(t, V_0) \quad \text{a} \quad \mathcal{V}(t) = \vec{x}(t, \mathcal{V}_0)$$



$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}(t)} \Phi(t,\vec{x})\,d\vec{x} = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}_0} \underbrace{\Phi(t,\vec{x}(t,\vec{X}))}_{\phi(t,\vec{X})}\,|\det \mathbb{F}|\,d\vec{X} =$$

$\hookrightarrow \vec{x} = \vec{x}(t,\vec{X})$

$$= \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}_0} \phi\,|\det \mathbb{F}|\,d\vec{X} = \int_{\mathcal{V}_0} \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\,|\det \mathbb{F}|\right) d\vec{X} = \int_{\mathcal{V}_0}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi\, \nabla\cdot\vec{V}(t,\vec{x}(t,\vec{X}))\right]|\det \mathbb{F}|\,d\vec{X}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,\vec{X}) = \frac{D\Phi}{Dt}(t,\vec{x}(t,\vec{X}))$$

$$= \int_{\mathcal{V}(t)} \left(\underbrace{\frac{D\Phi}{Dt}} + \Phi\,\nabla\cdot\vec{V}\right)\Big|_{(t,\vec{x})} d\vec{x} =$$

$$= \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \underbrace{\vec{V}\cdot\nabla\Phi + \Phi\,\nabla\cdot\vec{V}}_{\nabla\cdot(\Phi\vec{V})}\,d\vec{x} = \boxed{\int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla\cdot(\Phi\vec{V})\,d\vec{x}}$$

POZN: Rovnice kontinuity a RTT:

$$\Phi = \varrho \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \varrho(t,\vec{x})\,d\vec{x}}_{} = 0 = \int_{V(t)} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla\cdot(\varrho\vec{V})\,d\vec{x}$$

ZZHm | $M(V(t))$ = hmota obsažená v $V(t)$
= hmota obsažená v V_0 $= M(V_0) = \int_{V_0} \rho(t,\vec{X})\,d\vec{X}$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho\nabla\cdot\vec{V} = \underline{\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}) = 0}$$

opět rovnice kontinuity v aktuálních souřadnicích

Důsledek Reynoldsova transp. teorému

$\Phi = \varrho F$ F lib. fce, ϱ je hustota

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \varrho F\,d\vec{x} = \dots = \int_{V(t)} \frac{D(\varrho F)}{Dt} + (\varrho F)\nabla\cdot\vec{V}\,d\vec{x} =$$

$$= \int_{V(t)} \frac{D\varrho}{Dt}F + \varrho\frac{DF}{Dt} + \varrho F\nabla\cdot\vec{V}\,d\vec{x} = \int_{V(t)} \varrho\frac{DF}{Dt}\,dx$$

$$F\left(\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho\nabla\cdot\vec{V}\right) = 0$$

PROUDNICE A TRAJEKTORIE

- **trajektorie** bodu $\vec{X} \in V_0$ je křivka

$$\varphi = \{ \vec{x}(t, \vec{X}) \mid t \in \langle 0, T \rangle \}$$

s „přirozenou" parametrizací

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{x}(t, \vec{X}) \quad \Big| \ \frac{\partial}{\partial t} \text{ pro pevné } \vec{X}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{\varphi}}{dt} &= \vec{v}(t, \vec{X}) = \vec{V}(t, \vec{\varphi}(t)) \\ \vec{\varphi}(0) &= \vec{X} \end{aligned}}$$

- **proudnice** jsou křivky, které jsou v daném čase $t \in \langle 0, T)$ v každém $\vec{x} \in V(t)$ tečné k rychlostnímu poli $\vec{V}(t, \vec{x})$

parametrizace křivky φ daná zobrazením $\vec{\vec{\varphi}}$ popisuje proudnici rychlostního pole v čase t, procházející bodem $\vec{x} \in V(t)$, jestliže platí

BĚNO: $\alpha = 1$ $\quad \tilde{s} = h(s)$

$\vec{\tilde{\varphi}} : s \mapsto V(t)$ a

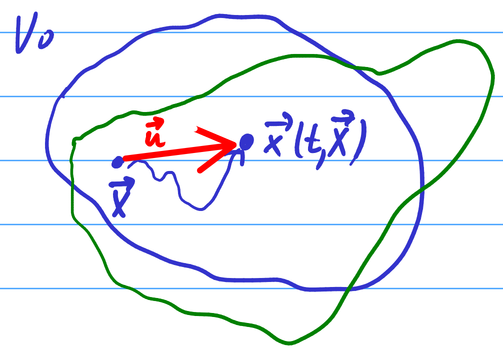
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{\tilde{\varphi}}(s)}{ds} &=_\alpha \vec{V}(t, \vec{\tilde{\varphi}}(s)) \\ \vec{\tilde{\varphi}}(0) &= \vec{x} \end{aligned}}$$

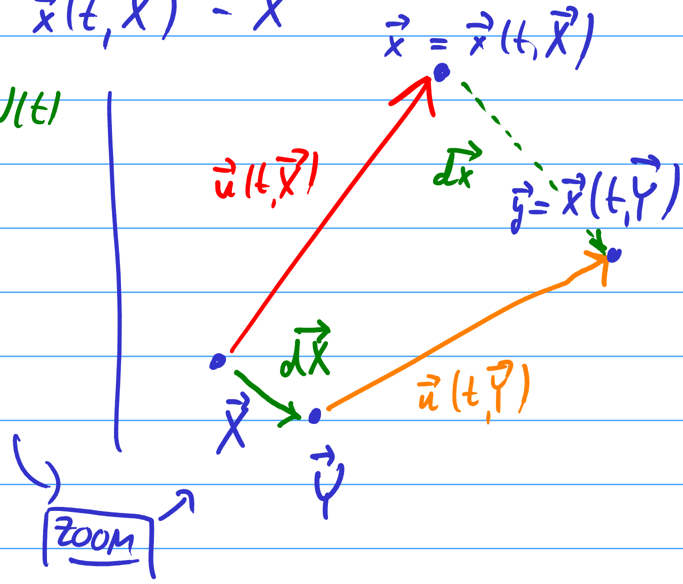
$\alpha > 0$

V případě, že $\vec{V}$ nezávisí na čase, proudnice a trajektorie splývají a hovoříme o ustáleném (stacionárním) proudění

Popis deformace v tekutině

- vektor posunutí $\quad \vec{u}(t,\vec{X}) = \vec{x}(t,\vec{X}) - \vec{X}$





pro $\vec{X}, \vec{Y} \in V_0$ def.

$$d\vec{X} = \vec{Y} - \vec{X}$$
$$\vec{X} + d\vec{X} = \vec{Y}$$

$$\vec{x} = \vec{x}(t,\vec{X}) = \vec{X} + \vec{u}(t,\vec{X})$$
$$\vec{y} = \vec{x}(t,\vec{Y}) = \vec{Y} + \vec{u}(t,\vec{Y})$$

$$\begin{aligned} d\vec{x} = \vec{y} - \vec{x} &= \vec{x}(t, \vec{X} + d\vec{X}) - \vec{x}(t,\vec{X}) = \\ &= \vec{x}(t,\vec{X}) + \nabla\vec{x}(t,\vec{X}) \cdot d\vec{X} + \vec{\omega}(d\vec{X}) - \vec{x}(t,\vec{X}) \\ &= \nabla\vec{x}(t,\vec{X}) \cdot d\vec{X} + \vec{\omega}(d\vec{X}) \\ &= \mathbb{F}(t,\vec{X}) \cdot d\vec{X} + \vec{\omega}(d\vec{X}) \end{aligned}$$

$$\nabla\vec{x} = (\partial_i x_j) \leftarrow \mathbb{F} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right)$$

$$\overbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\vec{\omega}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}}$$

Po složkách: $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j + o(\|d\vec{X}\|)$

def. $\boxed{\mathbb{H} = \nabla u = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right) = \left(\frac{\partial (x_i - X_i)}{\partial X_j}\right) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right) = \mathbb{F} - \mathbb{I}}$

a dosazením do $d\vec{x} = \mathbb{F} \cdot d\vec{X} + \vec{o}(d\vec{X})$

dostaneme

$$d\vec{x} = (\mathbb{H} + \mathbb{I}) d\vec{X} + \vec{o}(d\vec{X}) = d\vec{X} + \nabla\vec{u} \cdot d\vec{X} + \vec{o}(d\vec{X})$$

Lagrangeův deformační tenzor

$$\|d\vec{x}\|^2 = \|d\vec{X} + \nabla\vec{u} \cdot d\vec{X} + \vec{o}(d\vec{X})\|^2 =$$

$$\left(dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j + o(d\vec{X})\right)\left(dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} dX_k + o(d\vec{X})\right) =$$

$$= dX_i dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j dX_i + \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial X_k} dX_i dX_k}_{i \to j,\ k \to i} + \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_k}}_{i \leftrightarrow k} dX_j dX_k + o(d\vec{X})$$

$$= \|d\vec{X}\|^2 + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j dX_i + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} dX_j dX_i + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} dX_j dX_i + o(d\vec{X})$$

$$= \|d\vec{X}\|^2 + 2\varepsilon_{ij} dX_j dX_i + o(d\vec{X}), \quad \text{kde}$$

$$e(t, \vec{X}) = (\varepsilon_{ij}) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i}}_{\text{lze zanedbat}}\right)\right)$$

Lagrangeův deformační tenzor

$\downarrow$

$$\tilde{e}(t, \vec{X}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

... tenzor malých deformací

$$\nabla\vec{u} = \mathbb{H} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right) = \underbrace{\overbrace{\tfrac{1}{2}\left(\mathbb{H}+\mathbb{H}^T\right)}^{\nabla\vec{u}_{sym}}}_{\text{sym. část}\ \tilde{e}} + \underbrace{\overbrace{\tfrac{1}{2}\left(\mathbb{H}-\mathbb{H}^T\right)}^{\nabla\vec{u}_{skew}}}_{\text{antisym. část}}$$

$$d\vec{x} - o(d\vec{X}) = d\vec{X} + \nabla\vec{u}\cdot d\vec{X} = d\vec{X} + \nabla\vec{u}_{sym}\cdot d\vec{X} + \nabla\vec{u}_{skew}\cdot d\vec{X}$$

$$= d\vec{X} + \tilde{e}\cdot d\vec{X} + \underline{\vec{\omega}\times d\vec{X}}$$

kde $\nabla\vec{u}_{skew} = \begin{pmatrix} 0 & -w_2 & -w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$

$\vec{w} = (w_i) = \nabla\times\vec{u}$ $(= \operatorname{rot}\vec{u})$

$\vec{x} = \vec{x}(t,\vec{X}) = \vec{X} + \vec{u}(t,\vec{X})$

$\vec{y} = \vec{x}(t,\vec{Y}) = \vec{Y} + \vec{u}(t,\vec{Y})$

$$\vec{u}(t,\vec{Y}) = \vec{u}(t,\vec{X}) + \overbrace{\underbrace{\vec{y}-\vec{x}}_{d\vec{x}}}^{} - \underbrace{(\vec{Y}-\vec{X})}_{d\vec{X}} = \vec{u}(t,\vec{X}) + d\vec{x} - d\vec{X} =$$

$\vec{x}-\vec{X}$

$\vec{y}-\vec{Y}$

$$= \vec{u}(t,\vec{X}) + \tilde{e}\cdot d\vec{X} + \vec{\omega}\times d\vec{X} \quad \text{kde } \vec{\omega} = \operatorname{rot}\vec{u}(t,\vec{X})$$

$$+ o(d\vec{X})$$

posun Y lze rozložit na

posun bodu $\vec{X}$

roztažení, zkrácení ve směrech vl. vektorů $\tilde{e}$

$\tilde{e}$ je sym. tenzor $\Rightarrow$ je diag, reálné spektrum

rotace $\vec{Y}$ podle bodu $\vec{X}$

deformace vyšších řádů než $\|d\vec{X}\|$

Tenzor rychlosti deformace

$\nabla\vec{u} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right)$ $\quad \frac{d}{dt}(\nabla\vec{u}) = \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j}\right) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial X_j}\right)$

$\vec{u} = \vec{x}(t,\vec{X}) - \vec{X}$

$$\frac{d}{dt}(d\vec{x}) = \frac{d}{dt}\left(\nabla\vec{u}(t,\vec{X})\cdot d\vec{X} + o(d\vec{X})\right) = \nabla\vec{v}(t,\vec{X})\cdot d\vec{X} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial X_j} dX_j\right) + o(d\vec{X})$$

$d\vec{x} = d\vec{X} + \nabla\vec{u}\cdot d\vec{X}$

gradient rychlosti v mater. s.

$$\frac{d(d\vec{x})}{dt} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial X_j} dX_j\right) = \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} \overbrace{\frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_j}^{dx_k + o(d\vec{X})}\right) = \underbrace{\nabla \vec{V}(t,\vec{x})}_{\text{grad. hitrosti v aktualni točki.}} \cdot d\vec{x} + o(d\vec{x})$$

"Zanimive" veličine
$$\frac{\frac{d}{dt}\|d\vec{x}\|}{\|d\vec{x}\|} = \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dt}\|d\vec{x}\|^2}{\|d\vec{x}\|^2} = \frac{1}{2}\frac{2\dot{\varepsilon}_{ij}\,dX_i dX_j}{\|d\vec{x}\|^2}$$

upoštevamo
$$2\dot{\varepsilon}_{ij}\,dX_i dX_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) dX_i dX_j =$$

$$= \left(\frac{\partial v_i}{\partial X_j} + \underbrace{\frac{\partial v_j}{\partial X_i}}_{i\leftrightarrow j} + \frac{\partial v_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial v_k}{\partial X_j}\right) dX_i dX_j =$$

$$= 2\left(\frac{\partial v_j}{\partial X_i} + \frac{\partial v_k}{\partial X_j}\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\right) dX_i dX_j =$$

povzemimo $\mathbb{H} = \mathbb{F} - \mathbb{I}$

$u_i = x_i - X_i$

tj. $\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij}$

$$= 2\left(\cancel{\frac{\partial v_j}{\partial X_i}} + \frac{\partial v_k}{\partial X_j}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} - \cancel{\delta_{ik}}\right)\right) dX_i dX_j =$$

$$= 2\frac{\partial v_k}{\partial X_j}\frac{\partial x_k}{\partial X_i} dX_i dX_j = 2\frac{\partial V_k}{\partial x_\ell}\frac{\partial x_\ell}{\partial X_j}\overbrace{\frac{\partial x_k}{\partial X_i} dX_i}^{dx_k + o(d\vec{x})} dX_j =$$

$dx_\ell + o(d\vec{x})$

$$= 2\frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} dx_k dx_\ell + o\left(\|d\vec{x}\|^2\right)$$

$$= \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) dx_i dx_j + o\left(\|d\vec{x}\|^2\right)$$

$$= \mathbb{D}\vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{d}{dt}(\|d\vec{x}\|)}{\|d\vec{x}\|} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)}_{d_{ij}} \underbrace{\frac{dx_i\, dx_j}{dx_k\, dx_k}}_{\alpha_i \alpha_j} + \dots$$

$\to 0$ pro $\|d\vec{x}\| \to 0$

kde $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{x}}{\|d\vec{x}\|}$

$$(\nabla \vec{V})_{sym} = \mathbb{D} = (d_{ij}) \quad \dots \text{ tenzor rychlosti deformace}$$

DYNAMIKA TEKUTIN – SÍLY V TEKUTINĚ

- Cauchy: v kontinuu existují plošné a objemové síly

↳ intenzita objemové síly vs. specifická síla

... def. už známe z dřívějška

specifická síla (na jednotku hmotnosti)

... intenzivní fyz. veličina

obj. síla působící na kouli $B_R(\vec{x})$ ... vekt. míra

$$\vec{F}(\vec{x}) = \lim_{R \to 0+} \frac{\vec{F}_V(B_R(\vec{x}))}{M(B_R(\vec{x}))} =$$

hmotnost koule

$$= \lim_{R \to 0+} \frac{\vec{F}_V(B_R(\vec{x}))}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{M(B_R(\vec{x}))} = \frac{1}{\varrho(\vec{x})} \lim_{R \to 0+} \underbrace{\frac{\vec{F}_V(B_R(\vec{x}))}{\frac{4}{3}\pi R^3}}_{\text{síla na jednotku objemu}}$$

