

Matematické metody v dynamice tekutin

Pavel Strachota

Verze 12. dubna 2024

Obsah

Úvod	7
1 Matematický aparát	9
1.1 Vektory	9
1.2 Koncept tenzorového pole	10
1.2.1 Co je to tenzor	10
1.2.2 Einsteinovo sumační pravidlo	11
1.2.3 Tenzorový součin a vnitřní součin	11
1.2.4 Kovariance a kontravariance, transformace báze	11
1.2.5 Kovektory jako „šipky“	12
1.2.6 Kontravariantní a kovariantní vektory ve fyzice	13
1.2.7 Ortogonální transformace tenzorů	13
1.2.8 Tenzory v dynamice tekutin	13
1.2.9 Užitečné technické nástroje a vztahy	14
1.2.10 Invarianty tenzoru	15
1.2.11 Izotropní tenzory a tenzorové funkce	16
1.3 Asymptotické chování funkcí	17
1.4 Diferenciální počet funkcí více proměnných	17
1.5 Integrální počet funkcí více proměnných	18
1.5.1 Záměna derivace a integrálu	19
1.6 Integrace po varietách	20
1.6.1 Křivkový integrál	20
1.6.2 Plošný integrál	20
1.6.3 Greenova formule	21
1.7 Pojmy z funkcionální analýzy	22
1.7.1 Elementární pojmy	22
1.7.2 Vlastnosti Banachových a Hilbertových prostorů	23
1.7.3 Samosdružené operátory na Hilbertových prostorech	25
1.7.4 Funkční prostory C^m a L_p	25
1.7.5 Zobecněné funkce a slabá derivace	26
1.7.6 Sobolevovy prostory	28
1.7.7 Vlastnosti funkcí ze Sobolevova prostoru $H^1(\Omega)$	29
1.7.8 Bochnerovy prostory	30

1.7.9	Užitečné nerovnosti	30
1.7.10	Kompaktnost, věty o vnoření	32
2	Kinematika tekutin	37
2.1	Materiálové těleso	37
2.2	Referenční a aktuální konfigurace materiálového tělesa	37
2.2.1	Přechod mezi referenčními a prostorovými souřadnicemi	38
2.3	Deformační gradient	39
2.4	Integrály a derivace vektorových a tenzorových polí	39
2.5	Materiálová derivace	40
2.6	Zrychlení materiálového bodu	42
2.7	Proudnice a trajektorie	42
2.8	Hypotéza kontinua	43
2.9	Zákon zachování hmoty	44
2.9.1	Eulerův přístup s použitím konečného objemu	44
2.9.2	Lagrangeův přístup s použitím konečného objemu	45
2.10	Reynoldsovův transportní teorém	47
2.10.1	Rovnice kontinuity jako důsledek Reynoldsova transportního teorému	48
2.10.2	Reynoldsovův transportní teorém pro specifické veličiny	49
2.11	Popis deformace	49
2.11.1	Lagrangeův deformační tenzor	50
2.11.2	Tenzor rychlosti deformace	51
3	Rovnice dynamiky tekutin	53
3.1	Síly a II. Newtonův zákon v tekutině	53
3.2	Tenzor napětí	54
3.2.1	Symetrie tenzoru napětí	56
3.3	Rovnice zákona zachování hybnosti v obecném tvaru	57
3.4	Jednoduché tekutiny	58
3.5	Newtonovské tekutiny a Navierovy-Stokesovy rovnice	58
3.5.1	Objektivní veličiny	59
3.5.2	Newtonovské tekutiny	59
3.5.3	Stokesova hypotéza	61
3.6	Nevazké proudění - Eulerovy rovnice	62
3.7	Nestlačitelné proudění	62
3.8	Rovnice proudění nestlačitelné tekutiny	63
3.9	Zákon zachování energie	64
3.9.1	Zákon zachování celkové energie	64
3.9.2	Zákon zachování vnitřní energie	65
3.9.3	Zákon zachování vnitřní energie pro jednoduché tekutiny	65
3.9.4	Zákon zachování vnitřní energie pro nevazké proudění	65
3.10	Uzavření systému rovnic pro proudění tekutiny	65
3.11	Rovnice potenciálního proudění	66
4	Matematická analýza rovnic proudění	67
4.1	Formulace problému nestlačitelného proudění	67
4.2	Poissonova rovnice pro tlak	67
4.3	Slabé řešení úlohy nestlačitelného proudění	69
4.3.1	Slabá rovnost	69
4.3.2	Speciální funkční prostory	70

4.3.3	Energetická nerovnost a definice slabého řešení	73
4.4	Existence a jednoznačnost slabého řešení	75
4.4.1	Funkcionálně-analytická vložka: Stokesův operátor	75
4.4.2	Galerkinova metoda	77
4.4.3	Limitní přechod	78
4.4.4	Jednoznačnost řešení, nediskutované a otevřené problémy	81
5	Turbulentní proudění a modelování turbulence	83
5.1	Turbulentní proudění	83
5.2	Průměrování veličin	83
5.2.1	Reynoldsovo průměrování	83
5.2.2	Reynoldsova pravidla průměrování	84
5.2.3	Reynoldsovsky průměrované Navierovy–Stokesovy rovnice (RANS)	84
5.2.4	Favreovo průměrování, stlačitelné proudění	85
5.2.5	Favreovsky a Reynoldsovsky průměrované Navierovy–Stokesovy rovnice	85
5.3	Okrajové podmínky	85
5.4	Large Eddy Simulation	85
5.5	Moderní metody modelování turbulence	85
6	Základy termodynamiky tekutin	87
6.1	Vztah mezi vnitřní energií a absolutní teplotou	87
6.2	Stavové rovnice	88
6.2.1	Stavová rovnice ideálního plynu	88
6.2.2	Další tvary stavové rovnice	89
6.3	Přestup tepla	89
6.3.1	Přestup tepla radiací	89
7	Formulace problémů v inženýrské praxi	91
7.1	Okrajové podmínky pro úlohy proudění	91
7.2	Proudění tekutin v porézním prostředí	92
7.3	Bezrozměrná čísla charakterizující proudění	92
7.4	Kvazi-1D proudění	94
7.5	Reagující vícesložkové proudění, modelování hoření	95
7.5.1	Rovnice dynamiky tekutin a bilance energie	97
7.5.2	Modelování turbulence	97
7.5.3	Modelování chemických reakcí	98
7.5.4	Vyhořívání paliva	100
7.5.5	Zbývající konstanty a výrazy	102
7.5.6	Okrajové podmínky	103
7.5.7	Počáteční podmínky	105
7.5.8	Modelování přestupu tepla	105
7.6	Vícefázové proudění, fluidizace	106
7.6.1	Počáteční podmínky	108
7.6.2	Okrajové podmínky	108
7.7	Proudění s volnou hranicí, fázové přechody	109
	Literatura	111

Úvod

Tento text je studijním materiálem k předmětu **Matematické metody v dynamice tekutin** (01MMDY) vyučovanému na FJFI ČVUT v Praze v prvním roce navazujícího magisterského studia studijního programu Matematické inženýrství. V jeho první části je představeno odvození zákonů zachování a obecně úloh pro parciální diferenciální rovnice, které se používají k popisu proudění tekutin, a do značné míry se překrývá s klasickými kurzy mechaniky kontinua, ovšem s důrazem na studium proudění. Druhá část je pak věnována matematické analýze úlohy nestlačitelného proudění. Velká pozornost je věnována vysvětlení všech používaných matematických konceptů. Závěrečná část je zaměřena více prakticky. Obsahuje formulaci úloh a přístupů v konkrétních aplikacích. Ty zahrnují i komplexnější jevy a procesy, v nichž má proudění stěžejní úlohu. Studenti tak získávají přehled o různých přístupech využívaných při matematickém modelování přírodních a průmyslových procesů. Předmět se věnuje následujícím tématům:

1. Formulace a stručné odvození zákonů zachování v tekutině (rovnice kontinuity, Navierovy-Stokesovy rovnice, rovnice energie)
2. Eulerovy rovnice, okrajové podmínky pro úlohy vazkého a nevazkého proudění.
3. Nevířivé proudění, potenciálová rovnice.
4. Základní kvalitativní vlastnosti Navierových-Stokesových rovnic - silná a slabá řešení, otázky existence a jednoznačnosti ve stacionárním a nestacionárním případě.
5. Úlohy proudění, formulace rovnic proudění v nižší dimenzi, okrajové podmínky v nižší dimenzi.
6. Turbulentní proudění a modelování turbulence, Reynoldsovo průměrování NS rovnic a filtrování.
7. Termodynamika tekutin, přestup tepla, radiace.
8. Reagující vícesložkové proudění, modelování hoření.
9. Vícefázové proudění, fázové přechody.
10. Bezrozměrná čísla charakterizující proudění.
11. Úlohy proudění s volnou hranicí.

Matematický aparát

1.1 Vektory

- Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ jako uspořádanou n -tici reálných čísel zapisujeme jako sloupec

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T.$$

Vektory standardní báze prostoru \mathbb{R}^n označíme písmeny $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, přičemž

$$\mathbf{e}_\ell = (\delta_{\ell 1}, \delta_{\ell 2}, \dots, \delta_{\ell n})^T \quad \forall \ell \in \hat{n}.$$

- Pro skalární součin dvou vektorů $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ budeme uvažovat důsledně standardní skalární součin v \mathbb{R}^n a zapisovat pomocí symbolu \cdot nebo maticového násobení

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Platí

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\theta), \tag{1.1}$$

kde θ je úhel, který svírají vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} .

- Euklidovská norma vektoru $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ indukovaná standardním skalárním součinem je

$$\|\mathbf{a}\| = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}|^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Vektorový součin dvou vektorů $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ v \mathbb{R}^3 je antikomutativní operace definovaná vztahem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

Pro velikost (normu) vektorového součinu platí Lagrangeova identita

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

kde na pravé straně vystupuje determinant tzv. Gramovy matice (gramián). Poznamenejme, že vektorový součin lze vyjádřit i pomocí úhlu θ , který vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} svírají

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin(\theta) \mathbf{n},$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor kolmý k rovině dané vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} . Pokud jsou \mathbf{a}, \mathbf{b} lineárně závislé, platí $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

1.2 Koncept tenzorového pole

V dynamice tekutin vystupují objekty, kterým se říká *tenzory*, avšak pro naše účely lze obecný koncept tenzoru značně zjednodušit. Přesto budeme s výhodou využívat zápisy, které se vyskytují v tenzorové algebře, a není proto od věci si uvědomit souvislosti.