$\frac{4}{3}\pi R^3 / M(B_R(\vec{x})) \to \frac{1}{\varrho(\vec{x})}$

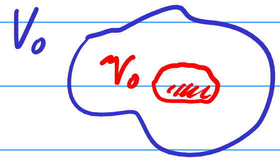
↳ plošná síla: Cauchyho hypotéza: síla vztažená na jednotku plochy v bodě $\vec{x}$ s normálovým vektorem $\vec{n}(\vec{x})$, je

$$\vec{T}(t, \vec{x}, \vec{n}(\vec{x})) \quad \dots \text{ nezávisí např. na } \nabla \cdot \vec{n}$$

(křivost plochy v bodě $\vec{x}$)

POZN: V r. 1957 ... Walter Noll dokázal Cauchyho hypotézu

ZÁKON SÍLY V TEKUTINĚ



kontrolní objem $\mathcal{V}_0$ v materiálovém tělese V_0, v čase t ve tvaru $\mathcal{V}(t) = \vec{x}(t, \mathcal{V}_0)$

zákon síly (bilance hybnosti)

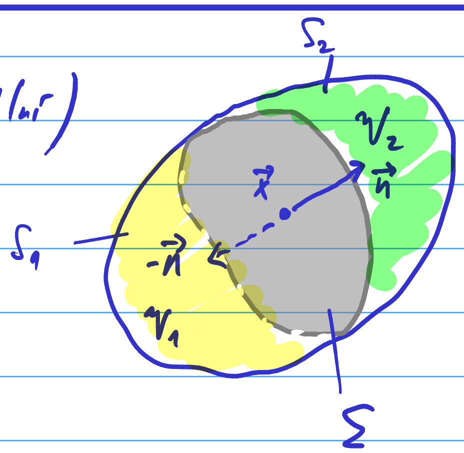
$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}(t)} \varrho \vec{V}\, d\vec{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho \underbrace{\vec{F}}_{\text{intenzita obj. síly}}\, d\vec{x} + \int_{\partial \mathcal{V}(t)} \vec{T}(t, \vec{x}, \vec{n}(\vec{x}))\, dS$$

bilance momentu hybnosti vůči počátku

$(\vec{x} - \vec{x}_0)$ pro $\vec{x}_0$ lib, pevný

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}(t)} \varrho \vec{x} \times \vec{V}\, d\vec{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho\, \vec{x} \times \vec{F}\, d\vec{x} + \int_{\partial \mathcal{V}(t)} \vec{x} \times \vec{T}(t, \vec{x}, \vec{n}(\vec{x}))\, dS$$

Cauchyho lemma (fundamentální)



$\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$

$\partial \mathcal{V}_0 = S_1 \cup S_2$

$\vec{x} \in \Sigma$

$\vec{n}$ ... vektor vnější normály k Σ v bodě $\vec{x}$ vzhledem k $\mathcal{V}_1$

$-\vec{n}$ .... — " — vzhl. k $\mathcal{V}_2$

bilance hybnosti pro $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$:

$(\mathcal{V}_1)$
$$\frac{d}{dt}\int_{\vec{x}(t,\mathcal{V}_1)} \varrho \vec{V}\, d\vec{x} = \int_{\vec{x}(t,\mathcal{V}_1)} \varrho \vec{F}\, d\vec{x} + \int_{\vec{x}(t,\Sigma)} \vec{T}(t, \vec{x}, \vec{n}(\vec{x}))\, dS + \int_{\vec{x}(t,S_1)} \vec{T}(t, \vec{x}, \vec{n}(\vec{x}))\, dS$$

$\oplus$

$$(\mathcal{V}_2)\quad \frac{d}{dt}\int_{\vec{x}(t,\mathcal{V}_2)} \varrho\vec{V}\,d\vec{x} = \int_{\vec{x}(t,\mathcal{V}_2)} \varrho\vec{F}\,d\vec{x} + \int_{\vec{x}(t,\Sigma)} \vec{T}(t,\vec{x},-\vec{n}(\vec{x}))\,dS + \int_{\vec{x}(t,S_2)} \vec{T}(t,\vec{x},\vec{n}(\vec{x}))\,dS$$

$\ominus$

$$(\mathcal{V})\quad \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}(t)} \varrho\vec{V}\,d\vec{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho\vec{F}\,d\vec{x} + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \vec{T}(t,\vec{x},\vec{n}(\vec{x}))\,dS$$

$$0 = \int_{\vec{x}(t,\Sigma)} \left[\vec{T}(t,\vec{x},\vec{n}(\vec{x})) + \vec{T}(t,\vec{x},-\vec{n}(\vec{x}))\right] dS$$

$\Downarrow$ pro lib. $\mathcal{V}_0$, Σ

(pro $\vec{x}\in\Sigma$ jsem schopen $\vec{n}(\vec{x})$ volit lib.)

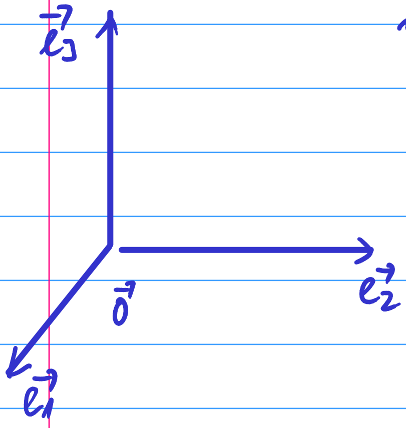
$$\boxed{\vec{T}(t,\vec{x},\vec{n}) = -\vec{T}(t,\vec{x},-\vec{n})}$$

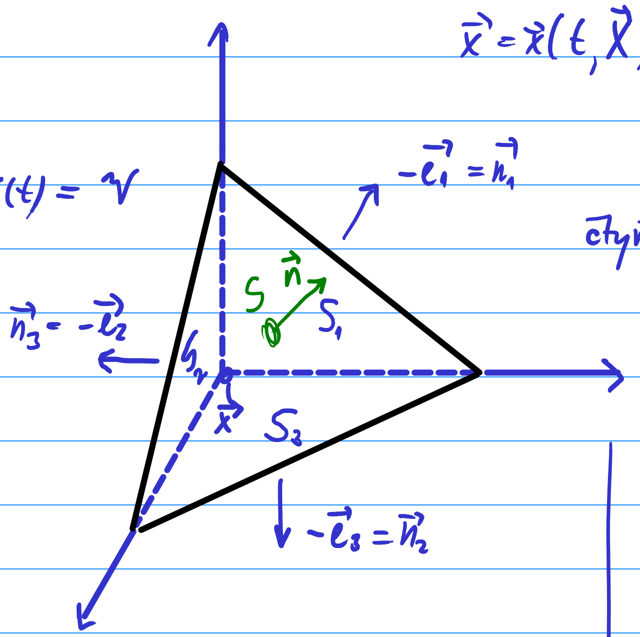
de facto zákon akce a reakce (III. Newt. z.)

v tekutině

TENZOR NAPĚTÍ

$\vec x = \vec x(t,\vec X)$ $\quad \vec X \in V_0$





čtyřstěn

$\|\vec n\| = 1$

$\vec n \cdot \vec e_i = n_i$

$\vec n = (n_i)$

plošné síly působící na ∂V:

$$\int_{\partial V} T\,dS = \vec T(t,\vec\xi_1,\vec n_1)\cdot|S_1| + \vec T(t,\vec\xi_2,\vec n_2)\cdot|S_2| + \vec T(t,\vec\xi_3,\vec n_3)\cdot|S_3| + \vec T(t,\vec\xi,\vec n)\,|S|$$

kde $\vec\xi_i \in S_i$ (věta o střední hodnotě), $\vec n_i = -\vec e_i$

$$= |S|\left(-\vec T(t,\vec\xi_1,\vec e_1)\underbrace{\frac{|S_1|}{|S|}}_{n_1} - \vec T(t,\vec\xi_2,\vec e_2)\,n_2 - \vec T(t,\vec\xi_3,\vec e_3)\,n_3 + \vec T(t,\vec\xi,\vec n)\right)$$

bilance hybnosti (zákon síly) pro V: kde $\tilde\xi, \hat\xi \in V$

$$\frac{d}{dt}\left((\rho\vec V)\Big|_{(t,\tilde\xi)}|V|\right) = \rho\vec F\Big|_{(t,\hat\xi)}|V| - \left(\sum_i \vec T(t,\xi_i,\vec e_i)\,n_i + \vec T(t,\vec\xi,\vec n)\right)|S|$$

nyní škálujeme V faktorem ε. Potom $|S| = O(\varepsilon^2)$, $|V| = O(\varepsilon^3) = o(\varepsilon^2)$

vůči bodu $\vec x$

vztah vydělíme ε^2 a provedeme limitu $\varepsilon \to 0$

$$\Rightarrow \boxed{-\sum_i \vec T(t,\vec x,\vec e_i)\,n_i + \vec T(t,\vec x,\vec n) = \vec 0}$$

$$\Rightarrow \vec{T}(t,\vec{x},\vec{n}) = \underbrace{\left(\vec{T}(t,\vec{x},\vec{e}_1)\ \vec{T}(t,\vec{x},\vec{e}_2)\ \vec{T}(t,\vec{x},\vec{e}_3) \right)}_{\mathbb{T}(t,\vec{x}) = (\tau_{ij})} \cdot \vec{n}$$

$\Rightarrow$ EXISTUJE tenzor napětí

SYMETRIE TENZORU NAPĚTÍ

$(\vec{x}-\vec{x}_0)$ pro $\vec{x}_0$ lib, pevný

bilance momentu hybnosti vůči počátku

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \vec{x} \times \varrho \vec{V}\, d\vec{x} = \int_{V(t)} \varrho\, \vec{x} \times \vec{F}\, d\vec{x} + \int_{\partial V(t)} \vec{x} \times \vec{T}(t,\vec{x},\vec{n}(\vec{x}))\, dS$$

def. (*)

$$\int_{\partial V(t)} \vec{x} \times \vec{T}(t,\vec{x},\vec{n}(\vec{x}))\, dS = \int_{\partial V(t)} \vec{x} \times \left(\mathbb{T}(t,\vec{x}) \cdot \vec{n}\right) dS = \int_{\partial V(t)} \varepsilon_{ijk}\, x_j\, (\mathbb{T}\vec{n})_k\, \vec{e}_i\, dS$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_i \int_{\partial V(t)} x_j\, \tau_{k\ell}\, n_\ell\, dS = \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_i \int_{V(t)} \partial_\ell (x_j \tau_{k\ell})\, d\vec{x}$$

Greenova formule:

$$\boxed{\int_V \underbrace{(\partial_i f)}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} g\, dx = -\int_V f\, \partial_i g\, dx + \int_{\partial V} f g\, n_i\, dS}$$

$g(\vec{x}) = 1$ vypadne

$$= \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_i \int_{V(t)} \left(\delta_{j\ell}\, \tau_{k\ell} + x_j\, \partial_\ell \tau_{k\ell}\right) d\vec{x} = \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_i \int_{V(t)} \left(\tau_{kj} + x_j\, \partial_\ell \tau_{k\ell}\right) d\vec{x}$$

dále:

důsledek Reynoldsovy t. t.

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}(t)} \rho \vec{x}\times\vec{V}\, d\vec{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \frac{D}{Dt}(\vec{x}\times\vec{V})\, d\vec{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho\Big(\underbrace{\frac{D\vec{x}}{Dt}\times\vec{V}}_{\vec{V}\times\vec{V}=\vec{0}} + \vec{x}\times\frac{D\vec{V}}{Dt}\Big)\, d\vec{x}$$

$$= \int_{\mathcal{V}(t)} \rho\vec{x}\times\frac{D\vec{V}}{Dt}\, d\vec{x}$$

$$\frac{Dx_i}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial t}}_{0} + V_j \underbrace{\partial_j x_i}_{\delta_{ij}} = V_i$$

$x_i = x_i(t,\vec{x})$

nyní: dosadíme zpět do (*)

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}(t)} \rho\vec{x}\times\frac{D\vec{V}}{Dt}\, d\vec{x}}_{\to 0} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}(t)} \rho\,\vec{x}\times\vec{F}\, d\vec{x}}_{\to 0} + \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i \int_{\mathcal{V}(t)} \big(\tau_{kj} + \underbrace{x_j \partial_l \tau_{kl}}_{\to 0}\big)\, d\vec{x}$$

Škálujeme $\mathcal{V}(t)$ v měřítku ε a nechť navíc $\vec{O}\in\mathcal{V}(t)$ $\forall\varepsilon$

resp. volíme $\vec{x}_0 \in \mathcal{V}(t)$

Pak $\|\vec{x}\| = O(\varepsilon)$. $|\mathcal{V}| = O(\varepsilon^3)$. Vydělíme ε^3 a pak $\varepsilon \to 0$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i \tau_{kj} = \vec{0}}$$

1. složka: $\varepsilon_{1jk}\tau_{kj} = 0 \iff \tau_{32} = \tau_{23}$

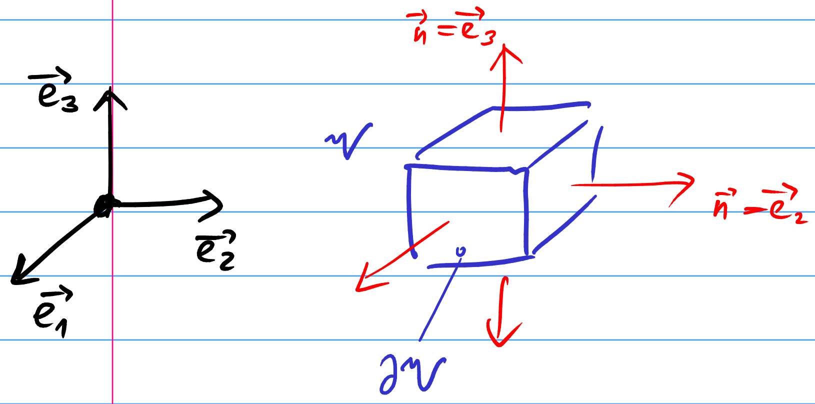
2. $\varepsilon_{2jk}\tau_{kj} = 0 \iff \tau_{31} = \tau_{13}$

3. $-\,\text{''}\,- = 0 \qquad \tau_{12} = \tau_{21}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{T} = \mathbb{T}^T}}$

$\iff \mathbb{T}$ je symetrický

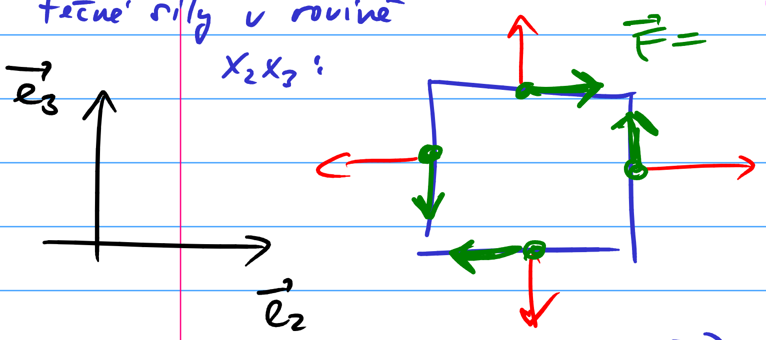
POZN: Interpretace symetrie Π:



τ_{ij} je i-tá složka síly působící na plošku s normálou $\vec e_j$ (vztaženo na jednotku plochy)

když vezmeme jen tečné síly v rovině $x_2 x_3$:

↓ 2D pohled



$$\vec F = \begin{pmatrix}\tau_{13}\\ \tau_{23}\\ \tau_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{(např.)}$$

$$\vec F = \begin{pmatrix}\tau_{12}\\ \tau_{22}\\ \tau_{32}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

např. $\Pi = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

$\tau_{23} = \tau_{32}$

$\Rightarrow$ nedochází k „roztáčení" nekonečně malých objemů

malý □ $\Rightarrow$ Π má na ∂V všude (skoro) stejnou hodnotu

POZN: mimodiag. složky Π $\Rightarrow$ síly ve směru tečny
\+ diag. složky Π $\Rightarrow$ síly ve směru normály (tlak)