1.2.1 Co je to tenzor

Nechť V je vektorový prostor dimenze n nad tělesem T . Tenzor \mathbf{T} typu (p, q) ($p, q \in \mathbb{N}_0$) a řádu $p + q$ je multilineární forma

$$\mathbf{T}: \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{p\text{-krát}} \times \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{q\text{-krát}} \rightarrow \mathbb{R},$$

resp. je možné ho reprezentovat prvkem tenzorového součinu prostorů

$$\mathbf{T} \in \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{p\text{-krát}} \otimes \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{q\text{-krát}}.$$

Například $(1, 0)$ -tenzor je podle obou těchto definic

$$\mathbf{v}: V^* \rightarrow \mathbb{R}, \text{ resp. } \mathbf{v} \in V,$$

tj. jde o vektor. Jednoznačná korespondence mezi oběma definicemi je zajištěna Rieszovou větou. Podobně pro $(0, 1)$ -tenzor máme

$$\underline{\mathbf{w}}: V \rightarrow \mathbb{R}, \text{ resp. } \underline{\mathbf{w}} \in V^*,$$

tj. jde o lineární funkcionál.

Definice \mathbf{T} je nezávislá na volbě báze, v dané bázi \mathcal{X} lze však vyjádřit tenzor $(p + q)$ -rozměrnou tabulkou („maticí“) čísel z T ve tvaru

$$[\mathbf{T}]_{\mathcal{X}} \equiv \hat{\mathbf{T}} = \left(\tau_{i_1 i_2 \dots i_q}^{j_1 j_2 \dots j_p} \right)$$

Tenzor typu (p, q) kde $p = 0$ se nazývá kovariantní, pro $q = 0$ kontravariantní. Je-li $pq > 0$, jde o tenzor smíšeného typu (q -kovariantní a p -kontravariantní).

1.2.2 Einsteinovo sumační pravidlo

Ve výrazu obsahujícím vyjádření tenzorů po složkách, kde se opakuje stejný index dvakrát, se přes tento index sčítá. Například

$$\rho_{klm}^i = \sigma_{k\ell}^{ij} \tau_{jm} := \sum_{j=1}^n \sigma_{k\ell}^{ij} \tau_{jm}. \quad (1.3)$$

Sčítací index (zde j) vystupuje jednou jako horní index a jednou jako dolní index. Je-li například \mathbf{T} tenzor 3. řádu typu (1, 2), jeho aplikací na trojici $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) \in V^* \times V^2$ dostaneme

$$\mathbf{T}(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = \tau_{jk}^i u_i v^j w^k.$$

1.2.3 Tenzorový součin a vnitřní součin

Bud'te \mathbf{S}, \mathbf{T} dva tenzory s reprezentací (v bázi \mathcal{X})

$$\hat{\mathbf{S}} = \left(\sigma_{\ell_1 \ell_2 \dots \ell_s}^{k_1 k_2 \dots k_r} \right), \hat{\mathbf{T}} = \left(\tau_{i_1 i_2 \dots i_q}^{j_1 j_2 \dots j_p} \right).$$

Tenzorovým součinem těchto tenzorů rozumíme tenzor $\mathbf{U} = \mathbf{S} \otimes \mathbf{T}$, pro který platí

$$\hat{\mathbf{U}} = \left(\mu_{\ell_1 \ell_2 \dots \ell_s i_1 i_2 \dots i_q}^{k_1 k_2 \dots k_r j_1 j_2 \dots j_p} \right),$$

kde

$$\mu_{\ell_1 \ell_2 \dots \ell_s i_1 i_2 \dots i_q}^{k_1 k_2 \dots k_r j_1 j_2 \dots j_p} = \sigma_{\ell_1 \ell_2 \dots \ell_s}^{k_1 k_2 \dots k_r} \tau_{i_1 i_2 \dots i_q}^{j_1 j_2 \dots j_p}.$$

Vnitřním (skalárním) součinem tenzorů „doplňkového“ (později od sekce 1.2.8 de facto stejného) typu

$$\hat{\mathbf{S}} = \left(\sigma_{i_1 i_2 \dots i_q}^{j_1 j_2 \dots j_p} \right), \hat{\mathbf{T}} = \left(\tau_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q} \right)$$

je skalár

$$\mathbf{S} \odot \mathbf{T} = \sigma_{i_1 i_2 \dots i_q}^{j_1 j_2 \dots j_p} \tau_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_q}.$$

1.2.4 Kovariance a kontravariance, transformace báze

Nechť $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ jsou báze vektorového prostoru V . Nechť $\mathbf{v} \in V$. Potom

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \underline{\mathbf{x}}^j(\mathbf{v}) \mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^n \underline{\mathbf{y}}^i(\mathbf{v}) \mathbf{y}_i,$$

kde $\underline{\mathbf{x}}^i, \underline{\mathbf{y}}^i$ označují i -té souřadnicové funkcionály v bázích \mathcal{X}, \mathcal{Y} ¹. Dále označme sloupcové vektory souřadnic vektoru \mathbf{v} v bázích \mathcal{X} , resp. \mathcal{Y} jako $[\mathbf{v}]_{\mathcal{X}}, [\mathbf{v}]_{\mathcal{Y}}$. i -tou souřadnicí vektoru \mathbf{v} v bázi \mathcal{Y} lze získat prostřednictvím souřadnic v bázi \mathcal{X} dle

$$\underline{\mathbf{y}}^i(\mathbf{v}) = \underline{\mathbf{y}}^i \left(\sum_{j=1}^n \underline{\mathbf{x}}^j(\mathbf{v}) \mathbf{x}_j \right) = \sum_{j=1}^n \underline{\mathbf{y}}^i(\mathbf{x}_j) \underline{\mathbf{x}}^j(\mathbf{v}),$$

neboli

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}} \hat{\mathbf{P}}^{\mathcal{Y}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{X}} = \left({}^{\mathcal{X}} \hat{\mathbf{P}}^{\mathcal{Y}} \right)^{-1} [\mathbf{v}]_{\mathcal{X}}, \quad (1.4)$$

kde

$${}^{\mathcal{X}} \hat{\mathbf{P}}^{\mathcal{Y}} = \left(\underline{\mathbf{y}}^i(\mathbf{x}_j) \right) = \left([\mathbf{x}_1]_{\mathcal{Y}} \dots [\mathbf{x}_n]_{\mathcal{Y}} \right) \quad (1.5)$$

¹Indexy u souřadnicových funkcionálů píšeme nahoře, stejně jako složky vektoru ve standardní bázi.

je matice přechodu od báze \mathcal{X} k bázi \mathcal{Y} . Pro matici přechodu od \mathcal{Y} k \mathcal{X} analogicky platí

$${}^{\mathcal{Y}}\hat{\mathbf{P}}^{\mathcal{X}} = \left(\mathbf{x}^i(\mathbf{y}_j) \right) = ([\mathbf{y}_1]_{\mathcal{X}} \cdots [\mathbf{y}_n]_{\mathcal{X}}),$$

a ze vztahu

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}\hat{\mathbf{P}}^{\mathcal{Y}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}\hat{\mathbf{P}}^{\mathcal{Y}} {}^{\mathcal{Y}}\hat{\mathbf{P}}^{\mathcal{X}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{Y}}$$

je zřejmé, že ${}^{\mathcal{Y}}\hat{\mathbf{P}}^{\mathcal{X}} = ({}^{\mathcal{X}}\hat{\mathbf{P}}^{\mathcal{Y}})^{-1}$.

Nechť konkrétně $V = \mathbb{R}^n$ a označme $\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n)$, $\hat{\mathbf{Y}} = (\mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_n)$. Necht' mezi bázemi platí transformační vztah

$$\hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{A}}, \quad (1.6)$$

kde $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je regulární matice. Potom pro vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\hat{\mathbf{Y}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{Y}} = \hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{A}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{Y}} = \hat{\mathbf{X}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{X}},$$

z čehož

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{Y}} = \hat{\mathbf{A}}^{-1}[\mathbf{v}]_{\mathcal{X}}. \quad (1.7)$$

Srovnáním (1.4) a (1.7) vidíme, že platí

$${}^{\mathcal{X}}\hat{\mathbf{P}}^{\mathcal{Y}} = \hat{\mathbf{A}}^{-1},$$

a tedy též ${}^{\mathcal{Y}}\hat{\mathbf{P}}^{\mathcal{X}} = \hat{\mathbf{A}}$. Při přechodu od vyjádření v bázi \mathcal{X} k vyjádření v bázi \mathcal{Y} se souřadnice vektoru transformují inverzně (*kontravariantně*, „proti“) k transformaci báze.

Dále necht' $\underline{\mathbf{w}} \in V^*$. Potom

$$\underline{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = \underline{\mathbf{w}}\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{x}^j(\mathbf{v}) \mathbf{x}_j\right) = \sum_{j=1}^n \mathbf{x}^j(\mathbf{v}) \underline{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j) = \left(\sum_{j=1}^n \underline{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j) \mathbf{x}^j\right)(\mathbf{v}),$$

tj. j -tá souřadnice $\underline{\mathbf{w}}$ v duální bázi $\mathcal{X}^* = (\underline{\mathbf{x}}^1, \dots, \underline{\mathbf{x}}^n)$ je rovna $\underline{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j)$. Pro souřadnice v bázi \mathcal{Y}^* pak platí

$$\underline{\mathbf{w}}(\mathbf{y}_i) = \underline{\mathbf{w}}\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{x}^j(\mathbf{y}_i) \mathbf{x}_j\right) = \sum_{j=1}^n \mathbf{x}^j(\mathbf{y}_i) \underline{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j),$$

neboli

$$[\underline{\mathbf{w}}]_{\mathcal{Y}^*} = \left({}^{\mathcal{Y}}\hat{\mathbf{P}}^{\mathcal{X}}\right)^{\top} [\underline{\mathbf{w}}]_{\mathcal{X}^*},$$

resp. v případě $V = \mathbb{R}^n$ s bázemi svázanými (1.6) dostáváme

$$\begin{aligned} [\underline{\mathbf{w}}]_{\mathcal{Y}^*} &= \hat{\mathbf{A}}^{\top} [\underline{\mathbf{w}}]_{\mathcal{X}^*}, \\ [\underline{\mathbf{w}}]_{\mathcal{Y}^*}^{\top} &= [\underline{\mathbf{w}}]_{\mathcal{X}^*}^{\top} \hat{\mathbf{A}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Při přechodu od vyjádření v bázi \mathcal{X}^* k vyjádření v bázi \mathcal{Y}^* se tedy souřadnice lineárního funkcionálu transformují stejně (kovariantně) jako báze. Lineární funkcionály se proto také nazývají kovariantní vektory nebo *kovektory*.

1.2.5 Kovektory jako „šipky“

V prostoru V konečné dimenze se skalárním součinem (\cdot, \cdot) má dle Rieszovy věty 1.7.2² každý prvek $\underline{\mathbf{w}} \in V^*$ jednoznačného reprezentanta $\mathbf{u} \in V$ tak, že

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \underline{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Konkrétně každé duální bázi $\mathcal{X}^* = (\underline{\mathbf{x}}^1, \dots, \underline{\mathbf{x}}^n)$ přísluší lineárně nezávislý soubor reprezentantů $\mathcal{X}^{**} = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n)$, který je tzv. *kovariantní* bázi V .

²Věta je formulována pro Hilbertovy prostory libovolné dimenze. Lze ji snadno dokázat pro prostory konečné dimenze se skalárním součinem, které jsou vždy úplné (Definice 9), a tedy Hilbertovy.

1.2.6 Kontravariantní a kovariantní vektory ve fyzice

V dalším textu se budeme snažit důsledně používat Einsteinovo sumační pravidlo (1.3), jestliže bude zřejmé, přes které souřadnice probíhá sumace.

- vektor: pozice, rychlost, hybnost (jednotky mají délkovou jednotku v čitateli)
- kovektor: gradient funkce (jednotky mají délkovou jednotku ve jmenovateli)
 - ze vztahu $\langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle = df(\mathbf{x}) \mathbf{v}$ je vidět, že gradient má smysl lineárního funkcionálu

1.2.7 Ortogonální transformace tenzorů

Předpokládejme ortonormální bázi $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ prostoru \mathbb{R}^3 . V tom případě je pro libovolné $\mathbf{v} \in V$ j -tá souřadnice vektoru \mathbf{v} v bázi \mathcal{X} je dána vztahem

$$\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{v} = \mathbf{x}_j \cdot \left(\underline{\mathbf{x}}^i(\mathbf{v}) \mathbf{x}_i \right) = \underline{\mathbf{x}}^i(\mathbf{v}) (\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_i) = \underline{\mathbf{x}}^j(\mathbf{v}),$$

Reprezentantem kovariantního vektoru $\underline{\mathbf{x}}^j$ dle Rieszovy věty je tedy vektor \mathbf{x}_j a kovariantní báze \mathcal{X}^{**} prostoru V splývá s původní (kontravariantní) bází \mathcal{X} . Dále necht' $\hat{\mathbf{Q}} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ je ortogonální transformační matice, která z definice splňuje

$$\hat{\mathbf{Q}}^T = \hat{\mathbf{Q}}^{-1}, \quad (1.9)$$

tj. kovariantní i kontravariantní vektory se dle (1.7), resp. (1.8) transformují stejně. Protože se budeme držet ortonormální (a pokud možno standardní) báze \mathbb{R}^3 , nebudeme dále pojmy kovariantní a kontravariantní vektor, resp. tenzor, rozlišovat, a indexy bude psát pouze dole.

Tenzor \mathbf{T} řádu s se transformací $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ z báze \mathcal{X} do báze \mathcal{Y} transformuje jako

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}} &= [\mathbf{T}]_{\mathcal{X}} = (\tau_{i_1 \dots i_s}), \\ \hat{\mathbf{T}}' &= [\mathbf{T}]_{\mathcal{Y}} = (\tau'_{i_1 \dots i_s}), \end{aligned} \quad (1.10)$$

kde

$$\tau'_{i_1 \dots i_s} = q_{i_1 j_1} \cdots q_{i_s j_s} \tau_{j_1 \dots j_s}. \quad (1.11)$$

Inverzní transformace je vzhledem k (1.9)

$$\tau_{i_1 \dots i_s} = q_{j_1 i_1} \cdots q_{j_s i_s} \tau'_{j_1 \dots j_s}. \quad (1.12)$$

Pro tenzory řádu 2 pak máme

$$\tau'_{ij} = q_{iI} q_{jJ} \tau_{IJ}, \text{ tj. } \mathbf{T}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{T} \mathbf{Q}. \quad (1.13)$$

1.2.8 Tenzory v dynamice tekutin

V našem výkladu budeme uvažovat pouze vektory a tenzory druhého řádu. Označení tenzoru \mathbf{T} a jeho reprezentaci ve standardní bázi $\hat{\mathbf{T}}$ ztotožníme, tj. v dalším textu již nebudeme psát stříšky nad symboly, které představují matice. Budeme-li pracovat s reprezentací tenzoru \mathbf{T} v bázi transformované ortogonální transformací \mathbf{Q} , označíme ji jako \mathbf{T}' , což odpovídá označení v (1.10). Skalární, vektorové, a tenzorové fyzikální veličiny budou závislé na čase a na prostorových souřadnicích, a proto těmto veličinám říkáme skalární, resp. vektorové, resp. tenzorové *pole*.

Pro tenzory 2. řádu s reprezentací ve standardní bázi definujeme:

- tenzor *transponovaný* k tenzoru $\mathbf{T} = (\tau_{ij})$ je tenzor $\mathbf{T}^T = (\tau_{ji})$.

- tenzor \mathbf{E} je *symetrický* $\iff \mathbf{E} = \mathbf{E}^T$,
- tenzor \mathbf{W} je *antisymetrický (skew)* $\iff \mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$

a pro jednotnost zápisu některých vztahů ještě

- vnitřní (skalární) součin tenzorů

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{S} \odot \mathbf{T} = \sigma_{ij} \tau_{ij}$$

- vnitřní (skalární) *součin tenzoru a vektoru*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = \hat{\mathbf{T}}\mathbf{v} = (\tau_{ij} v_j), \quad (1.14)$$

tj. jde o násobení sloupcového vektoru maticí zleva (ale díky tomuto zápisu a díky tomu, že ho budeme obvykle používat se symetrickými tenzory, není nutné rozlišovat sloupcové a řádkové vektory)

Platí následující zřejmá pozorování

- Každý tenzor \mathbf{T} lze rozložit na součet symetrického a antisymetrického tenzoru jako

$$\mathbf{T} = \mathbf{E} + \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T). \quad (1.15)$$

- Pokud $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$ a $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$, tak $\mathbf{E} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0}$.
- V \mathbb{R}^3 ke každému antisymetrickému tenzoru \mathbf{W} přísluší vektor \mathbf{w} tak, že

$$(\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3) (\mathbf{W} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{v}). \quad (1.16)$$

Skutečně, platí

$$\mathbf{w} = (w_i) \iff \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

1.2.9 Užitečné technické nástroje a vztahy

Budeme používat standardní symboly

- Kroneckerův symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j, \end{cases}$$

- a Levi-Civitův symbol

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{když } (i, j, k) \text{ je sudá permutace } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{když } (i, j, k) \text{ je lichá permutace } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pomocí symbolu ε_{ijk} lze snadno vyjádřit

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

a determinant matice $\mathbf{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ jako

$$\det \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} \alpha_{1i} \alpha_{2j} \alpha_{3k} = \frac{1}{3!} \varepsilon_{IJK} \varepsilon_{ijk} \alpha_{Ii} \alpha_{Jj} \alpha_{Kk}, \quad (1.18)$$

kde výraz zcela vpravo sčítá 6 (stejných) hodnot determinantu \mathbf{A} získaných výpočtem determinantů matic s permutovanými řádky a vynásobením správným znaménkem.

Poznámka 1. Dle Cramerova pravidla platí pro regulární matici $\mathbf{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \iff x_i = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \Delta_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

kde Δ_i je determinant matice, která vznikla z \mathbf{A} nahrazením i -tého sloupce vektorem \mathbf{b} . Aplikací Cramerova pravidla na rovnost $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ kde $\mathbf{A}^{-1} = (\tilde{\alpha}_{ij})$ dostáváme

$$\tilde{\alpha}_{ij} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \Delta_{ji},$$

kde Δ_{ji} je determinant matice \mathbf{A}_{ji} , která vznikla z \mathbf{A} nahrazením i -tého sloupce j -tým sloupcem jednotkové matice \mathbf{I} . Δ_{ij} (ne Δ_{ji} !) se nazývá algebraický doplněk (kofaktor) prvku α_{ij} , protože vystupuje v rozvoji determinantu \mathbf{A} podle i -tého řádku, resp. j -tého sloupce). Opět jen pro $n = 3$ platí

$$\Delta_{Ii} = \frac{1}{2} \varepsilon_{IJK} \varepsilon_{ijk} \alpha_{Jj} \alpha_{Kk}, \quad (1.19)$$

což v sobě zahrnuje dva různé způsoby výpočtu Δ_{Ii} rozvojem determinantu matice \mathbf{A}_{Ii} podle I -tého řádku a i -tého sloupce.

1.2.10 Invarianty tenzoru

Invariantem tenzoru $\mathbf{T} = (\tau_{ij})$ rozumíme skalární funkci $\lambda(\mathbf{T})$, jejíž hodnota je nezávislá na volbě (ortonormální) báze prostoru $V (= \mathbb{R}^3)$. Pro libovolnou ortogonální matici $\mathbf{Q} = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tedy platí

$$\lambda\left(\left(\tau'_{ij}\right)\right) = \lambda\left(\left(q_{ik} q_{j\ell} \tau_{k\ell}\right)\right) = \lambda\left(\left(\tau_{ij}\right)\right).$$

- Například vnitřní (skalární) součin tenzorů $\mathbf{S} = (\sigma_{ij})$ a $\mathbf{T} = (\tau_{ij})$ je invariant. Platí totiž

$$\sigma'_{ij} \tau'_{ij} = q_{ir} q_{js} \sigma_{rs} q_{ik} q_{j\ell} \tau_{k\ell} = \underbrace{q_{ir} q_{ik}}_{\delta_{rk}} \underbrace{q_{js} q_{j\ell}}_{\delta_{s\ell}} \sigma_{rs} \tau_{k\ell} = \delta_{rk} \delta_{s\ell} \sigma_{rs} \tau_{k\ell} = \sigma_{k\ell} \tau_{k\ell} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}.$$

- Speciálně pro $\mathbf{S} = \mathbf{I}$ dostáváme tzv. stopu tenzoru \mathbf{T}

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{T} = \delta_{ij} \tau_{ij} = \tau_{ii} =: \text{Tr} \mathbf{T}.$$

Věta 2. (Cayleyova-Hamiltonova) Každá čtvercová matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je kořenem svého charakteristického polynomu

$$l(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}).$$

Z faktu, že

$$\det(\mathbf{BC}) = \det \mathbf{B} \det \mathbf{C}$$

pro libovolné $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ plyne, že charakteristický polynom zjevně nezávisí na volbě báze, a jeho n koeficientů se nazývá *hlavními invarianty (principal invariants)* matice (tenzoru) \mathbf{A} . V \mathbb{R}^3 jsou těmito hlavními invarianty [Ari62, Mar11]

$${}_A I_1 = \text{Tr} \mathbf{A},$$

$${}_A I_2 = \frac{1}{2} \left((\text{Tr} \mathbf{A})^2 - \text{Tr}(\mathbf{A}^2) \right),$$

$${}_A I_3 = \det \mathbf{A}.$$

Tenzor \mathbf{A} může mít (a má) i další invarianty, ale z každého souboru invariantů lze vybrat nejvýše tři „nezávislé“ (například tyto tři hlavní), pomocí nichž lze již ostatní jednoznačně dopočítat.