ROVNICE BILANCE HYBNOSTI V OBECNÉM TVARU

máme
$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \varrho \vec{V}\, d\vec{x} = \int_{\partial V(t)} \vec{T}(t,\vec{x},\vec{n})\, dS + \int_{V(t)} \varrho \vec{F}\, d\vec{x} \Bigg|_{(t,\vec{x})}$$

po složkách (i-tá složka):

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \varrho V_i\, d\vec{x} = \int_{\partial V(t)} T_i(t,\vec{x},\vec{n})\, dS + \int_{V(t)} \varrho F_i\, d\vec{x}$$

použijeme Reynoldsův transportní teorém $\Phi = \varrho V_i$

$$\int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\varrho V_i) + \nabla\cdot(\varrho V_i \vec{V})\, d\vec{x} = \int_{\partial V(t)} \tau_{ij} n_j\, dS + \int_{V(t)} \varrho F_i\, d\vec{x}$$

↓ pomocí Einst. sumace ↓ Greenova formule

$$\int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\varrho V_i) + \partial_j(\varrho V_i V_j)\, d\vec{x} = \int_{V(t)} \partial_j \tau_{ij} + \varrho F_i\, d\vec{x}$$

$\Downarrow$ to vše $\forall V_0$, $\forall V(t)$

ZZHyb (i-tá sl.)
$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho V_i) + \partial_j(\varrho \underbrace{V_i V_j}_{(\vec{V}\otimes\vec{V})_{ij}}) = \partial_j \tau_{ij} + \varrho F_i \qquad i=1,2,3$$

ZZhyb. ve vekt. dif. tvaru
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\varrho \vec{V}) + \nabla\cdot(\varrho \vec{V}\otimes\vec{V}) = \nabla\cdot\mathbb{T} + \varrho\vec{F}}$$
„konzervativní tvar“

alternativní pro Reynoldsův t.t. : $\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \varrho\phi\, d\vec{x} = \int_{V(t)} \varrho \frac{D\phi}{Dt}\, d\vec{x}$

ve tvaru

$$\boxed{\varrho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \nabla\cdot\mathbb{T} + \varrho\vec{F}}$$

„nekonzervativní" tvar

JEDNODUCHÉ TEKUTINY (jiné neuvažujeme)

tekutina se nazývá **jednoduchá** $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\mathbb{T} = -P\mathbb{I} + \mathbb{T}_D}_{\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \tilde{\tau}_{ij}}$

kde $\mathbb{T}_D = (\tilde{\tau}_{ij})$ je tzv. dynamický tenzor napětí (tenzor viskózních napětí)

a $\mathbb{T}_D$ je funkcí pouze rychlosti tekutiny a jejích derivací takovou, že $\mathbb{T}_D(t,\vec{x}) = \mathbb{O}$ pokud $\vec{V}(t,\vec{x}) = 0$ a všechny její derivace jsou též nulové

P má potom význam tzv. hydrostatického (termodynamického) tlaku, tj. síly na jednotku plochy (ve směru normály) působící v tekutině v klidu (dán stavovou rovnicí $P = P(\varrho, T)$)

ZZHyb pro jednoduchou tekutinu

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho V_i) + \partial_j(\varrho V_i V_j) = \overbrace{-\partial_i P}^{-\partial_j\delta_{ij}P = -\partial_i P} + \partial_j \tilde{\tau}_{ij} + \varrho F_i$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\vec{V}) + \nabla\cdot(\varrho\vec{V}\otimes\vec{V}) = -\nabla P + \nabla\cdot\mathbb{T}_D + \varrho\vec{F}}$$

Newtonovské tekutiny a Navierovy–Stokesovy rovnice

Objektivní veličiny : uvažujme transformaci souřadné soustavy

$$\vec{x}'(t) = Q(t)\vec{x} + \vec{C}(t)$$

Q ... ortogonální

Def: skalární veličina α je objektivní $\Leftrightarrow$ $\alpha(t,\vec{x}) = \alpha'(t,\vec{x}')$

vektorová veličina $\vec{A}$ je objektivní $\Leftrightarrow$ $\|\vec{A}(t,\vec{x})\| = \|\vec{A}'(t,\vec{x}')\|$

$\vec{A}$ ... relativní poloha bodů $\vec{x},\vec{y}$ $\quad \vec{A} = \vec{y} - \vec{x}$

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{y}' - \vec{x}' = Q(t)\vec{y} + \vec{C}(t) - \left(Q(t)\vec{x} - \vec{C}(t)\right) = \underline{Q(t)\vec{A}}}$$

Mějme tenzor M takový, že $(M\vec{A})' = M'\underbrace{\vec{A}'}_{Q(t)\vec{A}} = Q(t)M\vec{A}$

$$\underline{M' = Q^T M Q}$$

M je objektivní tenzor $\Leftrightarrow$

Pozn : • Vektor vzájemné polohy je objektivní

• rychlost, resp. zrychlení NENÍ objektivní

DÚ • symetrická část gradientu rychlosti $\nabla\vec{v} = (\partial_j v_i)$ objektivní je

(to je tenzor rychlosti deformace $D = \left(\frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j)\right)$)

$\Rightarrow$ aby Π_D byl objektivní veličinou, může záviset na $\vec{v}$ a jejích derivacích prostřednictvím $\underline{D}$

- Newtonovské tekutina = izotropní tekutina (bez vnitřní struktury) = $\mathbb{T}_D$ je izotropní tenzorová funkce $\mathbb{D}$
  = závislost $\mathbb{T}_D$ na $\mathbb{D}$ je lineární

má platit $$\boxed{Q^T \mathbb{T}_D(\mathbb{D}) Q = \mathbb{T}_D(Q^T \mathbb{D} Q)}$$ viz matematický aparát výše nahoře :-)

a například všechny mocniny $\mathbb{D}$ jsou izotropní funkce $\mathbb{D}$

$$Q^T \mathbb{D}^n Q = Q^T \underbrace{\mathbb{D} \overset{QQ^T}{\vee} \mathbb{D} \cdots \mathbb{D}}_{n\times} Q = (Q^T \mathbb{D} Q)^n$$

uvažujme závislost $\mathbb{T}_D(\mathbb{D}) = \sum_{n=0}^{N<+\infty} \tilde{\alpha}_n \mathbb{D}^n$ ✓

přitom $\tilde{\alpha}_n = \tilde{\alpha}_n({}_D I_1, {}_D I_2, {}_D I_3)$

protože z C-H věty : $\ell(\mathbb{D}) = -\mathbb{D}^3 + {}_D I_1 \mathbb{D}^2 - {}_D I_2 \mathbb{D} + {}_D I_3 \mathbb{I} = \Theta$

tak vyjádříme $\mathbb{D}^3$ pomocí $\mathbb{I}, \mathbb{D}, \mathbb{D}^2$ a takté $\mathbb{D}^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ závislost $\mathbb{T}_D$ na $\mathbb{D}$ má tvar jen

$$\mathbb{T}_D(\mathbb{D}) = \alpha_0 \mathbb{I} + \alpha_1 \mathbb{D} + \alpha_2 \mathbb{D}^2 \quad \text{kde } \alpha_i = \alpha_i({}_D I_1, {}_D I_2, {}_D I_3)$$

závislost pro Reinerovy - Rivlinovy tekutiny

má-li být závislost navíc lineární, pak
$\alpha_2 \equiv 0$
$\alpha_1 = \text{konst} = 2\mu$
$\alpha_0 = \alpha_0(\mathrm{Tr}\,\mathbb{D})$

$\Leftrightarrow \alpha_0 = \mu' \mathrm{Tr}\,\mathbb{D} = \mu' D_{ii} = \mu' \partial_i v_i = \mu' \nabla \cdot \vec{v}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow \mathbb{T}_D(\mathbb{D}) = \mu'(\nabla\cdot\vec{v})\,\mathbb{I} + 2\mu\,\mathbb{D} \\ &\Rightarrow \mathbb{T}(\mathbb{D}) = \left(-p + \mu'(\nabla\cdot\vec{v})\right)\mathbb{I} + 2\mu\,\mathbb{D} \end{aligned}}$$

DÚ: rozepsat $\mathbb{T}_D$ po složkách

- Bilance hybnosti s tímto tenzorem $\mathbb{T}_D$ se nazývá Navierovy-Stokesovy rovnice

- μ se nazývá koeficient dynamické viskozity
- μ' —"— 2. viskózní koeficient

STOKESOVA HYPOTÉZA

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_p = \underbrace{\tfrac{1}{3}}_{\text{přispěvek k } p}(\mathrm{Tr}\,\mathbb{D})\,\mathbb{I} = \tfrac{1}{3}(\nabla\cdot\vec{v})\,\mathbb{I}$$

"deviatorický" tenzor rychlosti def.

$$+\ \mathbb{D}_{dev} \qquad \mathbb{D}_{dev} = \mathbb{D} - \mathbb{D}_p = \tfrac{1}{2}\left[\left(\partial_j v_i - \partial_i v_j\right) - \tfrac{2}{3}\delta_{ij}\,\partial_k v_k\right]$$

... a
$$\mathbb{T} = \left(-p + \mu'\nabla\cdot\vec{v}\right)\mathbb{I} + 2\mu\left(\mathbb{D}_p + \mathbb{D}_{dev}\right) = \qquad \mathrm{Tr}\,\mathbb{D}_{dev} = 0$$

$$= \underbrace{\Big(-p + \underbrace{\left(\mu' + \tfrac{2}{3}\mu\right)}\nabla\cdot\vec{v}\Big)}_{\text{mechanický tlak}}\mathbb{I} + 2\mu\,\mathbb{D}_{dev}$$

mechanický tlak (obecně jiný než p .. tlak v klidu)

Stokes: $\underbrace{\mu' + \tfrac{2}{3}\mu}_{} = 0 \qquad \mu' = -\tfrac{2}{3}\mu$ ale to není pravda

ze ... objemová viskozita (volumetric viscosity)

Buresti et al. 2015 ze se dá změřit a např. u CO_2 vychází že $\gg 100\mu$

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \varrho\,\phi\,d\vec{x} = \int_{V(t)} \varrho\frac{D\phi}{Dt}\,d\vec{x}$$

připomenutí: $\varrho\frac{D\vec{v}}{Dt}$

$$\boxed{\frac{D(\varrho\vec{v})}{Dt} + \varrho\vec{v}\,\nabla\cdot\vec{v} = -\nabla p + \nabla\cdot\mathbb{T}_D + \varrho\vec{F}}$$ bilance hybnosti

NEVAZKÉ PROUDĚNÍ $\mu\,(=\mu') = 0 \iff \mathbb{T}_D = \mathbb{O}$

$\Rightarrow$ Eulerovy rovnice $$\boxed{\varrho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \varrho\vec{F}}$$

„NESTLAČITELNÉ" PROUDĚNÍ

... při proudění nedochází k (podstatnému) změnám objemu

$$|V_0| = \underbrace{\int_{V_0} d\vec{X}}\ \stackrel{!}{=}\ \int_{V(t)} d\vec{x} = \underbrace{\int_{V_0} |\det\mathbb{F}|\,d\vec{X}} = \text{konst.}$$

$$\int_{V_0} (1-|\det\mathbb{F}|)\,d\vec{X} = 0 \quad \text{nezávisle na volbě } V$$

$$\Rightarrow |\det\mathbb{F}| = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial|\det\mathbb{F}|}{\partial t} = |\det\mathbb{F}|\,\nabla\cdot\vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\cdot\vec{v} = 0 \quad \text{podmínka „nestlačitelnosti"}$$

Co když $\underline{\varrho = \text{konst}}$?

rovnice kontinuity $$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla\cdot(\varrho\vec{v}) = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\vec{v} = 0$$

Uvažujme homogenní materiál $\Rightarrow$ $\varrho = \text{konst.}$

navíc $\mu = \underbrace{\mu(\varrho, T)}_{\text{obecně}} = \text{konst.}$

Dosadíme do bilance hybnosti a použijeme $\boxed{\nabla \cdot \vec{v} = \partial_j v_j = 0}$

ještě jednou:

$$\boxed{\varrho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbb{T}_D + \varrho \vec{F}}$$

po složkách:

$$\varrho \frac{Dv_i}{Dt} = -\partial_i p + \mu \partial_j (\partial_j v_i + \partial_i v_j) + \varrho F_i$$

$$= -\partial_i p + \mu \partial_{jj} v_i + \mu \partial_{ij} v_j + \varrho F_i$$

$$= -\partial_i p + \mu \partial_{jj} v_i + \varrho F_i \qquad \frac{\partial}{\partial_i}\underbrace{(\partial_j v_j)}_{=0}$$

$$\Downarrow$$

$$\varrho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \varrho \vec{F}$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla \tilde{p} + \nu \Delta \vec{v} + \vec{F}$$

$\nu = \frac{\mu}{\varrho}$ .. kinematická viskozita

$\tilde{p} = \frac{p}{\varrho}$ ... kinematický tlak

ZÁKON ZACHOVÁNÍ ENERGIE

V objemu $\mathcal{V}(t)$, což je objem, v němž se vyskytuje hmota z objemu $\mathcal{V}_0$ v čase t je obsažená celková energie

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \left(E + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \right) d\vec{x} \qquad \vec{V}^2 := \|\vec{V}\|^2 = \vec{V} \cdot \vec{V}$$

E ... specifické vnitřní energie (na jednotku hmotnosti)

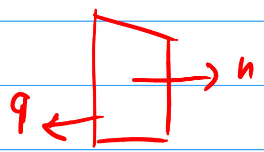
Změna $\mathcal{E}$ za jednotku času je součtem:

- výkonu povrchových sil
$$\int_{\partial\mathcal{V}(t)} \vec{V} \cdot (\mathbb{T} \cdot \vec{n}) \, dS = \int_{\partial\mathcal{V}(t)} V_i \tau_{ij} n_j \, dS = \int_{\mathcal{V}(t)} \partial_j (V_i \tau_{ij}) \, d\vec{x}$$

- výkonem objemových sil
$$\int_{\mathcal{V}(t)} \vec{V} \cdot (\rho \vec{F}) \, d\vec{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho F_i V_i \, d\vec{x}$$

- tok vnitřní (tepelné) energie přes $\partial\mathcal{V}(t)$ kvůli vedení tepla

Fourierův zákon: tok tepla přes jednotkovou plochu s normálou $\vec{n}$ je $-\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}$



koeficient tepelné vodivosti $\lambda = \lambda(T)$

přírůstek tepla uvnitř $\mathcal{V}(t)$

$$\int_{\partial\mathcal{V}(t)} \lambda \nabla T \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \lambda \partial_i T n_i \, dS = \int_{\mathcal{V}(t)} \partial_i (\lambda \partial_i T) \, d\vec{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \, d\vec{x}$$

• výkon objemových zdrojů tepla (radiace, chem. reakce ..)

$$\int_{V(t)} \rho \dot{Q}\, d\vec{x} \qquad \dot{Q} \ldots \text{tepelný výkon na jednotku hmotnosti}$$

Celkem:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \underbrace{\left(E + \tfrac{1}{2}\vec{v}^2\right)}^{\phi} d\vec{x} = \int_{V(t)} \partial_j (v_i \tau_{ij}) + \rho F_i v_i + \partial_i(\lambda \partial_i T) + \rho \dot{Q}\, d\vec{x}$$

RTT: $\displaystyle \frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \phi\, d\vec{x} = \int_{V(t)} \rho \frac{D\phi}{Dt}\, d\vec{x}$

$$\boxed{\rho \frac{D(E + \frac{1}{2}\vec{v}^2)}{Dt} = \partial_j (v_i \tau_{ij}) + \rho F_i v_i + \partial_i(\lambda \partial_i T) + \rho \dot{Q}}$$

bilance celkové energie (ZZcE)

↓

vyjádříme bilanci vnitřní energie

vezmeme bilanci hybnosti: $\displaystyle \rho \frac{Dv_i}{Dt} = \partial_j \tau_{ij} + \rho F_i \qquad i = 1,2,3$

i-tou složku vynásobíme v_i a sečteme

$$\rho \underbrace{\frac{Dv_i}{Dt} v_i}_{\rho \frac{1}{2}\frac{D}{Dt}(\vec{v}^2)} = \partial_j \tau_{ij} v_i + \rho F_i v_i$$

toto odečteme od ZZ celk. E

⇓

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \tau_{ij} \partial_j v_i + \partial_i(\lambda \partial_i T) + \rho \dot{Q}$$