1.2.11 Izotropní tenzory a tenzorové funkce

Tenzorová funkce $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ se nazývá *izotropní*, jestliže pro každou ortogonální transformaci \mathbf{Q} a každý argument \mathbf{T} platí

$$\mathbf{F}'(\mathbf{T}) = \mathbf{F}(\mathbf{T}'),$$

tj. dle (1.13)

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{F}(\mathbf{T}) \mathbf{Q} \stackrel{!}{=} \mathbf{F}(\mathbf{Q}^T \mathbf{T} \mathbf{Q}). \quad (1.20)$$

Po složkách (1.20) znamená dle transformačního vztahu (1.11)

$$\mathbf{F}'((\tau_{IJ}))_{ij} = q_{ir} q_{js} \mathbf{F}((\tau_{IJ}))_{rs} \stackrel{!}{=} \mathbf{F}((q_{Ir} q_{Js} \tau_{rs}))_{ij} = \mathbf{F}((\tau'_{IJ}))_{ij}, \quad (1.21)$$

tj. zobrazení \mathbf{F} provádí nad složkami tenzoru \mathbf{T} stejné operace nezávislé na volbě báze. Pro konkrétní volbu báze je tedy výsledkem vždy stejný tenzor.

Předpokládejme nyní lineární funkci $\mathbf{F}(\mathbf{T})_{ij} = \alpha_{ijk\ell} \tau_{k\ell} + \beta_{ij}$, kde $\mathbf{A} = (\alpha_{ijk\ell})$ je tenzor 4. řádu a \mathbf{B} je tenzor 2. řádu. Dosazením do (1.21) získáváme na levé straně s použitím inverzního transformačního vztahu (1.12)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'((\tau_{IJ}))_{ij} &= q_{ir} q_{js} (\alpha_{rsk\ell} \tau_{k\ell} + \beta_{rs}) = q_{ir} q_{js} \underbrace{q_{Rr} q_{Ss} q_{Kk} q_{L\ell}}_{\alpha_{rsk\ell}} \alpha'_{RSKL} \underbrace{q_{Mk} q_{N\ell}}_{\tau_{k\ell}} \tau'_{MN} + \beta'_{ij} \\ &= \delta_{iR} \delta_{jS} \delta_{KM} \delta_{LN} \alpha'_{RSKL} \tau'_{MN} + \beta'_{ij} = \alpha'_{ijKL} \tau'_{KL} + \beta'_{ij} = \alpha'_{ijk\ell} \tau'_{k\ell} + \beta'_{ij}. \end{aligned}$$

Na pravé straně pak máme

$$\mathbf{F}((\tau'_{IJ}))_{ij} = \alpha_{ijk\ell} \tau'_{k\ell} + \beta_{ij}.$$

Srovnáním vychází

$$\begin{aligned} \alpha'_{ijk\ell} &= \alpha_{ijk\ell}, \\ \beta'_{ij} &= \beta_{ij}. \end{aligned}$$

To znamená, že všechny složky tenzorů \mathbf{A}, \mathbf{B} musejí být invarianty. Říkáme, že tenzory \mathbf{A}, \mathbf{B} jsou *izotropní* (tj. to je něco jiného než izotropie tenzorové funkce). Izotropní tenzory jsou například

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= (\delta_{ij}), \\ &(\varepsilon_{ijk}), \\ \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} &= (\delta_{ij} \delta_{k\ell}). \end{aligned}$$

Lze ukázat, že obecný izotropní tenzor musí mít tvar:

- $a(\delta_{ij})$ pro tenzor řádu 2,
- $b(\varepsilon_{ijk})$ pro tenzor řádu 3,
- $a(\delta_{ij} \delta_{k\ell}) + b(\delta_{ik} \delta_{j\ell}) + c(\delta_{i\ell} \delta_{jk})$ pro tenzor řádu 4,

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1.3 Asymptotické chování funkcí

Budeme používat Landauovy symboly o, O s následujícím významem. Necht' $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Potom píšeme

$$f(\mathbf{x}) = O(g(\mathbf{x})) \iff (\exists \delta > 0) (\exists K > 0) (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) (|\mathbf{x}| < \delta \implies |f(\mathbf{x})| \leq K |g(\mathbf{x})|),$$

$$f(\mathbf{x}) = o(g(\mathbf{x})) \iff \lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = 0.$$

Pro vektorové funkce $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ navíc

$$f(\mathbf{x}) = o(g(\mathbf{x})) \iff (\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}) \left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{f_i(\mathbf{x})}{g_i(\mathbf{x})} = 0 \right).$$

1.4 Diferenciální počet funkcí více proměnných

- Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je vektor skalárních funkcí $f_\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T.$$

- *Derivaci*, resp. totální diferenciál funkce více proměnných $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ v bodě \mathbf{x}_0 označujeme $f'(\mathbf{x}_0)$, resp. $\frac{df}{dx}$.
- *Derivace* funkce více proměnných $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ podle vektoru \mathbf{v} v bodě \mathbf{x}_0 je vektor

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0))$$

a pokud existuje totální derivace $f'(\mathbf{x}_0)$, platí

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}.$$

Pokud \mathbf{v} je jednotkový vektor, nazýváme derivaci $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)$ derivací funkce f ve směru \mathbf{v} v bodě \mathbf{x}_0 .

Poznámka 3. Definici úplné derivace lze omezit na určitou podmnožinu proměnných. Necht' je dána funkce $f : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = f(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$ kde $\mathbf{x}^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbf{x}^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_2}$. Potom úplnou derivací funkce f vzhledem k vektoru proměnných $\mathbf{x}^{(1)}$ v bodě $(\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)})$ rozumíme lineární zobrazení $\frac{df}{d\mathbf{x}^{(1)}}(\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)}) : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ takové, že

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \left(f(\mathbf{x}_0^{(1)} + \mathbf{h}, \mathbf{x}_0^{(2)}) - f(\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)}) - \frac{df}{d\mathbf{x}^{(1)}}(\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)})\mathbf{h} \right) = \mathbf{0}. \quad (1.22)$$

Tuto definici lze přímočarým způsobem rozšířit na libovolnou permutaci složek vektorů $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ v argumentu funkce f . Zde je potřeba poznamenat dva různé přístupy při značení totální derivace podle jedné sady proměnných. Vzhledem k tomu, že vybranou sadu proměnných $\mathbf{x}^{(1)}$ může tvořit i jedna složka, splývá zápis $\frac{df}{d\mathbf{x}^{(1)}}(\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)})$ s parciální derivací funkce f podle $\mathbf{x}^{(1)}$. Proto je možné značit totální derivaci podle sady proměnných $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)})^T$ též symbolem

$$\frac{\partial f}{\partial (x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)})}(\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)}).$$

- *Parciální derivace* funkce f v bodě \mathbf{x}_0 jsou derivace ve směru vektorů standardní báze a označují se

$$\frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\mathbf{x}_0) = \partial_{x_\ell} f(\mathbf{x}_0) = \partial_\ell f(\mathbf{x}_0) := \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_\ell}(\mathbf{x}_0). \quad (1.23)$$

- Matici lineárního zobrazení $f'(\mathbf{x}_0)$ ve standardních bázích prostorů \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m nazýváme Jacobiho maticí a značíme

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(\mathbf{x}_0) & \partial_2 f(\mathbf{x}_0) & \dots & \partial_n f(\mathbf{x}_0) \\ \partial_1 f_1(\mathbf{x}_0) & \partial_2 f_1(\mathbf{x}_0) & \dots & \partial_n f_1(\mathbf{x}_0) \\ \partial_1 f_2(\mathbf{x}_0) & \partial_2 f_2(\mathbf{x}_0) & \dots & \partial_n f_2(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(\mathbf{x}_0) & \dots & \dots & \partial_n f_m(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

- Derivace složené funkce $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, kde $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ a $f : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$, je za předpokladu existence totálních derivací $f'(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0))$ a $g'(\mathbf{x}_0)$ dána výrazem

$$(f \circ g)'(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) g'(\mathbf{x}_0), \quad (1.24)$$

kde na pravé straně (1.24) jde o složení dvou lineárních zobrazení. Pro Jacobiho matici složeného zobrazení platí

$$\mathbf{J}_{f \circ g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{J}_f(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) \mathbf{J}_g(\mathbf{x}_0).$$

Z definice násobení matic plyne pravidlo pro výpočet parciální derivace i -té složky funkce $f \circ g$ podle ℓ -té proměnné

$$\mathbf{J}_{f \circ g}(\mathbf{x}_0)_{i\ell} = \frac{\partial (f \circ g)_i}{\partial x_\ell}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^s \frac{\partial f_i(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0))}{\partial y_k} \frac{\partial g_k(\mathbf{x}_0)}{\partial x_\ell}, \quad (1.25)$$

kde y_k označují složky argumentu funkce $f = f(\mathbf{y})$.

- Pro zápis vícerozměrné derivace se běžně zavádí operátor nabla ∇ , který se dá reprezentovat jako vektor parciálních derivací $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)^\top = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^\top$. Derivaci skalární funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pak můžeme reprezentovat gradientem, neboť platí

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{x}_0) \mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = (\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f)^\top \cdot \mathbf{v}.$$

- Parciální derivace druhého řádu (a vyšších řádů) budeme zkráceně označovat dle schématu

$$\partial_{ij} f(\mathbf{x}_0) = \partial_j \partial_i f(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0}.$$

1.5 Integrální počet funkcí více proměnných

- Integrál skalární funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ přes *měřitelnou*³ množinu $V \subset \mathbb{R}^n$ značíme

$$\int_V f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) = \int_V f(\mathbf{x}) dV = \int_V f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

kde $\mu = \mu_n$ označuje n -rozměrnou Lebesgueovu míru zavedenou na \mathbb{R}^n . Množinu všech (Lebesgueovsky) integrovatelných funkcí na množině V značíme $L(V)$, viz Definice 31.

³Pojmy *měřitelná funkce* a *měřitelná množina* v tomto kurzu nezavádíme. Tyto pojmy vystupují v teorii Lebesgueova integrálu, kterou lze budovat klasickým způsobem na základě teorie míry (jako v MAB4) nebo alternativní tzv. Daniellovou konstrukcí (vyloženu v MAA4), která teorii míry a priori nepotřebuje a její pojmy zpětně definuje s využitím Daniellova integrálu a charakteristických funkcí. Pro naše potřeby bude každá představitelná množina měřitelná, stejně jako každá představitelná funkce definovaná na takové množině. Předpoklad měřitelnosti však pro korektnost uvádíme ve znění vět, které budeme pro další výklad potřebovat.

- Řekneme, že zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je *regulární* na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$, jestliže prvky matice \mathbf{J}_φ jsou spojité na M a pro každé $\mathbf{x} \in M$ platí $\det \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{x}) \neq 0$.

Věta. (o substituci ve vícerozměrném integrálu) *Nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení definované na otevřené množině A . Potom pro každou měřitelnou podmnožinu $V \subset A$ platí*

$$\int_V f(\varphi(\xi)) |\det \mathbf{J}_\varphi(\xi)| d\xi = \int_{\varphi(V)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

resp. pro libovolnou měřitelnou $W \subset \varphi(A)$ máme

$$\int_W f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\varphi^{-1}(W)} f(\varphi(\xi)) |\det \mathbf{J}_\varphi(\xi)| d\xi$$

Věta. (Fubini) *Nechť $n, m \in \mathbb{N}$, $V \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Uvažujme funkci $f \in L(V)$, $f = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})^T$ kde $\mathbf{x}^{(1)} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^{(2)} \in \mathbb{R}^m$. Označme*

$$A_{\mathbf{x}^{(1)}} = \{\mathbf{x}^{(2)} \in \mathbb{R}^m \mid (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) \in V\},$$

$$B = \{\mathbf{x}^{(1)} \in \mathbb{R}^n \mid A_{\mathbf{x}^{(1)}} \neq \emptyset\}.$$

Potom platí

$$\int_V f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_B \left(\int_{A_{\mathbf{x}^{(1)}}} f(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) d\mathbf{x}^{(2)} \right) d\mathbf{x}^{(1)} =: \int_B d\mathbf{x}^{(1)} \int_{A_{\mathbf{x}^{(1)}}} d\mathbf{x}^{(2)} f(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}).$$

1.5.1 Záměna derivace a integrálu

Věta 4. (o derivaci integrálu podle parametru) *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a V je měřitelná množina. Nechť $f : V \times I \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje následující předpoklady:*

1. Integrál $F(\alpha) := \int_V f(\mathbf{x}, \alpha) d\mathbf{x}$ konverguje (je konečný) alespoň pro jedno $\alpha \in I$, tj. zkráceně

$$(\exists \alpha \in I) (f(\cdot, \alpha) \in L(V)).$$

2. Pro každé $\alpha \in I$ je funkce $f(\cdot, \alpha)$ měřitelná na V .
3. Funkce $f(\mathbf{x}, \cdot)$ je diferencovatelná na I pro skoro všechna⁴ $\mathbf{x} \in V$.
4. Existuje tzv. **integrabilní majoranta** k funkci $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, tj. existuje $g \in L(V)$ tak, že pro skoro všechna $\mathbf{x} \in V$ a pro všechna $\alpha \in I$ platí

$$\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}, \alpha)}{\partial \alpha} \right| \leq g(\mathbf{x}).$$

Potom pro všechna $\alpha \in I$ integrál $F(\alpha)$ konverguje a platí

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int_V \frac{\partial f(\mathbf{x}, \alpha)}{\partial \alpha} d\mathbf{x}.$$

⁴Daný výrok $A(\mathbf{x})$ platí skoro všude na V , jestliže existuje množina $N \subset V$ tak, že její míra $\mu(N) = 0$ a výrok $A(\mathbf{x})$ platí $\forall \mathbf{x} \in V \setminus N$.

1.6 Integrace po varietách

1.6.1 Křivkový integrál

Definice. Křivkou v \mathbb{R}^n rozumíme libovolnou spojitou funkci $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Je-li φ prosté na (a, b) , křivka φ se nazývá *jednoduchá*. Platí-li $\varphi(a) = \varphi(b)$, jde o křivku *uzavřenou*, v opačném případě se jedná o křivku *otevřenou*. Množinu $\varphi = \langle \varphi \rangle = \varphi([a, b])$ nazýváme *dráhou* nebo *geometrickým obrazem křivky* v \mathbb{R}^n . Zobrazení φ se nazývá parametrizací dráhy φ .

Definice. Necht' $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je dráha a necht' $(\forall t \in (a, b)) (\exists \dot{\varphi}(t))$. Křivkovým (dráhovým) integrálem prvního druhu funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ po dráze φ rozumíme integrál

$$\int_{\varphi} f(\mathbf{x}) \, dl = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\dot{\varphi}(t)\| \, dt. \quad (1.26)$$

Definice. Křivkovým (dráhovým) integrálem druhého druhu vektorového pole (funkce) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ rozumíme integrál

$$\int_{\varphi} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \, dt = \int_a^b f_i(\varphi(t)) \dot{\varphi}_i(t) \, dt, \quad (1.27)$$

kde orientace dráhy je dána její parametrizací.

Poznámka. Složky vektoru $\dot{\varphi}_i(t) \, dt$ odpovídají složkám posunutí bodu $\mathbf{x} = \varphi(t)$ po dráze ve směrech souřadných os, tj. vektorů standardní báze $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Proto se integrál (1.27) někdy zapisuje též jako

$$\int_{\varphi} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\varphi} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\varphi} f_k(\mathbf{x}) \, dx_k. \quad (1.28)$$

Poznámka. Buď φ dráha s parametrizací $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dráhou *opačně orientovanou* ke dráze φ rozumíme dráhu $-\varphi$ danou parametrizací

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(a + b - t).$$

Pro křivkový integrál druhého druhu platí

$$\int_{-\varphi} \mathbf{f} \, d\mathbf{l} = - \int_{\varphi} \mathbf{f} \, d\mathbf{l}.$$

1.6.2 Plošný integrál

Ačkoliv je možné s jistou mírou abstrakce zavést obecně integraci po libovolných m -rozměrných varietách v n -rozměrném prostoru ($m < n$), soustředíme se při definici plošných integrálů pouze na plochy v \mathbb{R}^3 .

Definice. Plošnou parametrizací nazýváme každé zobrazení $\mathbf{S} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ kde $M \subset \mathbb{R}^2$ je oblast. Množinu

$$S = \langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{S}(M)$$

nazýváme *plochou* nebo geometrickým obrazem zobrazení \mathbf{S} . Jestliže zobrazení \mathbf{S} je prosté, nazýváme plochu S jednoduchou. Jestliže navíc $\mathbf{S} \in C^1(M)$ a platí

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(u, v) \neq \mathbf{0} \quad \forall (u, v) \in M,$$

hovoříme o jednoduché regulární ploše.

Poznámka. Jednoduchá regulární plocha má v každém bodě $\mathbf{x} \in S$ jednoznačně definovaný normálový vektor, který je roven

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(u, v) \right\|},$$

kde $(u, v) = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x})$.

Definice. Plošným integrálem prvního druhu skalární funkce $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ přes jednoduchou regulární plochu S rozumíme integrál

$$\int_S f(\mathbf{x}) dS = \int_M f(\mathbf{S}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(u, v) \right\| d(u, v). \quad (1.29)$$

Poznámka. Výraz $dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(u, v) \right\| d(u, v)$ má smysl obsahu infinitesimálního rovnoběžníku daného vektory $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} du$ a $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} dv$. Obsah plochy S je tedy dán plošným integrálem z jednotky

$$\mu_2(S) = \int_S dS.$$

Poznámka. Pro výpočet dS lze využít platnost Lagrangeovy identity (1.2).

Definice. Plošným integrálem druhého druhu vektorového pole $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ přes jednoduchou hladkou regulární plochu S rozumíme integrál

$$\int_S \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_M f(\mathbf{S}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(u, v) \right) d(u, v). \quad (1.30)$$

Poznámka. Platí

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(u, v) d(u, v),$$

kde \mathbf{n} je jednotkový normálový vektor k ploše S v bodě $\mathbf{S}(u, v)$. V závislosti na parametrizaci může směřovat na jednu nebo druhou stranu plochy, na čemž závisí znaménko integrálu. V následujících kapitolách budeme uvažovat zpravidla uzavřené plochy tvořící hranice souvislých množin $V \subset \mathbb{R}^3$, tj. $S = \partial V$. Vektor \mathbf{n} bude směřovat vždy ven z objemu V . Za těchto předpokladů je znaménko plošného integrálu jednoznačně určeno.

Poznámka. Integrandem plošného integrálu druhého druhu je tedy projekce vektorového pole \mathbf{f} do směru normály k ploše S .

Poznámka. Formální zápis integrálu 2. druhu je také

$$\int_S \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S f_1(\mathbf{x}) dx_2 dx_3 + f_2(\mathbf{x}) dx_1 dx_3 + f_3(\mathbf{x}) dx_1 dx_2.$$

1.6.3 Greenova formule

Následující věty jsou zobecněním metody per partes pro určitý integrál.

Věta 5. (Greenova formule) Necht' $n \in \{2, 3\}$, $V \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $f, g \in C^1(V)$ a $f, g \in C(\partial V)$. Potom platí

$$\int_V \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_V f(\mathbf{x}) \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_k} d\mathbf{x} + \int_{\partial V} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) n_k dS$$

kde n_k je k -tá složka vektoru vnější normály k hranici oblasti V .

Věta 6. (Greenova věta). *Nechť $S \subset \mathbb{R}^2$ je oblast a ∂S je uzavřená, po částech hladká dráha. Necht' $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je vektorové pole spojitě diferencovatelné na S a spojitě na ∂S . Potom platí*

$$\int_{\partial S} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) d\mathbf{x},$$

přičemž křivka ∂S je uvažována jako kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček).

Věta 7. (Gaussova-Ostrogradského věta) *Nechť $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ je vektorové pole, $V \subset \mathbb{R}^3$ je oblast. Potom platí*

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S},$$

kde $d\mathbf{S}$ směřuje ven z objemu V .

1.7 Pojmy z funkcionální analýzy

Zde zejména shrneme definice funkčních prostorů a připomeneme s nimi spojená tvrzení využívaná v teorii parciálních diferenciálních rovnic [Eva98], která se uplatní v částech 4.3 a 4.4. V těchto částech budeme naše teoretické znalosti dále rozšiřovat, ale pouze v úzkém kontextu studovaného problému. Vhodnými zdroji pro ucelenější studium funkcionální analýzy a teorie funkčních prostorů jsou např. [Con90, BEH08, KJF77, Maz85].

1.7.1 Elementární pojmy

Definice 8. Řekneme, že posloupnost vektorů $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ v metrickém prostoru \mathcal{M} s metrikou ρ je *cauchyovská*, jestliže platí

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall m, n > n_0) (\rho(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) < \varepsilon).$$

Definice 9. Řekneme, že metrický prostor V je *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ je v něm konvergentní, tj. existuje pro ni $\mathbf{x} \in V$ tak, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}.$$

Úplný normovaný prostor se nazývá *Banachův prostor*. Úplný prostor se skalárním součinem se nazývá *Hilbertův prostor*⁵.

Definice 10. Ortogonální systém vektorů soubor vektorů $(\mathbf{x}_\alpha)_{\alpha \in M}$ v Hilbertově prostoru \mathcal{H} se nazývá *maximální, úplný*, nebo *báze \mathcal{H}* , právě když není vlastní podmnožinou jiného ortogonálního systému.