$\nabla \vec{v} = (\partial_j v_i)$

ve vekt. tvaru:

$$\boxed{\varrho \frac{DE}{Dt} = \mathbb{T} \cdot \nabla \vec{V} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \varrho \dot{Q}}$$

bilance vnitřní energie

celkem 5 rovnic
7 neznámých $\varrho, V_1, V_2, V_3, P, T, E$

Zbývá: – závislost mezi P a ϱ, T a E
(pro N-S rovnice)

$\Rightarrow$ zbývají 2 skalární rovnice
– stavová rovnice $f(P,V,T) = f(\varrho, P, T) = 0$
– vlastnosti materiálu (tepelná kapacita)

MATEMATICKÁ ANALÝZA ÚLOHY NESTLAČITELNÉHO PROUDĚNÍ

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je oblast (s lipschitzovskou hranicí) a $\mathcal{J} = (0, T_{max})$. Problém nestlač. proudění v Ω nechť je ve tvaru

$$(*) \quad \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

$$(**) \quad \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla \tilde{P} + \nu \Delta \vec{V} + \vec{F}$$

s okrajovými podmínkami

$$\vec{V}(t, \vec{x})\Big|_{\partial\Omega} = \vec{W}(t, \vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega$$

kde $\vec{W}$ splňuje $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \vec{W} \cdot \vec{n} \, dS = 0$

$$\left\{ 0 \stackrel{!}{=} \int_\Omega \nabla \cdot \vec{V} \, d\vec{x} = \int_\Omega \partial_i V_i \, d\vec{x} = \int_{\partial\Omega} V_i n_i \, dS = \int_{\partial\Omega} \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS \right.$$

a počáteční podmínkou

$$\vec{V}(0, \vec{x}) = \vec{V}_0(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega$$

kde $\nabla \cdot \vec{V}_0(\vec{x}) = 0$ ... divergence-free / podmínka solenoidálnosti (těžké splnit)

Jak je to s tlakem? (předpokládejme dostatečnou regularitu $\vec{V}$)

vezmeme (**) a aplikujeme na ni divergenci

$$\nabla\cdot\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\Delta\tilde{P} + \nu\,\nabla\cdot\Delta\vec{V} + \nabla\cdot\vec{F}$$

označme $\phi := \nabla\cdot\vec{V}$

jak je to po složkách? DÚ

na levé straně $\nabla\cdot\frac{D\vec{V}}{Dt} = \nabla\cdot\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right) = \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{=0 \text{ dle } (*)} + \nabla\cdot\left(\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right)$

napravo: $\nu\nabla\cdot\Delta\vec{V} = \nu\,\partial_i\partial_{kk}V_i = \underline{\nu\,\partial_{kki}V_i = \nu\,\partial_{ikk}V_i} = \nu\,\partial_{kk}\partial_i V_i =$

$= \nu\Delta\phi$

dosadíme zpět do (**):

$$\Delta\tilde{P} + \nabla\cdot\left(\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right) - \nabla\cdot\vec{F} = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} - \nu\Delta\phi\right)$$

když platí (*), tj. $\phi = 0$, pak platí

$$\boxed{\Delta\tilde{P} = -\nabla\cdot\left(\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right) + \nabla\cdot\vec{F}}$$

(zjednodušená) Poissonova rovnice pro tlak (PPE)

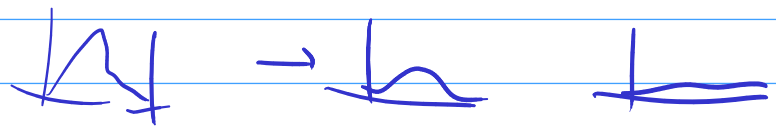
P závisí (až na konstantu) na $\vec{V}, \vec{F}$ v daném čase

"lokální změna $\vec{V}$ má za následek globální změnu P"

Naopak, pokud platí PPE, pak $\underline{\frac{\partial\phi}{\partial t} = \nu\Delta\phi}$

a pokud $\nabla\cdot\vec{V}_0 = 0$, pak $\phi(0,\vec{x}) = 0$ a když požijeme okrajové podmínky tak, aby $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ nebo $\frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0$, pak $\phi \equiv 0 \;\; \forall\vec{x}, \forall t$

Pozn.: V num. řešení zajišťujícím $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ i pro $\vec{V}_0$ porušující (*) dojde k vymizení divergence

$\nabla\cdot\vec{V}(t)$ 

Alternativně:

$$\Delta\tilde{P} + \nabla\cdot(\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}) - \nabla\cdot\vec{F} = -\Big(\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{=0 \text{ pro } (*)} - \nu\Delta\phi\Big)$$

nechceme

$$\boxed{\Delta\tilde{P} = -\nabla\cdot(\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}) + \nabla\cdot\vec{F} + \nu\nabla\cdot(\Delta\vec{V})}$$

konzistentní PPE

Naopak $\tilde{P}$ splňující k. PPE implikuje $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$

tj. pokud $\phi = 0$ v čase 0, pak $\phi \equiv 0 \;\; \forall t, \forall\vec{x}$ bez dodatečných podmínek

Jak je to s okrajovou podmínkou pro $\tilde{P}$?

Vezmeme (**) a vynásobíme na $\partial\Omega$ normálovým vektorem $\vec{n}$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla\tilde{P} + \nu\Delta\vec{V} + \vec{F}\,\Big|\cdot\vec{n} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\tilde{P}}{\partial\vec{n}} = -\frac{DV_n}{Dt} + \nu\Delta V_n + F_n$$

normálové složky

V článku Gresho, Sani (1987) se ukazuje, že

1) při použití této okraj. podm. jsou k. PPE a původní PPE ekvivalentní $\Rightarrow$ z obou plyne $\nabla\cdot\vec{V}=0$, tj. (*)

2) pro PPE lze v čase $t>0$ použít i jinou projekci (**) na $\partial\Omega$ než normálovou

---

CESTA K SLABÉ FORMULACI ÚLOHY

Bůno lze $\nabla\cdot\vec{F}=0$

jinak (Helmholtz)

$\vec{F}=\nabla\Phi+\vec{F}_0$ kde $\nabla\cdot\vec{F}_0=0$

$$\nabla\cdot\vec{V}=0 \quad \wedge \quad \underbrace{\frac{D\vec{V}}{Dt}}=-\underbrace{\nabla\tilde{P}}_{-\nabla(\tilde{P}-\Phi)}+\nu\Delta\vec{V}+\vec{F}$$

def (*)

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\underbrace{\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}}_{1}=\underbrace{-\nabla\tilde{P}}_{2}+\underbrace{\nu\Delta\vec{V}}_{3}+\vec{F}$$

vynásobíme funkcí $\vec{\varphi}:\Omega\to\mathbb{R}^3$ dostatečně hladkou a nulovou na $\partial\Omega$ a zintegrujeme přes Ω

a navíc $\nabla\cdot\vec{\varphi}=0$

$$1=\int_\Omega \vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\cdot\vec{\varphi}\,d\vec{x}=\int_\Omega V_j\,\partial_j V_i\,\varphi_i\,d\vec{x}=\text{(Greenova formule)}$$

$$=\underbrace{\int_{\partial\Omega} V_j V_i \underbrace{\varphi_i}_{=0} n_j\,dS}_{=0}-\int_\Omega V_i\,\partial_j(V_j\varphi_i)\,d\vec{x}=$$

$$=-\int_\Omega V_i\underbrace{(\partial_j V_j)}_{=0}\varphi_i\,d\vec{x}-\int_\Omega V_i(\partial_j\varphi_i)V_j\,d\vec{x}=-\int_\Omega \vec{V}\cdot\nabla\vec{\varphi}\cdot\vec{V}\,d\vec{x}$$

$$2=\int_\Omega -\nabla\tilde{P}\cdot\vec{\varphi}\,d\vec{x}=-\int_\Omega \partial_i\tilde{P}\varphi_i\,d\vec{x}\overset{\text{(Green)}}{=}-\int_{\partial\Omega}\tilde{P}\underbrace{\varphi_i n_i}_{=0}\,dS+\int_\Omega \tilde{P}\underbrace{\partial_i\varphi_i}_{=0}\,d\vec{x}=0$$

$$③ = \nu\int_\Omega \Delta\vec{V}\cdot\vec{\varphi}\,d\vec{x} = \int_\Omega (\partial_{jj}V_i)\varphi_i\,d\vec{x} \overset{(\text{Green})}{=} \int_{\partial\Omega}\partial_j V_i\,\underbrace{\varphi_i}_{=0}\,n_j\,dS - \int_\Omega \partial_j V_i\,\partial_j\varphi_i\,d\vec{x}$$

$$= -\int_\Omega \nabla\vec{V}\cdot\nabla\vec{\varphi}\,d\vec{x}$$

provedeme integraci ⊛ s využitím mezivýsledků získaných výše :

$$(**)\qquad \boxed{\underbrace{\int_\Omega \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\cdot\vec{\varphi}\,d\vec{x}}_{①} - \int_\Omega \vec{V}\cdot\nabla\vec{\varphi}\cdot\vec{V}\,d\vec{x} + \nu\int_\Omega \nabla\vec{V}\cdot\nabla\vec{\varphi}\,d\vec{x} = \int_\Omega \vec{F}\cdot\vec{\varphi}\,d\vec{x}}$$

Budou se hodit \vartheta :-)

(**) dále vynásobíme hladkou funkcí $\vartheta : \overline{\mathcal{J}} \to \mathbb{R}$ takovou, že $\vartheta(T_{max}) = 0$ $\quad \mathcal{J} = (0, T_{max})$

a zintegrujeme přes $\mathcal{J}$:

$$① = \int_{\mathcal{J}}\int_\Omega \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\cdot\vec{\varphi}\,d\vec{x}\,\vartheta\,dt = \int_{\mathcal{J}} \frac{d}{dt}\underbrace{\int_\Omega \vec{V}\cdot\vec{\varphi}\,d\vec{x}}_{u}\,\underbrace{\vartheta}_{v}\,dt = (\text{per partes})$$

$$= \left[\int_\Omega \vec{V}\cdot\vec{\varphi}\,d\vec{x}\,\vartheta\right]_0^{T_{max}} - \int_{\mathcal{J}}\int_\Omega \vec{V}\cdot\vec{\varphi}\,d\vec{x}\,\dot{\vartheta}\,dt$$

$$= -\vartheta(0)\int_\Omega \vec{V}_0\cdot\vec{\varphi}\,d\vec{x} - \int_{\mathcal{J}}\int_\Omega \vec{V}\cdot\vec{\varphi}\,d\vec{x}\,\dot{\vartheta}\,dt$$

po provedení integrace celého (**) :

$$\boxed{\int_{\mathcal{J}}\int_\Omega -\vec{V}\cdot\vec{\varphi}\,\dot{\vartheta} - \vec{V}\cdot\nabla\vec{\varphi}\cdot\vec{V}\vartheta + \nu\nabla\vec{V}\cdot\nabla\vec{\varphi}\,\vartheta - \vec{F}\cdot\vec{\varphi}\,\vartheta\,d\vec{x}\,dt = \vartheta(0)\int_\Omega \vec{V}_0\cdot\vec{\varphi}\,d\vec{x}}$$

slabá rovnost (***)

POZN: → $\vec{V}$ a $\nabla\vec{V}$ musí být definovány jen skoro všude v Ω a s.v. v y

→ $\Delta\vec{V}$ nemusí existovat

→ (**x) vůbec neobsahuje tlak $\tilde{P}$

→ funkce $\vec{V}$, která řeší původní problém splňuje (x**x) pro libovolné $\vec{\varphi}$, ale

Jak (*xx) využít ve formulaci problému, který určí $\vec{V}$.

- nechť okrajová podmínka $\vec{V}|_{\partial\Omega} = \vec{W}$ kde $\int_{\partial\Omega} \vec{W}\cdot\vec{n}\,dS = 0$

  je jenom $\vec{V}|_{\partial\Omega} = \vec{0}$

PŘIPOMENUTÍ FUNKČNÍCH PROSTORŮ

- $C(\Omega)$ .. spojité funkce $f:\Omega\to\mathbb{R}$
- $C(\bar{\Omega})$ .. funkce z $C(\Omega)$, navíc stejnoměrně spojité na Ω

  $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\vec{x},\vec{y}\in\Omega)(\|\vec{x}-\vec{y}\|<\delta \Rightarrow |f(\vec{x})-f(\vec{y})|<\varepsilon)$
- $C^m(\Omega)$ ... prostor funkcí se spojitými m-tými parciálními derivacemi

def: $D^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\partial_3^{\alpha_3} f$ kde $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ tzv. multiindex

$|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

$$\Rightarrow C^m(\Omega) = \{ f:\Omega\to\mathbb{R} \mid D^\alpha f\in C(\Omega), |\alpha|\le m\}$$

analogicky pro $C^m(\bar{\Omega})$ .... $C(\bar{\Omega})$

- $C_0^m(\Omega)$ .. prostor funkcí z $C^m(\Omega)$, s kompaktním supportem v Ω

$$\Rightarrow f\in C_0^m(\Omega) \Rightarrow f|_{\partial\Omega} = 0$$

$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{\vec{x}\in\Omega \mid f(\vec{x})\neq 0\}}$

• $L_m(\Omega)$ .. prostor měřitelných funkcí, pro něž $\int_\Omega |f(\vec{x})|^m d\vec{x} < +\infty$

Lebesgueův integrál

$m \in \langle 1, +\infty)$

$$\|f\|_{L_m(\Omega)} = \sqrt[m]{\int_\Omega |f(\vec{x})|^m d\vec{x}}$$ ... $L_m(\Omega)$ je Banachův prostor

$\hookrightarrow$ $L_2(\Omega)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$\langle f|g\rangle = \langle f, g\rangle = (f,g)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega f(\vec{x})g(\vec{x})d\vec{x}$$

$\|f\|_{L_2(\Omega)} \leq \|f\|_{H^m(\Omega)} \quad \forall f \in C^\infty(\bar{\Omega})$

$\Rightarrow (f_n)$ Cauchy v $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)} \Rightarrow (f_n)$ Cauchy v $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$

SOBOLEVOVY PROSTORY

přidáme lim. prvky Cauchy. posloupností, které $\in L_2(\Omega)$

• $H^m(\Omega)$ je zúplnění (uzávěr) $C^\infty(\bar{\Omega})$ vzhledem k normě

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt[2]{\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha f)^2 d\vec{x}}$$

indukovaný skalárním součinem

$$(f,g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{\substack{\alpha \\ |\alpha|\leq m}} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L_2(\Omega)}$$

• $H^1_0(\Omega)$ ... prostor funkcí z $H^1(\Omega)$ s kompaktním supp. v Ω

POZN: $H^m(\Omega) = \{ f: \Omega \to \mathbb{R} \mid D^\alpha f \in L_2(\Omega) \text{ pro } |\alpha| \leq m \}$

kde $D^\alpha f$ je tzv. slabá derivace podle α, tj.
regulární distribuce, pro niž platí $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle D^\alpha f, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, D^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f D^\alpha \varphi d\vec{x}$$

$\exists k > 0$

- **Poincarého nerovnost:** $\|f\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq k \underbrace{\sum_{j=1}^{3} \int_\Omega |\partial_j f|^2 d\vec{x}}$

- ekvivalence norem $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ a $\|\cdot\|'_{H_0^1(\Omega)}$ ozn. $\|f\|'^2_{H_0^1(\Omega)}$
- umožní odhadnout L_2-normu f pomocí L_2-normy z derivací f

BOCHNEROVY PROSTORY: $\mathcal{X}$ je Banachův, resp. Hilbertův

Pak def. $L_p(\mathcal{Y};\mathcal{X}) = \left\{ f: \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \;\middle|\; \int_{\mathcal{Y}} \|f(t)\|^p_{\mathcal{X}} dt < +\infty \right\}$

s normou $\|f\|_{L_p(\mathcal{Y};\mathcal{X})} = \sqrt[p]{\int_{\mathcal{Y}} \|f(t)\|^p_{\mathcal{X}} dt}$

$f: \mathcal{Y} \times \Omega \to \mathbb{R}$ pak $f(t) \in \{ w: \Omega \to \mathbb{R} \}$

PROSTORY FUNKCÍ PRO ANALÝZU NAŠÍ ÚLOHY:

- $L_2(\Omega)^3$ Hilbertův prostor funkcí $\vec{u}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ se složkami v $L_2(\Omega)$

$\hookrightarrow (\vec{u},\vec{v})_{L_2(\Omega)^3} = \sum_{i=1}^{3} (u_i, v_i)_{L_2(\Omega)} = \sum_i \int_\Omega u_i v_i d\vec{x} = \int_\Omega \vec{u}\cdot\vec{v}\, d\vec{x}$

$\hookrightarrow \|\vec{u}\|_{L_2(\Omega)^3} = \|\underbrace{(\|u_i\|_{L_2(\Omega)})}_{\text{vektor norem}}\| = \sqrt{\sum_i \|u_i\|^2_{L_2(\Omega)}} =$

eukl. norma

$= \sqrt{\sum_i \int_\Omega u_i^2 d\vec{x}} = \sqrt{\int_\Omega \left(\sum_i u_i^2\right) d\vec{x}} = \sqrt{\int_\Omega \|\vec{u}\|^2 d\vec{x}}$

- $H_0^1(\Omega)^3$ prostor vekt. funkcí $\vec{u}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ se složkami v $H_0^1(\Omega)$

$$\|\vec{u}\|_{H_0^1(\Omega)^3} = \left\| \left(\|u_i\|'_{H_0^1(\Omega)} \right) \right\| = \sqrt{\sum_i \|u_i\|'^2_{H_0^1(\Omega)}} =$$

$$= \sqrt{\sum_i \int_\Omega \sum_{j=1}^3 (\partial_j u_i)^2 \, d\vec{x}} = \sqrt{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, d\vec{x}}$$

<u>POZN</u>: dle Poincarého nerovnosti: $\|\vec{u}\|_{L_2(\Omega)^3} \leq k \cdot \|\vec{u}\|_{H_0^1(\Omega)^3}$

- $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3$ prostor vekt. funkcí $\vec{u}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ se složkami v $C_0^\infty(\Omega)$ splňující navíc $\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \forall \vec{x} \in \Omega$

- $H = L_{2,\sigma}(\Omega)^3$ uzávěr (zúplnění) prostoru $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3$ v $L_2(\Omega)^3$

  norma v H je stejná jako v $L_2(\Omega)^3$

  (v tomto prostoru $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ve smyslu distribucí, tj. derivace jsou tzv. "slabé")

- V uzávěr prostoru $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3$ v $H_0^1(\Omega)^3$

  tj. zde $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ skoro všude

  norma ve V je stejná jako v $H_0^1(\Omega)^3$

<u>ENERGETICKÁ NEROVNOST</u>

(odvození apriorních odhadů řešení problému)

Vyjdeme z (**)

(**) $$\underbrace{\int_\Omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\varphi} \, d\vec{x}}_{1} - \underbrace{\int_\Omega \vec{V} \cdot \nabla \vec{\varphi} \cdot \vec{V} \, d\vec{x}}_{2} + \nu \int_\Omega \nabla \vec{V} \cdot \nabla \vec{\varphi} \, d\vec{x} = \int_\Omega \vec{F} \cdot \vec{\varphi} \, d\vec{x}$$

$\vec{v}^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$

a dosadíme $\vec{\varphi} = \vec{v}$

$$① = \int_\Omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\cdot\vec{v}\,d\vec{x} = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{v}^2}{\partial t}\,d\vec{x} = \frac{d}{dt}\underbrace{\int_\Omega \frac{1}{2}\vec{v}^2\,d\vec{x}}_{\text{specifická kinetická energie v celém } \Omega}$$

② : odvodili jsme $\int_\Omega \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\cdot\vec{\varphi}\,d\vec{x} = \dots = -\int_\Omega \vec{v}\cdot\nabla\vec{\varphi}\cdot\vec{v}\,d\vec{x}$

$\nabla\cdot\vec{\varphi} = 0$ a chtěli jsme : $\vec{\varphi}|_{\partial\Omega} = 0$

$\Downarrow$

$$② = \int_\Omega \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\cdot\vec{v}\,d\vec{x} = 0$$

zde využijeme $\underline{\vec{v}|_{\partial\Omega} = 0}$

dosadíme ①, ② zpět do (**) :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2}\vec{v}^2\,d\vec{x} + \nu\underbrace{\int_\Omega \nabla\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\,d\vec{x}}_{\nu\cdot\|\vec{v}\|_V^2} = \underbrace{\int_\Omega \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\vec{x}}_{(\vec{F},\vec{v})_{L_2(\Omega)^3} \le \|\vec{F}\|_{L_2(\Omega)^3}\|\vec{v}\|_{L_2(\Omega)^3}}$$

$$\le k\,\|\vec{F}\|_H\,\|\vec{v}\|_V$$

viz výše : využíváme (BÚNO) předpoklad $\nabla\cdot\vec{F} = 0$

Youngova nerovnost

$0 \le (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$2ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon}b^2$

$$\le \frac{\nu}{2}\|\vec{v}\|_V^2 + \frac{k^2}{2\nu}\|\vec{F}\|_H^2$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2}\vec{v}^2\,d\vec{x} + \frac{\nu}{2}\|\vec{v}\|_V^2 \le \frac{k^2}{2\nu}\|\vec{F}\|_H^2$$

$$\int \nabla V \cdot \nabla V \, d\vec{x} = -\int \Delta V \, V \, d\vec{x}$$

zintegrujeme přes $(0,t)$

ENERGETICKÁ NEROVNOST

$$\underbrace{\int_\Omega \frac{1}{2}\vec{V}^2 dx \Big|_t}_{\substack{\approx \text{ kinetické energie} \\ \text{tekutiny v čase } t \\ (\text{až na } \rho)}} + \underbrace{\int_0^t \frac{1}{2}\nu \|\vec{V}(\tau,\cdot)\|_V^2 d\tau}_{\substack{\text{disipace} \\ \text{kinetické energie}}} \le \underbrace{\int_\Omega \frac{1}{2}\vec{V}_0^2 d\vec{x}}_{\substack{\text{kin. energie} \\ \text{v čase } t=0}} + \frac{k^2}{2\nu}\underbrace{\int_0^t \|\vec{F}(\tau,\cdot)\|_H^2 d\tau}_{\substack{\text{práci objemových} \\ \text{sil od času } 0 \\ \text{do času } t}}$$

- E.N. použijeme pro dva tzv. apriorní odhady:

1) zanedbáme 2. člen na levé straně

$$\|\vec{V}(t,\cdot)\|_H^2 \le \underbrace{\|\vec{V}_0\|_H + \frac{k^2}{\nu}\int_\gamma \|\vec{F}\|_H^2 dt}_{\text{číslo nezávislé na } t,\, \vec{x}} \qquad \forall t \in \gamma$$

pro skoro všecha t

$$\|\vec{V}\|^2_{L_\infty(\gamma,H)} \le \text{—"—}$$

$$\operatorname{ess\,sup}_\gamma \|\vec{V}\|_H^2$$

2) zanedbáme 1. člen na levé straně E.N. (vynásobíme $\frac{2}{\nu}$)

...a pro $t = T_{max}$: $\|\vec{V}\|^2_{L_2(\gamma,V)} \le \frac{2}{\nu}\left(\text{—"—}\right)$

$\Rightarrow$ máme omezenost řešení v normách prostorů $\left\langle \begin{matrix} L_\infty(\gamma,H) \\ L_2(\gamma,V) \end{matrix} \right.$

$\Downarrow$

DEF. SLABÉHO ŘEŠ. Nechť $\vec{V}_0 \in H$, $\vec{F} \in L_2(\mathcal{J}, H)$

Funkci $\vec{V} \in L_\infty(\mathcal{J}, H) \cap L_2(\mathcal{J}, V)$ splňující slabou rovnost

$$\boxed{\int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} -\vec{V} \cdot \vec{\varphi} \dot{\nu} - \vec{V} \cdot \nabla \vec{\varphi} \cdot \vec{V} \nu + \nu \nabla \vec{V} \cdot \nabla \vec{\varphi} \nu - \vec{F} \cdot \vec{\varphi} \nu \, d\vec{x} \, dt = \nu(0) \int_{\Omega} \vec{V}_0 \cdot \vec{\varphi} \, d\vec{x}}$$

$\forall \vec{\varphi} \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)^3$ $\forall \nu \in C^\infty_0(\langle 0, T_{max}))$ nazýváme slabým řešením úlohy nestlačitelného vazkého proudění.

POZN: výběr φ, ν a $\int_\Omega$, resp. $\int_{\mathcal{J}}$ odpovídá výběru kontrolního objemu $\mathcal{V}_0$, resp. časového okamžiku t při odvození integrálního tvaru Z.Z.

KROKY K DŮKAZU EXISTENCE SLABÉHO ŘEŠENÍ

STOKESŮV OPERÁTOR

$= (\vec{u}, \vec{v})_V$ ... skalární součin přímo na V

def $$((\vec{u}, \vec{v})) = \int_\Omega \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} \, d\vec{x}$$ na V (bilineární forma)

Stokesův operátor $A: V \to V'$ je definován

$\vec{u} \in V$: $(A\vec{u})(\vec{v}) = ((\vec{u}, \vec{v}))$ $= (\Delta \vec{u}, v)_H$

- A: je lineární operátor (Dú)

- A je omezený (spojitý)

$$\|A\vec{u}\|_{V'} = \sup_{\|\vec{v}\|_V=1} |A\vec{u}(\vec{v})| =$$

$$= \sup_{\|\vec{v}\|_V=1} |((\vec{u},\vec{v}))| =$$

$$= \sup_{\|\vec{v}\|_V=1} |(\vec{u},\vec{v})_V| \overset{\text{Schwarz}}{\leq}$$

$$\leq \sup_{\|\vec{v}\|_V=1} \|\vec{u}\|_V \underbrace{\|\vec{v}\|_V}_{=1} = \|\vec{u}\|_V$$

tj. konstanta úměrnosti $K = 1$

$A: \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ je spojitý
$\Leftrightarrow$
$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\|\vec{x}-\vec{y}\|<\delta)(\|A\vec{x}-A\vec{y}\|<\varepsilon)$

A je omezený $\Leftrightarrow$ $\exists K>0$
$\|A\vec{x}\|_{\mathcal{B}_2} \leq K \|\vec{x}\|_{\mathcal{B}_1}$

na Banachových prostorech je to totéž

<u>duální norma</u>

$$\|\underset{\leftarrow}{w}\|_{\mathcal{B}'} = \sup_{\|\vec{v}\|_{\mathcal{B}}=1} |\underset{\leftarrow}{w}(\vec{v})|$$

- $A: V \to V'$ je bijekce (a tedy A je invertovatelný)

<u>$((\cdot,\cdot))$ je koercivní</u>:

$$((\vec{u},\vec{u})) = \int_\Omega \nabla\vec{u} \cdot \nabla\vec{u} \, d\vec{x} = \|\vec{u}\|_V \geq k \|\vec{u}\|_{H_0^1(\Omega)^3}$$

↳ to je přímo skalární součin na V

ke každému $\underset{\leftarrow}{w} \in V'$ $\exists! \vec{u} \in V$

že $\forall \vec{v} \in V$

$$\underset{\leftarrow}{w}(\vec{v}) = ((\vec{u},\vec{v})) = (A\vec{u})(\vec{v})$$

$$\underset{\leftarrow}{w} = A\vec{u}$$

$\mathcal{H} = V$
$\Rightarrow$ Lax-Milgram $=$ Riesz

<u>Laxovo-Milgramovo lemma</u>

$\mathcal{H}$ Hilbertův prostor se skal. souč. $(\cdot,\cdot)$. Nechť $B: \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{R}$ je bilineární forma splňující

1) $B(\vec{u},\vec{v}) \leq K \|\vec{u}\|_{\mathcal{H}} \|\vec{v}\|_{\mathcal{H}}$ (omezenost)

2) $B(\vec{u},\vec{u}) \geq L \|\vec{u}\|_{\mathcal{H}}^2$ koercivita, B-eliptičnost

Pak $\forall \underset{\leftarrow}{w} \in \mathcal{H}'$ $\exists! \vec{u} \in \mathcal{H}$ tak, že

$$\underset{\leftarrow}{w}(\vec{v}) = B(\vec{u},\vec{v})$$

a navíc $\|\vec{u}\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{L} \|\underset{\leftarrow}{w}\|_{\mathcal{H}'}$

- Víme, že $V \subset H \Rightarrow H' \subset V'$

VĚTA: Nechť $w \in H'$. Potom jednoznačné řešení rovnice

$$A\vec{u} = w$$

splňuje navíc

$$\vec{u} \in H^2(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3 \cap L_{2,\sigma}(\Omega)^3 = H^2(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3 \cap V$$

2. derivace existují skoro všude

---

využijeme Rieszovu větu (dualita mezi H a H')

tj. ke každému $w \in H'$ $\exists \vec{z} \in H$ tak, že $w(\vec{v}) = (\vec{z}, \vec{v})_H$

tj. $\underbrace{(A\vec{u})}_{w}(\vec{v}) = (\vec{z}, \vec{v})_H = (-\Delta\vec{u}, \vec{v})_H$

$$\int_\Omega \nabla\vec{u} \cdot \nabla\vec{v}\, d\vec{x} = \int_\Omega \partial_j u_i \partial_j v_i dx \underset{\text{Green}}{=} -\int_\Omega \partial_{jj} u_i \cdot v_i dx = -\int_\Omega \Delta\vec{u} \cdot \vec{v}\, d\vec{x} = -(\Delta\vec{u}, \vec{v})_H$$

$\Rightarrow$ můžeme chápat A jako operátor z D_A na H

$$A\vec{u} = -\Delta\vec{u}$$

$H^2(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3 \cap V = D_A$ jsou prvky, které se zobrazí jen na $H' \equiv H$

- A chápaný jako $A: D_A \to H$ je omezený, invertovatelný a navíc symetrický: $(A\vec{u}, \vec{v}) = (-\Delta\vec{u}, \vec{v}) = ((\vec{u}, \vec{v})) = ((\vec{v}, \vec{u})) = (-\Delta\vec{v}, \vec{u})$

$$= (A\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{u}, A\vec{v})$$

$\Rightarrow$ sym + omez = samosdružený (samo-adjungovaný, self-adjoint) nad $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists A^{-1}: H \to D_A$ který je též samosdružený a kompaktní

$\forall A: \mathcal{H} \to \mathcal{H} \quad \exists A^*$ že $\forall \vec{u}, \vec{v}$ je $(A\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, A^*\vec{v})$

A^* = sdružený op.

$A = A^* \Rightarrow A$ je samosdruž.

SKRIPTA

rel. kompakt. vs. prekompaktní vs. totálně omezená

dále: DEF: Operátor $B: \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ je kompaktní $\Leftrightarrow$ pro každou omezenou množinu $M \subset \mathcal{B}_1$ je $B(M)$ relativně kompaktní v $\mathcal{B}_2$

tj. $\overline{B(M)}$ je kompaktní

DEF: $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ jsou Banachovy prostory. Potom řekneme, že $\mathcal{B}_1$ je kompaktně vnořený do $\mathcal{B}_2$ ($\mathcal{B}_1 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{B}_2$), pokud $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ a identické zobrazení $i: \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ je kompaktní operátor.

VĚTA: $A: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ invertovatelný, omezený a $\mathcal{H}_1 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{H}_2$, pak A^{-1} je kompaktní

VĚTA: Kompaktní samosdružený operátor B má spočetnou množinu vlastních čísel a příslušná množina vlastních vektorů tvoří ortonormální bázi $(\ker B)^\perp$.