Poznámka. Množina indexů M v definici (10) může být konečná, spočetná i nespočetná. Diskuse nad vlastnostmi nespočetných bazí a nespočetných sum (pomocí zobecnění posloupností na tzv. „sítě“) je nad rámec tohoto matematického úvodu a lze ji najít např. v [BEH08, Con90].

Věta 11. *Všechny báze \mathcal{H} mají stejnou kardinalitu, kterou nazýváme dimenzí prostoru \mathcal{H} .*

⁵Obecně neúplný prostor se skalárním součinem se někdy též nazývá pre-Hilbertův prostor.

Definice 12. Množina M je hustá v topologickém prostoru \mathcal{X} , právě když $\bar{M} = \mathcal{X}$.

Definice 13. Topologický prostor \mathcal{X} se nazývá separabilní, právě když obsahuje spočetnou množinu hustou v \mathcal{X} .

Věta 14. Hilbertův prostor \mathcal{H} je separabilní právě tehdy, když má spočetnou bázi.

1.7.2 Vlastnosti Banachových a Hilbertových prostorů

Definice 15. Necht' $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ jsou Banachovy prostory. Řekneme, že lineární operátor $A : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ je omezený, jestliže existuje konstanta $K \geq 0$ tak, že

$$(\forall \mathbf{v} \in \mathcal{B}_1) (\|A\mathbf{v}\|_{\mathcal{B}_2} \leq K \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{B}_1}).$$

Řekneme, že operátor A je spojité, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{B}_1) (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathcal{B}_1} < \delta \implies \|A\mathbf{u} - A\mathbf{v}\|_{\mathcal{B}_2} < \varepsilon).$$

Poznámka. Spojitost operátoru (zobrazení) lze zobecnit do metrických prostorů. Na Banachových prostorech jsou tyto dvě podmínky zjevně ekvivalentní.

Definice 16. Necht' \mathcal{B} je Banachův prostor. Prostor všech lineárních funkcionalů na \mathcal{B} se nazývá algebraický duální prostor a značí se \mathcal{B}^* . Prostor všech spojitých lineárních funkcionalů na \mathcal{B} se nazývá (spojitý) duální prostor a značí se \mathcal{B}' .

Poznámka. V případě $\dim \mathcal{B} < +\infty$ je $\mathcal{B}' = \mathcal{B}^*$.

Definice 17. Necht' \mathcal{B} je Banachův prostor s normou $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Potom duální norma na duálním prostoru \mathcal{B}' je dána vztahem

$$\|\underline{\mathbf{w}}\|_{\mathcal{B}'} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{B} \setminus \{0\}} \frac{|\underline{\mathbf{w}}(\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{B}}} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{B}, \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{B}}=1} |\underline{\mathbf{w}}(\mathbf{v})|$$

pro každé $\underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{B}'$.

Věta. (Rieszova) Necht' \mathcal{H} je Hilbertův prostor se skalárním součinem (\cdot, \cdot) . Potom pro každý prvek $\underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{H}'$ existuje právě jeden prvek $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ tak, že

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \underline{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}.$$

Navíc platí

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}} = \|\underline{\mathbf{w}}\|_{\mathcal{H}'}$$

Poznámka 18. Rieszova věta dokazuje existenci izomorfismu (lineárního bijektivního zobrazení)

$$I : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$$

definovaného jako

$$I\underline{\mathbf{w}} = \mathbf{u},$$

kteřý navíc zachovává „velikost“ prvků (v normách $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, resp. $\|\cdot\|_{\mathcal{H}'}$). Proto lze de facto prostory \mathcal{H} a \mathcal{H}' ztotožnit (mají stejné vlastnosti z hlediska lineární algebry a funkcionální analýzy - viz zejména pojmy v části 1.7.10). Duální prostor \mathcal{H}' je rovněž Hilbertův, s indukovaným skalárním součinem

$$(\underline{\mathbf{w}}_1, \underline{\mathbf{w}}_2)_{\mathcal{H}'} = (I\underline{\mathbf{w}}_1, I\underline{\mathbf{w}}_2)_{\mathcal{H}}.$$

Lineární funkcionály lze reprezentovat nejen pomocí skalárního součinu, ale i pomocí libovolné bilineární formy, která má dostatečně „hezké“ vlastnosti, jak ukazuje následující lemma:

Lemma 19. (Laxovo-Milgramovo) *Nechť \mathcal{H} je Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$, nechť $B: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ je bilineární forma, pro niž existují konstanty $K, L > 0$ tak, že pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}$ platí*

1. *spojitost, resp. omezenost $B: |B(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq K \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}}$,*
2. *koercivita (nebo také „V-eliptičnost“) $B: B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq L \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}}^2$.*

Potom pro každý spojitý lineární funkcionál $\underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{H}'$ existuje právě jedno $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ tak, že

$$\underline{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

a navíc

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{L} \|\underline{\mathbf{w}}\|_{\mathcal{H}'}$$

Důkaz. Viz [Eva98, Chapter 6]. □

Poznámka. Samotný skalární součin splňuje obě podmínky v Laxově-Milgramově lemmatu 19 s konstantami $K = 1$ (Schwarzova nerovnost) a $L = 1$ (zřejmě), a pro něj pak dostáváme přímo Rieszovu větu 1.7.2.

Definice. Nechť \mathcal{B} je Banachův prostor, $\mathbf{v} \in \mathcal{B}$. Potom zobrazení

$$\underline{\mathbf{v}}: \mathcal{B}' \rightarrow \mathbb{R}$$

definované vztahem

$$\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{w}}) = \underline{\mathbf{w}}(\mathbf{v})$$

je spojitý lineární funkcionál na \mathcal{B}' , tj. $\underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{B}''$. Zobrazení

$$J = \left(\mathbf{v} \mapsto \underline{\mathbf{v}} \right)$$

se nazývá *kanonické zobrazení (canonical evaluation map)*. Prostor \mathcal{B} se nazývá *reflexivní*, jestliže je kanonické zobrazení $J: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''$ izomorfismem (tj. bijektivním a lineárním zobrazením, zachovávajícím lineární vztahy mezi prvky \mathcal{B} a \mathcal{B}'' , tj. „strukturu“ prostoru \mathcal{B}).

Poznámka 20. Každý Hilbertův prostor je reflexivní.

Důkaz. Dle Rieszovy věty 1.7.2 a poznámky 18 je totiž (nad reálným tělesem) \mathcal{H} izomorfní s \mathcal{H}' (a \mathcal{H}' je také Hilbertův prostor, izomorfní s \mathcal{H}''). □

Definice 21. Nechť \mathcal{B} je Banachův prostor. Říkáme, že posloupnost (\mathbf{u}_n) v prostoru \mathcal{B} *slabě konverguje* k prvku $\mathbf{u} \in \mathcal{B}$ a značíme $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}$, jestliže platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\mathbf{w}}(\mathbf{u}_n) = \underline{\mathbf{w}}(\mathbf{u}), \quad \forall \underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{B}'.$$

Poznámka 22. Nechť \mathcal{H} je Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$. Dle Rieszovy věty lze definici slabé konvergence formulovat jako

$$\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \iff (\forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{u}_n, \mathbf{v})_{\mathcal{H}} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{H}} \right).$$

Věta 23. *Banachův prostor \mathcal{B} je reflexivní, právě když lze z každé posloupnosti (\mathbf{u}_n) omezené v \mathcal{B} vybrat podposloupnost slabě konvergentní v \mathcal{B} .*

1.7.3 Samosdružené operátory na Hilbertových prostorech

Věta 24. Necht' \mathcal{H} je Hilbertův prostor se skalárním součinem (\cdot, \cdot) . Necht' $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ je omezený lineární operátor na \mathcal{H} (značíme $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$). Potom existuje právě jeden lineární operátor $A^* \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ takový, že pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}$ platí

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, A^*\mathbf{v}).$$

Důkaz. Pro pevné $\mathbf{v} \in \mathcal{H}$ je $\mathbf{u} \mapsto (A\mathbf{u}, \mathbf{v})$ spojitý lineární funkcionál, takže z Rieszovy věty 1.7.2 existuje právě jedno $\mathbf{z} \in \mathcal{H}$ takové, že

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{z}).$$

Zobrazení $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{z}$ je ovšem lineární operátor, který označíme A^* . □

Definice 25. Operátor A^* z věty (se nazývá operátor *sdrůžený* (*adjungovaný*, *adjoint*) k operátoru A .

- Operátor A se nazývá *normální*, právě když $AA^* = A^*A$.
- Operátor A se nazývá *samosdružený* (*hermitovský*, *samoadjungovaný*, *self-adjoint*), právě když $A^* = A$.

1.7.4 Funkční prostory C^m a L_p

Definice 26. Bud' obecně $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Prostor $C(\Omega)$ je lineární prostor všech funkcí $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ spojitých na Ω s běžně definovanými vektorovými operacemi⁶. Prostor $C(\bar{\Omega})$ je lineární prostor všech funkcí z $C(\Omega)$, které jsou navíc *stejněměrně spojité*⁷ na Ω (tj. nehovoří se zde o uzávěru $\bar{\Omega}$).

Definice 27. Bud' $m \in \mathbb{N}_0$. Definujeme prostory funkcí

$$\begin{aligned} C^m(\Omega) &= \{u \in C(\Omega) \mid (\forall \alpha, |\alpha| \leq m) (D^\alpha u \in C(\Omega))\}, \\ C^m(\bar{\Omega}) &= \{u \in C(\Omega) \mid (\forall \alpha, |\alpha| \leq m) (D^\alpha u \in C(\bar{\Omega}))\} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} C^\infty(\Omega) &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega), \\ C^\infty(\bar{\Omega}) &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\bar{\Omega}). \end{aligned}$$

Poznámka. Z definice 27 platí $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Definice 28. Řekneme, že funkce $\mathbf{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lipschitzovská (*Lipschitz-continuous*), právě když

$$(\exists K > 0) (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m) (\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| < K \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|).$$

Definice 29. Řekneme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je *oblast se spojitou* (resp. *lipschitzovskou*) *hranicí*, pokud existuje m ($m \in \mathbb{N}$) kartézských souřadných systémů v \mathbb{R}^n označených $(x_1^r, x_2^r, \dots, x_{n-1}^r, x_n^r)$, m čísel $\Delta^r > 0$ a m spojitých (resp. lipschitzovských) funkcí a^r ($n-1$) proměnných ($r \in \hat{m}$) takových, že

1. $(\forall A \in \partial\Omega) (\exists r \in \hat{m}) (\exists \tilde{\mathbf{x}}^r = (x_1^r, x_2^r, \dots, x_{n-1}^r)) (\|\tilde{\mathbf{x}}^r\| < \Delta^r \wedge A = [\tilde{\mathbf{x}}^r, a^r(\tilde{\mathbf{x}}^r)])$,
2. $(\exists \varepsilon_0 > 0) (\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)) (\forall r \in \hat{m})$ platí

⁶Pro shodu s definicemi v některé literatuře bychom měli uvažovat $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, ale my se s komplexními funkcemi neseetkáme.