VĚTA (Rellich - Kondrachov) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{3(n)}$ je omezená oblast s Lipschitzovskou hranicí. Potom (m.j.) platí

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega)$$

obecněji: $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_q(\Omega)$ $\quad 1 \le q < \frac{np}{n-p} = \frac{3\cdot 2}{3-2} = 6$

$\Rightarrow$ $V \hookrightarrow\hookrightarrow H$

$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ pro $q = \frac{np}{n-p} (= 6)$

$W^{k,p}(\Omega)$: Sobolev. prostor kde cca k-té derivace jsou v $L_p(\Omega)$

DŮKAZ VIZ SKRIPTA ... pomocí totální spojitosti ident. operátoru

Galerkinova metoda

H má spočetnou bázi $(\vec{W}_n)_{n=1}^{+\infty}$, ON

$$(\vec{W}_k, \vec{W}_\ell)_H = \delta_{k\ell}$$

$\vec{W}_k$ je vlastní vektor A

navíc $$((\vec{W}_k, \vec{W}_\ell)) = (A\vec{W}_k, \vec{W}_\ell)_H = (\mu_k \vec{W}_k, \vec{W}_\ell)_H = \mu_k \delta_{k\ell}$$

$(\vec{W}_k, \vec{W}_\ell)_V \qquad \int_\Omega \nabla \vec{W}_k \cdot \nabla \vec{W}_\ell \, d\vec{x}$

Označme $\underline{V_n} = [\vec{W}_1, \dots, \vec{W}_n]_\lambda$

Hledáme aproximace slabého řešení úlohy $\vec{V}$ jako

$$\vec{V}_n : \mathcal{Y} \to V_n$$

$$\vec{V}_n(t, \vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \vec{W}_k(\vec{x})$$

pro které platí

opět $(\ast\ast)$ jen s $\vec{V}_n$ místo $\vec{V}$

$$\boxed{\int_\Omega \frac{\partial \vec{V}_n}{\partial t} \cdot \vec{\varphi} \, d\vec{x} - \int_\Omega \vec{V}_n \cdot \nabla \vec{\varphi} \cdot \vec{V}_n \, d\vec{x} + \nu \int_\Omega \nabla \vec{V}_n \cdot \nabla \vec{\varphi} \, d\vec{x} = \int_\Omega \vec{F} \cdot \vec{\varphi} \, d\vec{x}}$$

tj. $$\sum_{k=1}^{n} \dot{a}_k(t) (\vec{W}_k, \vec{\varphi})_H - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_k(t) a_j(t) \int_\Omega \vec{W}_k \cdot \nabla \vec{\varphi} \cdot \vec{W}_j \, d\vec{x} + \nu \sum_{k=1}^{n} a_k(t) ((\vec{W}_k, \vec{\varphi})) = (\vec{F}, \vec{\varphi})_H$$

$\forall \vec{\varphi} \in \underline{V_n}$ tj. pro $\underline{\vec{\varphi} = \vec{W}_\ell}$

$$(\vec{W}_k, \vec{\varphi})_H = (\vec{W}_k, \vec{W}_\ell)_H = \delta_{k\ell}$$

$$((\vec{W}_k, \vec{\varphi})) = \mu_\ell \delta_{k\ell}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{a}_\ell(t) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_k(t) a_j(t) \int_\Omega \vec{W}_k \cdot \nabla \vec{W}_\ell \cdot \vec{W}_j \, d\vec{x} + \nu \mu_\ell a_\ell(t) = (\vec{F}, \vec{W}_\ell)_H \quad \text{pro } \ell = 1, \dots, n}$$

soustava ODR pro $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{pmatrix}$

soustava ve tvaru $\underline{\dot{\vec{a}} = \vec{f}(\vec{a})}$ "autonomní" soustava ODR

– má řešení (viz teorie ODR)
- buď na celém $\mathcal{J} = (0, T_{max})$
- nebo na $(0, T_b)$

přičemž $\lim\limits_{t \to T_b-} \|\vec{a}\|_{R^n} = +\infty$

- my ukážeme omezenost $\|\vec{a}\|$ nezávisle na čase
  $\Rightarrow$ "blow-up" nenastane $\Rightarrow$ řešení existuje na $\mathcal{J}$

<u>POZN</u>: Počáteční podmínka pro koef. a_ℓ (tj. $\vec{a}(0) = \vec{a}_0$)

je dána $\vec{V}_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \vec{W}_n$ (protože $\vec{V}_0 \in H$)

pomocí $a_\ell(0) = \beta_\ell \quad \forall \ell = 1, \dots, n$

to znamená, že $\vec{V}_n(0) = \vec{V}_{0,n} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \vec{W}_k$

$$\|\vec{V}_n\|_H^2 = \int_\Omega \vec{V}_n \cdot \vec{V}_n \, d\vec{x} = (\vec{V}_n, \vec{V}_n)_H = \Big(\sum_{k=1}^n a_k \vec{W}_k, \sum_{j=1}^n a_j \vec{W}_j\Big)_H =$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^n a_j \underbrace{(\vec{W}_k, \vec{W}_j)_H}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^n a_k^2 = \|\vec{a}\|_{\mathbb{R}^n}$$

$\Rightarrow$ můžeme odhadovat $\|\vec{V}_n\|_H^2$ místo $\|\vec{a}\|_{\mathbb{R}^n}$

- provedeme technicky stejné kroky jako při odvozování energetické nerovnosti, vyjdeme z (**) při záměně $\vec{V}$ za $\vec{V}_n$ dosadíme $\vec{\varphi} = \vec{V}_n$ a vše dál je stejné

$\Rightarrow$ získáme apriorní odhady (viz dříve)

$$\|\vec{a}\|_{\mathbb{R}_n} = \|\vec{V}_n(t,\cdot)\|_H^2 \le \underbrace{\|\vec{V}_{0,n}\|_H + \frac{k^2}{\nu}\int_\gamma \|\vec{F}\|_H^2 \, dt}_{\text{číslo nezávislé na } t,\, \vec{x}}$$

$\Rightarrow$ není možný blowup

$\Rightarrow$ $\vec{V}_n$ existuje na celém γ

viz dříve $\Rightarrow$ $\|\vec{V}_n\|_{L_\infty(\gamma,H)}^2 \le$ — " — $\Rightarrow$ $\vec{V}_n \in L_\infty(\gamma, H)$

$\Rightarrow$ $\|\vec{V}_n\|_{L_2(\gamma,V)}^2 \le \frac{2}{\nu}($ — " — $)$ $\Rightarrow$ $\vec{V}_n \in L_2(\gamma, V)$

jak je to dál s kompaktními operátory

- $B_1 \hookrightarrow B_2$ (B_1 je spojitě vnořen do B_2) $\Leftrightarrow$ $i: B_1 \to B_2$ je spojitý (omezený)

$\|i\vec{v}\|_{B_2} \le K\|\vec{v}\|_{B_1}$

tj. $\|\vec{v}\|_{B_2} \le K\|\vec{v}\|_{B_1}$

D • $\vec{v}_n$ slabě konverguje k $\vec{v}$ v Banachově prostoru $\mathcal{B}$ $\Leftrightarrow$

$(\forall w \in \mathcal{B}')\,(\,w(\vec{v}_n) \to w(\vec{v})\,)$ .. zapisujeme $\vec{v}_n \rightharpoonup \vec{v}$

D • operátor $T: \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ je tzv. totálně spojitý (completely continuous)

$\Leftrightarrow$ $\forall (\vec{v}_n)$ slabě konvergentní v $\mathcal{B}_1$ platí $T\vec{v}_n \to T\vec{v}$ v $\mathcal{B}_2$

tj. $\| T\vec{v}_n - T\vec{v} \|_{\mathcal{B}_2} \to 0$

D • $\mathcal{B}$ je reflexivní $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ je izomorfní s $\mathcal{B}''$

↳ každý Hilbertův prostor reflexivní je

V • V reflexivním prostoru lze z každé omezené posloupnosti vybrat slabě konvergentní podposloupnost

V • Nechť $\mathcal{B}_1$ je reflexivní. Potom pro $T: \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$

T je totálně spojitý $\Rightarrow$ T je spojitý (omez).

V • Na Banachově prostoru "kompaktní" $\Rightarrow$ "totálně spojitý"

Na reflex. Ban. p. "kompaktní" $\Leftrightarrow$ "totálně spojitý"

• $T: \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ spojitý a T^{-1} existuje $\Rightarrow$ T^{-1} je také spojitý

POZN: Převzato z anglické verze poznámek:

This is a good place to prove $V \subset\subset H$ by using the fact that both are Hilbert spaces, so the inclusion map $\iota: V \to H$ is compact $\Leftrightarrow$ it is completely continuous.

Lemma : $V \subset H$

Proof : We know $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega)$

$\subset$

$\Rightarrow H_0^1(\Omega)^3 \subset L_2(\Omega)^3$ easy $\left\{ \begin{array}{l} u_i \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \\ u_i \in L_2(\Omega) \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in L_2(\Omega)^3 \end{array} \right.$

$V = \overline{C^1_{0,\sigma}(\Omega)}$ in $H_0^1(\Omega)^3$

$H = \overline{C^1_{0,\sigma}(\Omega)}$ in $L_2(\Omega)^3$

$\vec{u} \in V \Rightarrow \exists (\vec{u}_n) \subset C^1_{0,\sigma}(\Omega)$ such that $\vec{u}_n \to \vec{u}$ in $H_0^1(\Omega)^3$

i.e. $\|\vec{u}_n - \vec{u}\|_{H_0^1(\Omega)^3} \to 0$!

by definition of $\|\vec{u}\|^2_{H_0^1(\Omega)^3} = \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|^2_{H_0^1(\Omega)^3}$

and by Poincare's inequality

$\|\vec{u}_n - \vec{u}\|_{L_2(\Omega)^3} \leq K \cdot \|\vec{u}\|^2_{H_0^1(\Omega)^3}$

$\Rightarrow \|\vec{u}_n - \vec{u}\|_{L_2(\Omega)^3} \to 0 \iff \vec{u} \in H$

Theorem : $V \hookrightarrow\hookrightarrow H$

Proof : we know from Rellich-Kondrachov th. that

$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega)$ } def (#)

that means by definition that $\imath: H_0^1(\Omega) \to L_2(\Omega)$
is compact, and hence completely continuous

1) We prove that $H_0^1(\Omega)^3 \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega)^3$, i.e. by definition, that

$$\imath: H_0^1(\Omega)^3 \to L_2(\Omega)^3 \text{ is completely continuous,}$$
and hence compact

i.e. we want to prove that any weakly convergent sequence $(\vec{u}_n) \subset H_0^1(\Omega)^3$ converges strongly in $L_2(\Omega)^3$

Let $\vec{u}^n \rightharpoonup \vec{u}$ in $H_0^1(\Omega)^3$. So for any $\underset{\leftarrow}{w} \in H_0^1(\Omega)^{3\prime}$ we have

$\underset{\leftarrow}{w}(\vec{u}^n) \to \underset{\leftarrow}{w}(\vec{u})$ $\quad \vec{u}^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \end{pmatrix}$ and $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ where $u_i \in H_0^1(\Omega)$

$$\Rightarrow \quad \vec{u}^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \text{and}$$

$$\underbrace{\underset{\leftarrow}{w}(\vec{u}^n) = \underset{\leftarrow}{w}\left(\begin{pmatrix} u_1^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \underset{\leftarrow}{w}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ u_2^n \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \underset{\leftarrow}{w}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3^n \end{pmatrix}\right)}_{\text{linearity of } \underset{\leftarrow}{w}} = \sum_{k=1}^{3} \underset{\leftarrow}{w}_k(u_k^n)$$

$\underset{\leftarrow}{w}_k \in H_0^1(\Omega)'$

and arbitrary choice of $\underset{\leftarrow}{w}$ implies as an arbitrary choice of $\underset{\leftarrow}{w}_k$

If we choose $\underset{\leftarrow}{w}_1$ ($k=1$) arbitrarily and $\underset{\leftarrow}{w}_2, \underset{\leftarrow}{w}_3 = \underset{\leftarrow}{0}$, then

$\underset{\leftarrow}{w}_1(u_1^n) \to \underset{\leftarrow}{w}_1(u_1)$ and analogously for $k = 2,3$

$\underset{\leftarrow}{w}(\vec{u}^n) \to \underset{\leftarrow}{w}(\vec{u})$

$\Rightarrow$ $u_k^n \to u_k$ for $k = 1,2,3$. $\xrightarrow{(\#)}$ $u_k^n \to u_k$ in $L_2(\Omega)$
in $H_0^1(\Omega)$

$\Rightarrow$ $\underline{\|u_k^n - u_k\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \quad \forall k = 1,2,3}$

but $\underline{\|\vec{u}\|^2_{L_2(\Omega)^3} = \sum_k \|u_k\|^2_{L_2(\Omega)^3}}$

$\Downarrow$

$\Rightarrow$ $\|\vec{u}^n - \vec{u}\|_{L_2(\Omega)^3} \to 0$

$\Leftrightarrow$ $\vec{u}^n \to \vec{u}$ in $L_2(\Omega)^3$

$\Leftrightarrow$ $H_1^0(\Omega)^3 \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega)^3$

subset, but with the same norm

by definition of compact op. : if $V \subset H_1^0(\Omega)^3$

then $i|_V : V \to L_2(\Omega)^3$ is also compact

and thus $V \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega)^3$

but $V \subset H$

$\Rightarrow$ $V \hookrightarrow\hookrightarrow H$.

/ Bochnerův (ale i Hilbertův) prostor

My máme $\vec{V}_n \in L_2(\mathcal{Y}, V)$ $\Rightarrow$ reflexivní $\Rightarrow$ z $\vec{V}_n$ lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost $\vec{V}_{k_n} =: \underbrace{\vec{V}_n}_{\text{opět značíme } V_n}$

- chceme ukázat, že když $\vec{V}_n \rightharpoonup \vec{V}$ v $L_2(\mathcal{Y}, V)$ tak $\vec{V}$ je slabým řešením naší úlohy

Vynásobíme (**) s $\vec{V}_n$ místo $\vec{V}$ funkcí $\vartheta \in C_0^\infty(\langle 0, T_{max}))$, zintegrujeme přes $\mathcal{Y}$ a dostaneme obdobu slabé rovnosti:

$$\boxed{\int_{\mathcal{Y}}\int_{\Omega} \underbrace{-\vec{V}_n \cdot \vec{\varphi}\dot{\vartheta}}_{1} - \underbrace{\vec{V}_n \cdot \nabla\vec{\varphi} \cdot \vec{V}_n \vartheta}_{2} + \underbrace{\nu \nabla\vec{V}_n \cdot \nabla\vec{\varphi}\vartheta}_{3} - \vec{F}\cdot\vec{\varphi}\vartheta \, d\vec{x}dt = \vartheta(0)\int_{\Omega} \underbrace{\vec{V}_{0,n}\cdot\vec{\varphi}}_{4} \, d\vec{x}}$$

kterou "naše" $\vec{V}_n$ splňuje $\forall \vec{\varphi} \in V_n$, $\forall \vartheta \in C_0^\infty(\langle 0, T_{max}))$

zvolme $\vec{\varphi} \in V_m$ pevné $(m \in \mathbb{N})$ a nechť $n \geq m$

víme $V_m \subset V_n$

$$\iint 1 \, d\vec{x}dt = \int_{\mathcal{Y}}\int_{\Omega} -\vec{V}_n \cdot \vec{\varphi}\dot{\vartheta} \, d\vec{x}dt \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{\mathcal{Y}}\int_{\Omega} -\vec{V}\cdot\vec{\varphi}\dot{\vartheta} \, d\vec{x}dt \quad \checkmark$$

díky $\vec{V}_n \rightharpoonup \vec{V}$ v $L_2(\mathcal{Y}, V)$

toto je lin. funkcionál $\in L_2(\mathcal{Y}, V)'$ aplikovaný na $\vec{V}_n \in L_2(\mathcal{Y}, V)$

$$\iint 3 \, d\vec{x}dt = \int_{\mathcal{Y}}\int_{\Omega} \nu\nabla\vec{V}_n \cdot \nabla\vec{\varphi}\vartheta \, d\vec{x}dt \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{\mathcal{Y}}\int_{\Omega} \nu\nabla\vec{V}\cdot\nabla\vec{\varphi}\vartheta \, d\vec{x}dt \quad \checkmark$$

$$\text{NH}\iint 4 \, d\vec{x}dt = \vartheta(0)\int_{\Omega} \vec{V}_{0,n}\cdot\vec{\varphi} \, d\vec{x} \xrightarrow{n\to+\infty} \vartheta(0)\int_{\Omega} \vec{V}_0 \cdot\vec{\varphi} \, d\vec{x} \quad \checkmark$$

$$\vec{V}_{0,n} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \vec{W}_k \xrightarrow{n\to+\infty} \vec{V}_0$$

jak je to s členem 2 ? ... $\vec{V}_n$ je tam "v kvadrátu" $\Rightarrow$ slabá konvergence nestačí

V. (Lions–Aubinovo Lemma) Nechť $B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$. B_0, B_1 nechť jsou reflexivní. Nechť $p_0, p_1 \in (1, +\infty)$ a def.

$$Y = \left\{ \vec{u} \in L_{p_0}(\mathcal{J}, B_0) \;\middle|\; \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \in L_{p_1}(\mathcal{J}, B_1) \right\}$$

s normou $\|\vec{u}\|_Y = \|\vec{u}\|_{L_{p_0}(\mathcal{J}, B_0)} + \left\| \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right\|_{L_{p_1}(\mathcal{J}, B_1)}$

Potom platí $Y \hookrightarrow\hookrightarrow L_{p_0}(\mathcal{J}, B)$

Potom: lze:

$$\left(\frac{\partial \vec{V}_n}{\partial t}(t, \cdot), \vec{\varphi} \right)_H \quad \forall \vec{\varphi} \in V$$

a pak $\frac{\partial \vec{V}_n}{\partial t}(t, \cdot) \in V'$ $\qquad \frac{\partial \vec{V}_n}{\partial t} : \mathcal{J} \to V'$

$$\left\| \frac{\partial \vec{V}_n}{\partial t} \right\|_{L_{p_1}(\mathcal{J}, V')} = \left\| \left\| \frac{\partial \vec{V}_n}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_{V'} \right\|_{L_{p_1}} = \left\| \sup_{\substack{\vec{\varphi} \in V \\ \|\vec{\varphi}\|_V = 1}} \left(\frac{\partial \vec{V}_n}{\partial t}(t), \vec{\varphi} \right)_H \right\|_{L_p}$$

$\leq \dots$ lze odhadnout (ověřit)

$(p_1 = 2$ pro $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$p_1 = \frac{4}{3}$ pro $\Omega \subset \mathbb{R}^3)$

Lions–Aubin $\Rightarrow$ $p_0 = 2$ $\quad +$

$B_0 = V, \; B = H, \; B_1 = V'$

navíc $V \hookrightarrow\hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ $\quad \Leftarrow \begin{cases} V \hookrightarrow\hookrightarrow H \Rightarrow V \hookrightarrow H \xRightarrow{\text{dk. doma}} H' \hookrightarrow V' \\ H \equiv H' \Rightarrow H \hookrightarrow V' \end{cases}$

$$\overset{Y}{\mathbin{/\!/}}$$

$$\Rightarrow L_2(\mathcal{Y};V) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\mathcal{Y};H)$$

$\Rightarrow$ každá slabě konvergentní posloupnost v $L_2(\mathcal{Y},V)$
konverguje silně v $\underline{L_2(\mathcal{Y},H)}$

tj: $\vec{V}_n \rightharpoonup \vec{V}$ v $L_2(\mathcal{Y},V)$ $\Rightarrow$ $\vec{V}_n \to \vec{V}$ v $L_2(\mathcal{Y},H)$

$$\Rightarrow \left| \iint_{\mathcal{Y}\,\Omega} \vec{V}_n \cdot \nabla\vec{\varphi} \cdot \vec{V}_n \, \mu \, d\vec{x}\,dt - \iint_{\mathcal{Y}\,\Omega} \vec{V} \cdot \nabla\vec{\varphi} \cdot \vec{V} \, \mu \, d\vec{x}\,dt \right| =$$

zpět k členu (2)

$$\left| \iint_{\mathcal{Y}\,\Omega} \Big(\underbrace{\vec{V}_n \cdot \nabla\vec{\varphi} \cdot \vec{V}_n - \vec{V} \cdot \nabla\vec{\varphi} \cdot \vec{V}_n}_{A} + \underbrace{\vec{V} \cdot \nabla\vec{\varphi} \cdot \vec{V}_n - \vec{V} \cdot \nabla\vec{\varphi} \cdot \vec{V}}_{B} \Big) \mu \, d\vec{x}\,dt \right|$$

$$\leq \underbrace{\iint_{\mathcal{Y}\,\Omega} |A| \, d\vec{x}\,dt}_{} + \underbrace{\iint_{\mathcal{Y}\,\Omega} |B| \, d\vec{x}\,dt}_{\iint \left| \vec{V} \cdot \nabla\vec{\varphi} \cdot (\vec{V}_n - \vec{V}) \mu \right| d\vec{x}\,dt}$$

lineární funkcionále aplikovaný na $\vec{V}_n - \vec{V}$
dokonce silně $\vec{V}_n \to \vec{V}$
aby $(\vec{V}_n - \vec{V}) \to \vec{0}$

$$\Rightarrow \iint_{\mathcal{Y}\,\Omega} |B| \, d\vec{x}\,dt \to 0$$

upravíme dále

$$\iint_{\mathcal{T}\Omega} |A| \, d\vec{x}\,dt = \iiint_{\mathcal{T}\Omega} \Big| \Big(\underbrace{\vec{V}_n \cdot \nabla\vec{\varphi} \cdot \vec{V}_n - \vec{V} \cdot \nabla\vec{\varphi} \cdot \vec{V}_n}_{A} \Big) \Big| \mu \; d\vec{x}\,dt =$$

$$= \iiint_{\mathcal{T}\Omega} \Big| \underbrace{(\vec{V}_n - \vec{V})} \cdot \underbrace{\nabla\vec{\varphi} \cdot \vec{V}_n} \, \mu \Big| \, d\vec{x}\,dt \le$$

$$\le \underbrace{\sqrt{\iint_{\mathcal{T}\Omega} \| \vec{V}_n - \vec{V} \|^2 d\vec{x}\,dt}} \; \underbrace{\sqrt{\iint_{\mathcal{T}\Omega} \| \nabla\vec{\varphi} \cdot \vec{V}_n \|^2 \mu^2 d\vec{x}\,dt}}$$

$(A1) = \| \vec{V}_n - \vec{V} \|_{L_2(\mathcal{T};H)} \to 0$

stačí, aby toto bylo omezené $(A2)$

Hölderova nerovnost

$$\sum_{1}^{N} a_n b_n \le \left(\sum |a_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum |b_n|^q \right)^{1/q}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\int_\Omega f g \, d\vec{x} \le \left(\int |f|^p dx \right)^{1/p} \left(\int |g|^q dx \right)^{1/q}$$

$$\int \underline{\vec{f} \cdot \vec{g}} \, d\vec{x} = \int \sum_i f_i g_i \, d\vec{x} \le \quad p = q = 2$$

$$\le \int \underbrace{\sqrt{\sum f_i^2}} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum g_i^2}} \, d\vec{x}$$

$$\le \sqrt{\int \|\vec{f}\|^2 dx} \cdot \sqrt{\int \|g\|^2 dx}$$

$$(A2) = \int_\Omega \| \nabla\vec{\varphi} \cdot \vec{V}_n \| d\vec{x} = \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{3} \partial_j \varphi_i V_{n,i}}_{\text{Hölder } p=q=\frac{1}{2}} \Big)^2 d\vec{x} \le$$

$$\le \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \left[\sum_{i=1}^{3} (\partial_j \varphi_i)^2 \cdot \sum_{i=1}^{3} V_{n,i}^2 \right] d\vec{x} = \int_\Omega \underbrace{(\nabla\vec{\varphi} \cdot \nabla\vec{\varphi})}_{\text{skalár}} \underbrace{\|\vec{V}_n\|^2}_{\text{skalár}} d\vec{x} \le$$

Hölder: $\frac{1}{p} = \frac{1}{3}, \; \frac{1}{q} = \frac{2}{3} \iff p = 3, \; q = \frac{3}{2}$

aby toto bylo omezené, nestačí $\vec{\varphi} \in V_m$

ale chceme $\vec{\varphi} \in V_m \cap C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)^3$

$$\leq \underbrace{\left(\int_\Omega \| \vec{v}_n \|^6 dx \right)^{1/3}} \cdot \left(\int_\Omega (\nabla \vec{\varphi} \cdot \nabla \vec{\varphi})^{3/2} d\vec{x} \right)^{2/3}$$

$\vec{v}_n \in V = H_0^1(\Omega)^3 \cap L_{2,\sigma}(\Omega)^3 \quad \Rightarrow$ Rellich-Kondrachov

$$\| \vec{v}_n \|_{L_6(\Omega)} \leq K \cdot \| \vec{v}_n \|_V$$

✓

$\Rightarrow$ máme $\vec{v}$ splňuje slabou rovnost dle definice $\forall \vec{\varphi} \in V_m \cap C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)^3$ $\forall m$

$\Rightarrow$ pro $m \to +\infty$

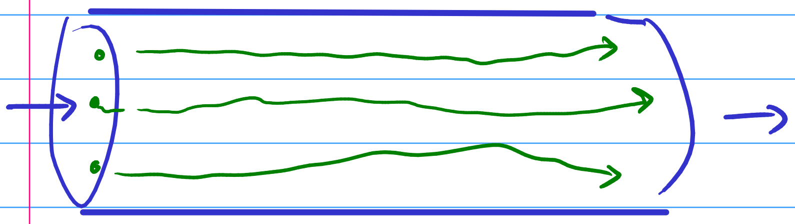
$$\forall \vec{\varphi} \in \bigcup_{m=1}^{+\infty} V_m \cap C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)^3 = H \cap C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)^3 = \underline{C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)^3}$$

POZN: - jednoznačnost řešení?
- splnění energetické nerovnosti? (naše $\vec{v}$ splňuje)
- existence tlaku P (za jistých okolností lze i ze slabého řešení P rekonstruovat)

(Pokorný - kurz NS na MFF)

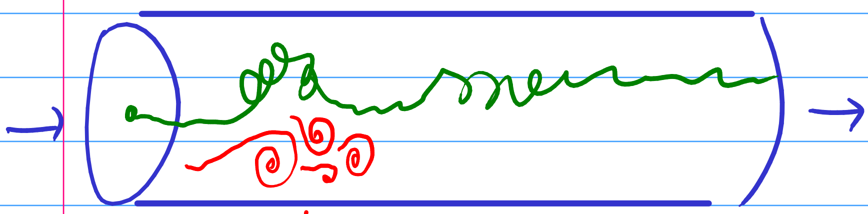
- existence hladkého řešení (Ladyženská, Kyselev 1957 ... existuje lokálně v čase)
- analýza stlačitelného vazkého proudění

TURBULENTNÍ PROUDĚNÍ



trajektorie

Laminární proudění



proudnice

⇒ vznikají víry – chaotické proudění

⇒ čím větší rychlost, tím větší „chaos"

menší viskozita — „ —

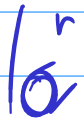
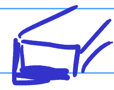
širší trubka

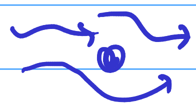
L … charakt. rozměr

Reynoldsovo číslo $$Re = \frac{\rho|\vec{v}|L}{\mu} = \frac{|\vec{v}|L}{\nu}$$

dyn. viskozita

kinematické viskozita

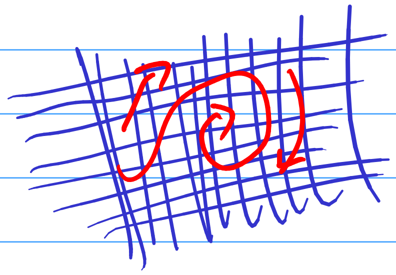
L …  … hydraulický poloměr | r| $\frac{ab}{a+b}$ 

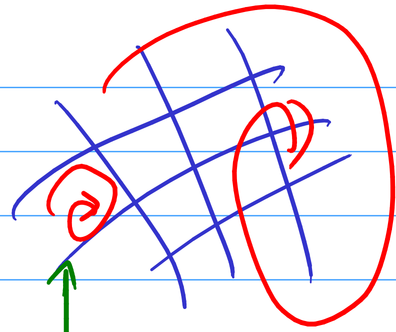
 … rozměr obtékaného objektu

Re < 1000 … laminární proudění

≫1000 … turbulentní proudění

NMDT :

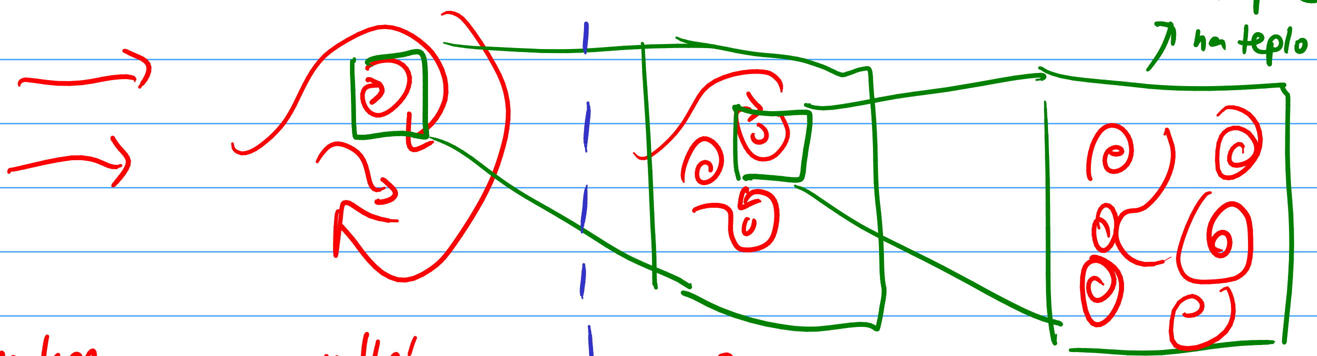




dost jemná num. síť na „zachycení" turbulentního proudění

malé víry nelze simulovat na síti

větší ano



lze reprezentovat na síti | nelze

$\Rightarrow$ nutný <u>model</u>

Jak modelovat turbulenci

1) Reynoldsovo průměrování – v čase (T); v prostoru (V); přes statistický soubor (N)

$$f = \bar{f} + f'$$

f – veličina $\in \{\varrho, V_i, p\}$

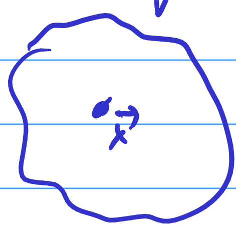
$\bar{f}$ – průměrná hodnota

f' – fluktuace

$$\overline{f}_T(t,\vec{x}) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(\tau,\vec{x})\,d\tau$$

(T → +∞ pro stac. proudění)

(homogenní proudění)



$$\overline{f}_{\mathcal{V}}(t,\vec{x}) = \lim_{|\mathcal{V}|\to+\infty} \frac{1}{|\mathcal{V}|}\int_{\mathcal{V}(\vec{x})} f(t,\vec{\xi})\,d\vec{\xi}$$

$$\overline{f}_N(t,\vec{x}) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f^{(n)}(t,\vec{x})$$

" $\to +\infty$ " = T, $|\mathcal{V}|$ mají měřítko řádově větší než měřítko (časové/prostorové) turbulentních jevů

tyto veličiny splňují tzv. <u>Reynoldsova pravidla průměrování</u>

DÚ

$$\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}\,, \qquad \overline{\alpha f} = \alpha \overline{f}$$

$$\overline{fg} = \overline{f}\cdot\overline{g} + \overline{f'g'}$$

$$\overline{\partial_i f} = \partial_i \overline{f}$$

časové průměrování

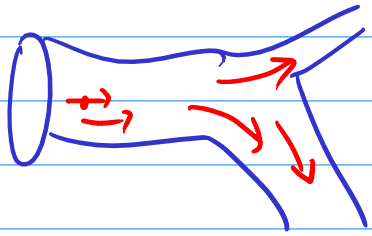
$$\overline{\overline{f}}(t,\vec{x}) = \lim_{T\to+\infty}\int_t^{t+T} \overline{f}(\tau,\vec{x})\,dt = \overline{f}(t,\vec{x})$$

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f} \quad\Rightarrow\quad \overline{f'} = \overline{(f-\overline{f})} = \overline{f} - \overline{\overline{f}} = \overline{f} - \overline{f} = 0$$

Pro nestacionární proudění dostaneme tyto vztahy <u>limitně</u>

pro $T \not\to +\infty$ ale $T = \delta t$, kde $\dfrac{\delta t}{t_0} \to 0$

t_0 … časové měřítko makroskopických jevů



Dosadíme všechny veličiny rozepsané ve tvaru

$$\rho = \bar\rho + \rho'$$
$$V_i = \bar V_i + V_i'$$
$$P = \bar P + P'$$

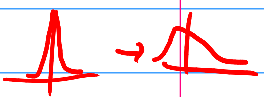
do NS rovnic (pro nestlačitelné proudění)