⁷ $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega) (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| < \varepsilon)$

- a) $U_+^r = \{[\tilde{\mathbf{x}}^r, x_n^r] \mid \|\tilde{\mathbf{x}}^r\| < \Delta^r \wedge a^r(\tilde{\mathbf{x}}^r) < x_n^r < a^r(\tilde{\mathbf{x}}^r) + \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega,$
 b) $U_-^r = \{[\tilde{\mathbf{x}}^r, x_n^r] \mid \|\tilde{\mathbf{x}}^r\| < \Delta^r \wedge a^r(\tilde{\mathbf{x}}^r) - \varepsilon < x_n^r < a^r(\tilde{\mathbf{x}}^r)\} \subset \Omega.$

Poznámka 30. $\tilde{\mathbf{x}}^r$ označuje prvních $n - 1$ souřadnic v bázi lokálního souřadného systému. První bod definice znamená, že hranici $\partial\Omega$ lze vyjádřit jako sjednocení konečného počtu grafů funkcí uvedeného typu, které jsou v prostoru orientovány pomocí vhodně volených souřadných systémů. Podmínka $|\tilde{\mathbf{x}}^r| < \Delta^r$ vyjadřuje, že jednotlivé funkce jsou definovány na omezené $(n - 1)$ -rozměrné oblasti a protože lipschitzovské i spojité funkce na omezené oblasti jsou také omezené, implikuje tato podmínka v podstatě omezenost oblasti Ω . Druhý bod definice potom říká, že oblast se nachází jen na jedné straně své hranice.

Definice 31. Necht' $p \geq 1$. Potom definujeme prostor $L_p(\Omega)$ funkcí $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jako⁸

$$L_p(\Omega) = \left\{ u \text{ měřitelná na } \Omega \mid \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

Poznámka. Platí $L_1(\Omega) = L(\Omega)$. Prostor $L_2(\Omega)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

a jím indukovanou normou

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pro $p \neq 2$ je $L_p(\Omega)$ Banachovým prostorem s normou

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

K důkazu faktu, že se skutečně jedná o normu, potřebujeme ukázat trojúhelníkovou nerovnost. Pro normu v $L_p(\Omega)$ je trojúhelníková nerovnost známa jako Minkowského nerovnost (věta 52).

1.7.5 Zobecněné funkce a slabá derivace

Následující pojmy vycházejí z [Sch66] a [Eva98].

Definice 32. Měřitelná funkce f je na množině Ω lokálně integrovatelná, je-li integrovatelná na každé kompaktní podmnožině Ω . Prostor lokálně integrovatelných funkcí v p -té mocnině značíme $L_{p,\text{loc}}(\Omega)$.

Definice 33. Necht' $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ kde $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ a označme $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. n -tice α se nazývá *multiindex*. Definujeme diferenciální operátor

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}.$$

Poznámka. Pro $|\alpha| = 0$ je D^α identický operátor, tj. $D^\alpha u = u$.

⁸ $L_p(\Omega)$ se někdy značí s indexem p nahoře, tj. jako $L^p(\Omega)$.

Definice 34. Vektorový prostor $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\bar{\Omega})$, obsahující pouze funkce s *kompaktním nosičem* (supportem)⁹, nazýváme *prostorem testovacích funkcí* na Ω a značíme jej také $\mathcal{D}(\Omega)$. *Distribucí* (zobecněnou funkcí) rozumíme spojité¹⁰ lineární funkcionál $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ označujeme

$$\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi).$$

Poznámka. Množina $\mathcal{D}'(\Omega)$ všech distribucí na $\mathcal{D}(\Omega)$ je (spojitý) duální prostor k $\mathcal{D}(\Omega)$, který je podmnožinou (algebraického) duálního prostoru $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

Poznámka. Funkce z $C_0^\infty(\Omega)$ splňují na $\partial\Omega$ *homogenní Dirichletovu podmínku* (mají na $\partial\Omega$ nulovou hodnotu).

Definice 35. Řekneme, že distribuce T je *regulární*, existuje-li funkce $u \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ taková, že $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ platí

$$\langle T, \varphi \rangle = (u, \varphi) \equiv \int_{\Omega} u(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (1.31)$$

Distribuci pak značíme T_u a nebo ji přímo ztotožňujeme s funkcí u .

Poznámka. Je zřejmé, že v definici 35 stačí $u \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ a nikoliv $u \in L_1(\Omega)$, protože integrál (1.31) reálně probíhá přes $\text{supp } \varphi$.

Definice 36. i -tou parciální *derivací distribuce* T rozumíme distribuci $\partial_i T$ definovanou vztahem

$$\langle \partial_i T, \varphi \rangle = -\langle T, \partial_i \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.32)$$

Poznámka. V případě, že T je regulární (definovaná funkcí u dle (1.31)) a $u \in C^1(\Omega)$, tak $\partial_i T$ je též regulární a je definována funkcí $\partial_i u$. Je-li α libovolný multiindex, plyne z vícenásobného použití vztahu (1.32)

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.33)$$

Distribuce T má tedy derivace všech řádů a je-li definována podle vztahu (1.31) funkcí u , bude distribuce $D^\alpha T$ definována funkcí $D^\alpha u$, pokud tato (klasická, silná) derivace ve smyslu teorie funkcí existuje (viz Greenova formule 5). Pokud nikoliv, říkáme, že funkce u má *derivaci ve smyslu distribucí*. Touto derivací rozumíme distribuci $D^\alpha T_u$. Příkladem je Heavisideova funkce $Y(x) = \chi_{(0,+\infty)}(x)$, jejíž první derivací je Diracova „funkce“ δ .

Definice 37. Řekneme, že funkce $u \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ má *slabou derivaci* podle multiindexu α , jestliže distribuce $D^\alpha T_u$ je regulární. Funkci $v \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$, která ji dle (1.31) definuje, označujeme

$$v = D^\alpha u. \quad (1.34)$$

Poznámka. Pro slabou derivaci dle (1.31) a (1.33) platí

$$(D^\alpha u, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (u, D^\alpha \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pokud $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, tak tento vztah samozřejmě splňuje i klasická (silná) derivace ve smyslu teorie funkcí, kterou rovněž označujeme $D^\alpha u$. Ta ale na rozdíl od slabé derivace musí být definována v každém bodě $\mathbf{x} \in \Omega$. Slabá derivace je dána jednoznačně v $L_{1,\text{loc}}(\Omega)$, tj. jsou-li v, w slabé derivace funkce u podle α , pak $v(x) = w(x)$ skoro všude v Ω .

⁹Nosič (angl. *support*), přesněji uzavřený nosič, funkce $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ je podmnožina definičního oboru

$$\text{supp } \varphi = \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega \mid \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

Kompaktní množina (viz část 1.7.10) v \mathbb{R}^3 znamená omezená a uzavřená. Uzavěr v definici je důležitý, neboť např. spojité funkce v \mathbb{R}^n mohou být nenulové pouze na otevřené množině.

¹⁰Spojitosť se rozumí obvyklým způsobem, ovšem vzhledem k topologii v prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$.

1.7.6 Sobolevovy prostory

Sobolevovy prostory [Maz85, Bre10, Kin23] jsou prostory funkcí, jejichž derivace (různých řádů) jsou z prostoru $L_p(\Omega)$ (viz poznámka 40)

Definice 38. Necht' $m \in \mathbb{N}$. Na prostoru $C^\infty(\bar{\Omega})$ definujeme skalární součin

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v \, dx,$$

který indukuje normu [Kin23, str. 11]

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 \, dx}.$$

Sobolevovým prostorem $H^m(\Omega)$ rozumíme zúplnění (uzávěr) množiny $C^\infty(\bar{\Omega})$ vzhledem k normě $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$. Prostorem $H_0^m(\Omega)$ rozumíme zúplnění (uzávěr) $C_0^\infty(\Omega)$ v prostoru $H^m(\Omega)$.

Poznámka 39. (Zúplňovací procedura) Platí $C^\infty(\bar{\Omega}) \subset L_2(\Omega)$ a navíc pro každou $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ z definice 38 zřejmě platí $\|u\|_{H^m(\Omega)} \leq \|u\|_{L_2(\Omega)}$. Každá posloupnost $(v_n) \subset C^\infty(\bar{\Omega})$, která je Cauchyovská v normě $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$, je proto Cauchyovská i v $L_2(\Omega)$ a protože $L_2(\Omega)$ je úplný prostor, existuje v něm limita této posloupnosti v . Jestliže má posloupnost (v_n) limitu i v $C^\infty(\bar{\Omega})$, pak se tyto limity zřejmě rovnají. Jestliže v $C^\infty(\bar{\Omega})$ tato limita neexistuje, přidáme tam v . Provedením této procedury pro všechny Cauchyovské posloupnosti získáme úplný prostor - prostor $H^m(\Omega)$.

Poznámka. Prostor $H^m(\Omega)$ je Hilbertův (úplný a se skalárním součinem). Konkrétně pro $m = 1$ a $\Omega \in \mathbb{R}^2$ máme (pro reálné funkce)

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (uv + \partial_1 u \partial_1 v + \partial_2 u \partial_2 v) \, dx, \quad (1.35)$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} (|u|^2 + |\partial_1 u|^2 + |\partial_2 u|^2) \, dx}. \quad (1.36)$$

Poznámka. Prostory $H^m(\Omega)$, resp. $H_0^m(\Omega)$ jsou v literatuře označovány také jako $W^{m,2}(\Omega)$, resp. $W_0^{m,2}(\Omega)$. Sobolevovy prostory se totiž někdy definují ještě obecněji jako zúplnění $C^m(\bar{\Omega})$ vzhledem k normě

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sqrt[p]{\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \, dx}$$

a označují se potom $W^{m,p}(\Omega)$, přičemž jsou obecně podmnožinou $L_p(\Omega)$. Pro $p \neq 2$ už jde pouze o Banachovy a nikoliv Hilbertovy prostory. Zúplňovací procedura probíhá analogicky poznámce 39.

Poznámka 40. Pro naši teorii je vhodný vztah

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u : \Omega \mapsto \mathbb{R} \mid (\forall \alpha, |\alpha| \leq m) (D^\alpha u \in L_p(\Omega))\},$$

kde existence derivací $D^\alpha u$ je uvažována ve slabém smyslu, tj. ve smyslu definice 37.

Věta 41. (o stopách) Existuje spojitě zobrazení $T : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$ takové, že pro každou $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ platí

$$Tu = u|_{\partial\Omega}.$$

Poznámka. Z definice je $C^\infty(\bar{\Omega})$ hustý v $H^1(\Omega)$. Věta (41) říká, že nejen hladké funkce na $\bar{\Omega}$, ale i limity posloupností takových funkcí lze „zúžit“ (spíše dodefinovat) na hranici $\partial\Omega$ (takové funkce totiž nemusí být v principu na $\partial\Omega$ vůbec definovány, tj. nelze je zúžit v klasickém slova smyslu). Operátor T se nazývá *operátor stopy (trace operator)*.