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \bar\rho}{\partial t} + \partial_i\left(\bar\rho\, \bar V_i\right) = 0$$

$$\frac{D\bar V_i}{Dt} = -\partial_i \bar P + \mu \Delta \bar V_i + \partial_j\left(\tau^R_{ij}\right) + F_i$$

formálně vypadá stejně jako NS rovnice

T^R vnáší do proudění TURBULENTNÍ VISKOZITU



$$\left(\tau^R_{ij}\right) = \mathbb{T}^R \quad \text{… Reynoldsův tenzor napětí}$$

$$\tau^R_{ij} = \overline{V_i' V_j'} = \bar V_i \bar V_j - \overline{V_i V_j} \quad \text{.. je symetrický}$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\mathbb{T}^R = \frac{1}{2}\,\overline{V_i' V_i'} = \frac{1}{2}\overline{\sum V_i'^2}$$ … průměrná TURBULENTNÍ KINETICKÁ ENERGIE

vzniká z kin. energie $\sum_i \frac{1}{2}\left(\bar V_i\right)^2$

je unášená prouděním rychlostí $\bar V$

disipuje na teplo

T^R je nutné modelovat (closure)

- modely 1. řádu (pomocí 1 další rovnice)

Spalart-Allmaras one-equation model

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{\nu} v_j) = {} & C_{b1}(1 - f_{t2})\tilde{S}\tilde{\nu} \\
& + \frac{1}{\sigma}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu_L + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + C_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} \\
& - \left[C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + f_{t1} \| \Delta \vec{v} \|_2^2 .
\end{aligned}
$$

turbulentní viskozita ("eddy viscosity")

$$
\begin{aligned}
\tilde{S} &= f_{v3} S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}, \\
f_{v1} &= \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad f_{v2} = \left(1 + \frac{\chi}{C_{v2}} \right)^{-3}, \\
f_{v3} &= \frac{(1 + \chi f_{v1})(1 - f_{v2})}{\max(\chi, 0.001)}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu_L}.
\end{aligned}
$$

DESTRUKCE $\tilde{\nu}$

PRODUKCE $\tilde{\nu}$

$$
S = \sqrt{2\,\Omega_{ij}\Omega_{ij}},
$$

$$
\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).
$$

$$
f_w = g \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6},
$$

$$
g = r + C_{w2}(r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}.
$$

nesym. část gradientu rychlosti (tenzor "rychlosti rotace")

– modely 2. řádu (např. K-ε model)

turbulentní kin. energie

rychlost disipace t.k.e.

$$\frac{\partial \rho K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j K) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_K}\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right] + \tau_{ij}^F S_{ij} - \rho\varepsilon$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j \varepsilon^*) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_j}\right] + C_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon^*}{K}\tau_{ij}^F S_{ij} - C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2}\,\rho\,\frac{(\varepsilon^*)^2}{K} + \phi_\varepsilon.$$

$$\varepsilon = \varepsilon_w + \varepsilon^*. \qquad \mu_T = C_\mu f_\mu\,\rho\,\frac{K^2}{\varepsilon^*}.$$

celk. disipace t.k.e

disipace na stěně (okrajová podmínka pro ε)

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92,$$
$$\sigma_K = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad Pr_T = 0.9.$$

Furthermore, the near-wall damping functions read

$$\begin{aligned} f_\mu &= \exp\left(\frac{-3.4}{(1+0.02\,Re_T)^2}\right) \\ f_{\varepsilon 1} &= 1 \\ f_{\varepsilon 2} &= 1 - 0.3\exp\left(Re_T^2\right) \end{aligned} \tag{7.54}$$

with $Re_T = \rho K^2/(\varepsilon^* \mu_L)$ being the turbulent Reynolds number. Finally, the explicit wall term ϕ_ε and the value ε_w are defined as

$$\phi_\varepsilon = 2\mu_T \frac{\mu_L}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial y_n^2}\right)^2 \quad \text{and} \quad \varepsilon_w = \frac{2\mu_L}{\rho}\left(\frac{\partial\sqrt{K}}{\partial y_n}\right)^2, \tag{7.55}$$

zdroj:

COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS
Principles and Applications
Third Edition

JIRI BLAZEK, PhD
CFD Consulting & Analysis
Sankt Augustin, Germany

ELSEVIER

AMSTERDAM • BOSTON • HEIDELBERG • LONDON
NEW YORK • OXFORD • PARIS • SAN DIEGO
SAN FRANCISCO • SINGAPORE • SYDNEY • TOKYO
Butterworth-Heinemann is an imprint of Elsevier

Příště:
- uzavření systému rovnic (vztah mezi E a T, stavová rovnice)
- okrajové podmínky, formulace úloh (vč. přestupu tepla)
- bezrozměrné veličiny charakterizující proudění
- formulace konkrétních úloh
  - kvazi - 1D proudění
  - vícefázové proudění
  - vícesložkové proudění + hoření

- STLAČITELNÉ PROUDĚNÍ (ZZHm, ZZHyb + ZZE + 2 rovnice)

neznámé: V_i, P, ϱ, T, E

viz DYK

- vztah mezi T a E:

$$c_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \quad \text{nebo} \quad c_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$$

kde $H = E + \frac{P}{\varrho}$ ... specifická entalpie

POZN: ozn. $\mathcal{E}(T) = E(\phi(T))$ kde $\phi(T) = (P(T), V, T)$

V je konst
P je fce T

pak: $c_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{d\mathcal{E}}{dT} = \ldots$

POZN: U kapalin, kde $\varrho \approx$ konst ("nestlačitelných")

$$c_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P + \underbrace{\left(\frac{\partial \left(\frac{P}{\varrho}\right)}{\partial T}\right)_P}_{\approx 0} \approx \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P$$

P = konst
$\varrho \approx$ konst

Obecně $c_V = c_V(T)$, $c_p = c_p(T)$

V mnoha případech (kdy T se "až tak moc nemění"), pak

$$c_V = c_p \doteq \text{konst} \Rightarrow E = \int_{T_0}^{T} \underbrace{c_{p,v}}_{\text{konst.}}(\tau)\,d\tau = c_{p,v}\cdot(T - T_0)$$

<u>Pozn</u>: ZZE obsahuje E jen v časové (materiálové) derivaci

$\Rightarrow$ volba T_0 není podstatná

$$\Rightarrow \frac{DE}{Dt} = c_{p,v} \cdot \frac{DT}{Dt}$$

$c_{p,v}(T)$

<u>STAVOVÉ ROVNICE</u>

: závislosti $f(P,T,V) = \tilde{f}(P,T,\varrho) = 0$

ve specifických veličinách

- stavová rovnice (EOS) ideálního plynu

$$PV = nRT$$

objem

látkové mn.

R .. univerzální plynová konst $\approx 8{,}314..\ J.mol^{-1}K$

$$P = \frac{n}{V}RT = \left(\frac{nM}{V}\right)\frac{R}{M}T = \varrho R_{spec} T$$

$nM = m$

$\frac{nM}{V} = \varrho$

specifická plyn. konst

$$R_{spec} = \frac{R}{M}$$

M... molární hmotnost látky

- EOS pro ideální plyn $\Leftarrow$ jednoatomové molekuly bez vzájemného působení

$\Rightarrow$ funguje dobře na řídké plyny ale ne na
- kapaliny
- plyny blízko teploty varu
- nasycené páry

ALTERNATIVY (přesnější stavové rovnice)

viz Novák - Termodyn. vlastnosti plynů (VŠCHT)

- viriální stavová rovnice

$$z = \frac{pV_\mathrm{m}}{\boldsymbol{R}T} = 1 + \frac{B}{V_\mathrm{m}} + \frac{C}{V_\mathrm{m}^2} + \ldots = \frac{p}{\boldsymbol{R}T\rho} = 1 + B\rho + C\rho^2 + \ldots$$

2. 3. viriální koef.

(jsou pouze funkcemi T)

→ • viriální EOS pro směsi:

$$B = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j B_{ij}$$

vzájemné působení 2 molekul i-té a j-té složky směsi

$$C = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N} x_i x_j x_\ell C_{ij\ell}$$

vzájemné pův. 3 molekul i, j, l-té složky atd.

koncentrace i, j, l-té složky

- Van der Waalsova EOS

$$p = \frac{n\boldsymbol{R}T}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2} = \frac{\boldsymbol{R}T}{V_\mathrm{m}-b} - \frac{a}{V_\mathrm{m}^2}$$

$$p = \frac{\boldsymbol{R}T\rho}{1-b\rho} - a\rho^2\,, \qquad z = \frac{p}{\boldsymbol{R}T\rho} = \frac{1}{1-b\rho} - \frac{a\rho}{\boldsymbol{R}T}$$

$$a = \frac{27}{64}\,\frac{\boldsymbol{R}^2T_\mathrm{c}^2}{p_\mathrm{c}}\,, \qquad b = \frac{1}{8}\,\frac{\boldsymbol{R}T_\mathrm{c}}{p_\mathrm{c}}$$

← p_c, T_c ... podmínky v kritickém bodě

- Redlichova - Kwongova EOS

$$p = \frac{\boldsymbol{R}T}{V_\mathrm{m}-b} - \frac{a}{T^{1/2}V_\mathrm{m}(V_\mathrm{m}+b)} = \frac{\rho\boldsymbol{R}T}{1-b\rho} - \frac{a\rho^2}{\sqrt{T}(1+b\rho)}$$

- Pengova - Robinsonova EOS

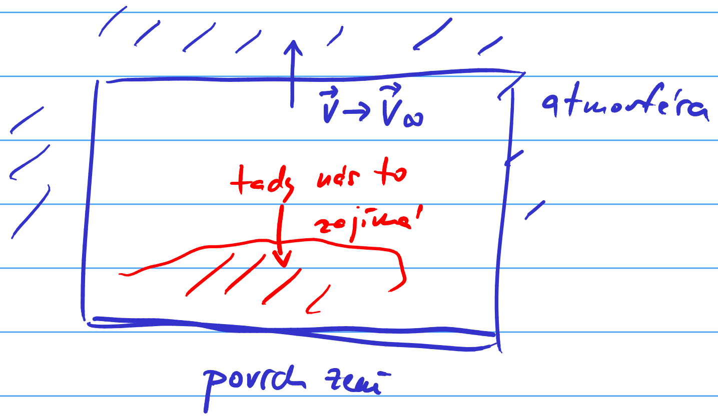
$$\begin{aligned} p &= \frac{\boldsymbol{R}T}{V_\mathrm{m}-b} - \frac{a(T)}{V_\mathrm{m}(V_\mathrm{m}+b)+b(V_\mathrm{m}-b)} = \frac{\rho\boldsymbol{R}T}{1-b\rho} - \frac{a\rho^2}{1+b\rho+b\rho(1-b\rho)} \\ z &= \frac{V_\mathrm{m}}{V_\mathrm{m}-b} - \frac{V_\mathrm{m}\,a(T)}{\boldsymbol{R}T[V_\mathrm{m}(V_\mathrm{m}+b)+b(V_\mathrm{m}-b)]} = \frac{1}{1-b\rho} - \frac{a\rho}{\boldsymbol{R}T(1+b\rho+b\rho(1-b\rho))} \end{aligned} \tag{1.51}$$

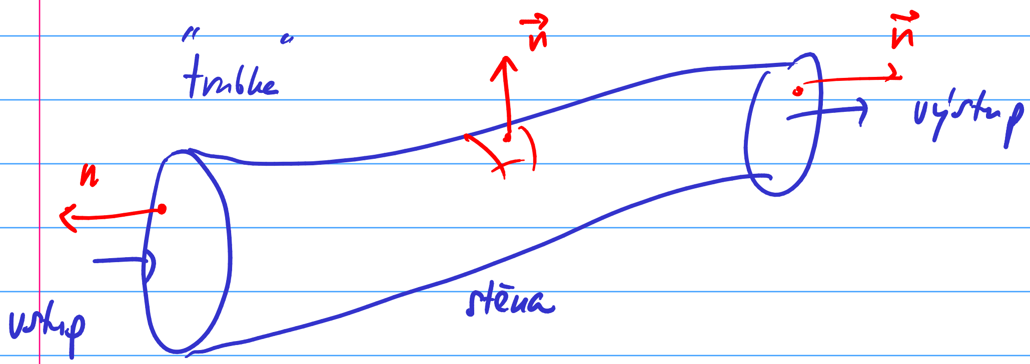
Parametry a, b jsou určeny relacemi

$$\begin{aligned} b &= 0.077\,796\,1\,\frac{\boldsymbol{R}T_\mathrm{c}}{p_\mathrm{c}}\,, \qquad a = \alpha\cdot a_\mathrm{c} = \alpha\cdot 0.457\,235\,52\,\frac{\boldsymbol{R}^2T_\mathrm{c}^2}{p_\mathrm{c}} \\ \alpha &= \left[1+m\left(1-\sqrt{T_\mathrm{r}}\right)\right]^2, \quad m = 0.374\,64 + 1.542\,26\,\omega - 0.269\,92\,\omega^2 \end{aligned} \tag{1.52}$$

FORMULACE ÚLOH PROUDĚNÍ, OKRAJOVÉ PODMÍNKY

– otázka je, co je oblast Ω, v níž platí $\begin{cases} \text{ZZHm}, \\ \text{ZZHyb}, \\ \text{ZZE} \end{cases}$





jak předepsat okraj. podm. (B.C. .. boundary conditions)

1) nevazké proudění: BC jen na vstupu
($\varrho, T, \vec{V}_{in}$)

hodnoty na výstupu jsou jednoznačně určeny

na stěně: $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ (nic nemůže projít skrz stěnu)

2) vazké stlačitelné proudění

na vstupu: $\vec{V}, T$ na výstupu $P(\rho)$	P, T $\vec{V}$	P_{in}, T P_{out}

$P_{in} > P_{out}$

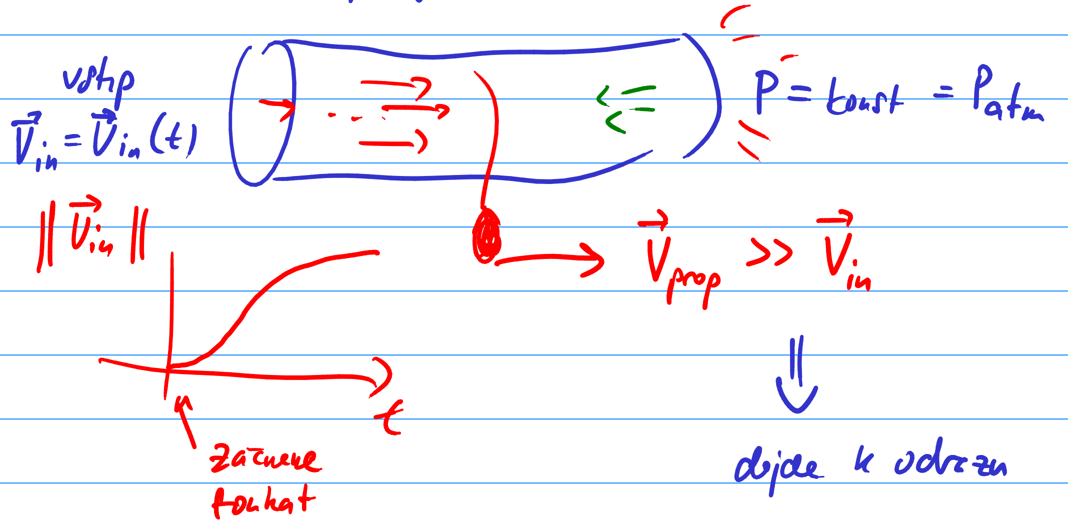
vstup $\Leftrightarrow$ $\vec{V}\cdot\vec{n} < 0$

výstup $\Leftrightarrow$ $\vec{V}\cdot\vec{n} > 0$

ale to se může v průběhu simulace měnit

na stěně $\vec{V} = \vec{0}$ (no-slip B.C.)

Pozor: nestacionární jevy



$\Downarrow$

dojde k odrazu

- co explicitně nepředepisujeme, pro to platí $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}} = 0$ (co $\uparrow$ f)
- potlačení odrazů — "resistance boundary condition"
  - B.C. založené na Fourierově rozvoji $\vec{V}$

• periodické okrajové podmínky