1.7.7 Vlastnosti funkcí ze Sobolevova prostoru $H^1(\Omega)$

V následující části si uděláme představu, jak moc „divoké“ mohou být funkce ze Sobolevova prostoru $H^1(\Omega)$.

Definice 42. Řekneme, že funkce $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je *absolutně spojitá* (*absolutely continuous*) na svém definičním oboru, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé rozdělení intervalu $[a, b]$ ve tvaru

$$a = x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \dots \leq x_m < y_m = b,$$

pro něž

$$\sum_{i=1}^m (y_i - x_i) < \delta,$$

platí

$$\sum_{i=1}^m |u(y_i) - u(x_i)| < \varepsilon.$$

Poznámka. Na $[a, b]$ platí implikace

$$\text{lipschitzovskost} \implies \text{absolutní spojitost} \implies \text{stejněměrná spojitost} \implies \text{spojitost}.$$

Věta 43. Funkce $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je *absolutně spojitá*, právě když existuje $v \in L_1((a, b))$ tak, že pro každé $x \in (a, b)$ je

$$u(x) = u(a) + \int_{(a,x)} v(\xi) d\xi. \quad (1.37)$$

Poznámka. Absolutně spojitě funkce jsou takové, pro které platí základní věta integrálního počtu (vztah 1.37). Zároveň skoro všude na (a, b) platí

$$u'(x) = v(x).$$

Definice 44. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast. Řekneme, že funkce $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je *absolutně spojitá na přímce* $p = \{t\mathbf{k} + \mathbf{P} \mid t \in \mathbb{R}\}$, jestliže funkce

$$f(t) = u(t\mathbf{k} + \mathbf{P})$$

je absolutně spojitá na každém intervalu $[a, b]$ takovém, že

$$\{t\mathbf{k} + \mathbf{P} \mid t \in [a, b]\} \subset \Omega.$$

Věta 45. (charakterizace prostoru $H^1(\Omega)$ pomocí absolutní spojitosti) Necht' $u \in H^1(\Omega)$. Potom existuje funkce $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ taková, že $\tilde{u} = u$ skoro všude v Ω a \tilde{u} je absolutně spojitá na skoro všech přímkách v Ω rovnoběžných s některou se souřadných os. Klasické parciální derivace \tilde{u} existují skoro všude v Ω a shodují se se slabými derivacemi \tilde{u} .

Poznámka. Věta 45 je formulována ve shodě s literaturou [Maz85, Kin23], ale její tvrzení je vhodné ještě detailněji rozebrat.

- Každá přímka rovnoběžná s některou se souřadných os, která má s Ω neprázdný průnik, prochází právě jedním bodem průmětu Ω do $(n-1)$ -rozměrné nadroviny, která je kolmá na příslušnou osu. Tento průmět má jistou $(n-1)$ -rozměrnou Lebesgueovu míru. Tvrzení „pro skoro všechny přímky“ znamená „pro přímky procházející skoro všemi body zmíněného průmětu vzhledem ke zmíněné míře“.

- Pro $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ dostáváme, že funkce z $H^1((a, b))$ jsou absolutně spojité na každém kompaktním podintervalu (a, b) a jsou skoro všude diferencovatelné. Spadají sem funkce, které jsou rovné jisté diferencovatelné funkci skoro všude, nebo funkce, které mají derivaci skoro všude, jako např. $u(x) = |x|$ na $(-1, 1)$. Funkce, které mají nespojitost typu skoku, v $H^1((a, b))$ neleží.
- Tvrzení platí analogicky i pro prostor $W^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$.

Věta 46. *Nechť $u \in L_2(\Omega)$ má klasické parciální derivace v $L_2(\Omega)$ a navíc je absolutně spojité na přímkách rovnoběžných se souřadnými osami. Pak klasické derivace u splývají se slabými derivacemi, a tedy $u \in H^1(\Omega)$.*

Poznámka. Věta 46 je opačná implikace k větě 46. Je vidět, že funkce z $L_2(\Omega)$, která má klasické parciální derivace definované skoro všude (a tedy též v $L_2(\Omega)$), ještě nemusí ležet v $H^1(\Omega)$. V tom případě by totiž v $H^1(\Omega)$ mohly ležet např. stupňovité funkce, které mají skoky.

1.7.8 Bochnerovy prostory

Nechť $\mathcal{J} = (0, t_{\max})$ je časový interval a $u : \mathcal{J} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce závislá jak na čase, tak na prostorových souřadnicích. Stejnou funkci však lze chápat jako funkci jedné proměnné $u : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{X}$, kde $\mathcal{X} = \{w | w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$. Potom $u(t) \in \mathcal{X}$ a původní zápis hodnoty funkce v bodě lze nyní vyjádřit i jinak: $u(t) = u(t)(\mathbf{x})$. V tomto duchu se nese následující definice.

Definice 47. Bud' \mathcal{X} Banachův, resp. Hilbertův prostor, $\mathcal{J} = (a, b)$ omezený otevřený interval a necht' $p \in \mathbb{N}$. Potom definujeme *Bochnerův prostor*

$$L_p(\mathcal{J}; \mathcal{X}) = \left\{ u : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{X} \left| \int_{\mathcal{J}} \|u(t)\|_{\mathcal{X}}^p dt < +\infty \right. \right\}$$

s normou danou *Bochnerovým integrálem*

$$\|u\|_{L_p(\mathcal{J}; \mathcal{X})} = \sqrt[p]{\int_{\mathcal{J}} \|u(t)\|_{\mathcal{X}}^p dt} = \| \|u(t)\|_{\mathcal{X}} \|_{L_p(\mathcal{J})}. \quad (1.38)$$

Poznámka 48. Je-li \mathcal{X} Banachův, je také $L_p(\mathcal{J}; \mathcal{X})$ Banachův. Je-li \mathcal{X} Hilbertův, je prostor $L_2(\mathcal{J}; \mathcal{X})$ Hilbertův se skalárním součinem

$$(u, v)_{L_2(\mathcal{J}; \mathcal{X})} = \int_{\mathcal{J}} (u(t), v(t))_{\mathcal{X}} dt.$$

Pro formální zavedení Bochnerova integrálu a větu opravňující k definici 47 odkazujeme např. na knihu [AB06].

1.7.9 Užitečné nerovnosti

Věta 49. (Schwarzova nerovnost). *Nechť \mathcal{H} je prostor se skalárním součinem (\cdot, \cdot) a jím indukovanou normou $\|\cdot\|$. Potom $\forall u, v \in \mathcal{H}$ platí*

$$(u, v) \leq \|u\| \|v\|.$$

Věta 50. (Youngova nerovnost). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Potom $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$.*

Poznámka 51. Necht' $v > 0$. Potom dosazením do Youngovy nerovnosti získáváme její obecnější tvar

$$ab = \frac{a}{\sqrt{v}} \sqrt{v} b \leq \frac{1}{2v} a^2 + \frac{1}{2} v b^2.$$

Věta 52. (Minkowského nerovnost)

Nechť $u, v \in L_p(\Omega)$. Potom

$$\left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Poznámka. Minkowského nerovnost je trojúhelníková nerovnost pro normu $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$. Její pomocí se také dokazuje, že $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$ je norma na $L_p(\Omega)$.

Věta 53. (Hölderova nerovnost)

Nechť $p, q \in [1, +\infty)$ takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom

- pro $u \in L_p(\Omega)$, $v \in L_q(\Omega)$ platí

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \leq \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^q \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}},$$

- pro $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

Důsledek 54. Pro vektorové funkce $\mathbf{u} \in L_p(\Omega)^n$, $\mathbf{v} \in L_q(\Omega)^n$ platí spojením obou předchozích případů

$$\int_{\Omega} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left| \sum_i u_i v_i \right| \, d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \, d\mathbf{x} \leq \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u_i|^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |v_i|^q \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}}$$

a konkrétně pro $p = q = \frac{1}{2}$

$$\int_{\Omega} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \, d\mathbf{x} = \left(\int_{\Omega} \|\mathbf{u}\|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \|\mathbf{v}\|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Věta 55. (Friedrichsova nerovnost) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$. Nechť $\Gamma \subset \partial\Omega$ taková, že $(n-1)$ -rozměrná Lebesgueova míra $m_{n-1}(\Gamma) > 0$. Potom existuje $k > 0$ závislé jen na Ω a Γ takové, že $\forall u \in H^1(\Omega)$ platí

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq k \left(\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} |\partial_j u|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} u^2(s) \, dS \right).$$

Poznámka. Intuitivní výklad Friedrichsovy nerovnosti je následující. Má-li funkce v Ω omezené derivace, pak k tomu, aby měla v Ω omezené i hodnoty (tj. $\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x}$) stačí, aby byly tyto hodnoty omezené na hranici oblasti Ω , resp. dokonce jen její "dostatečně velké" části $\Gamma \subset \Omega$.

Důsledek. (Poincarého nerovnost) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$. Potom existuje $k > 0$ závislé jen na Ω takové, že pro $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ platí

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq k \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} |\partial_j u|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Důkaz. Jedná se přímo o Friedrichsovu nerovnost při libovolné přípustné volbě Γ , například $\Gamma = \partial\Omega$. Z definice prostoru $H_0^1(\Omega)$ je totiž $\int_{\partial\Omega} u^2(s) dS = 0$. \square

Důsledek 56. Protože obecně pro $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je na $H_0^1(\Omega)$ definována norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} \left(|u|^2 + \sum_{j=1}^n |\partial_j u|^2 \right) d\mathbf{x}},$$

obrácená nerovnost platí triviálně s volbou konstanty úměrnosti $K = 1$. Přitom lze ukázat, že

$$\|u\|'_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} \sum_{j=1}^n |\partial_j u|^2 d\mathbf{x}}$$

je rovněž norma na $H_0^1(\Omega)$. Potom z Poincarého nerovnosti dostáváme ekvivalenci norem $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ a $\|\cdot\|'_{H_0^1(\Omega)}$ na $H_0^1(\Omega)$, tj. platnost vztahu

$$(\exists k, K > 0) (\forall u \in H_0^1(\Omega)) \left(K \|u\|'_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq k \|u\|'_{H_0^1(\Omega)} \right).$$

Poznámka. Ekvivalence norem znamená, že obě normy indukují na daném prostoru stejnou topologii: množina je otevřená, posloupnost je konvergentní atd. v jedné normě stejně jako ve druhé, a proto obě normy není nutno pro tyto účely rozlišovat. Na prostoru konečné dimenze jsou všechny normy ekvivalentní, ale na Sobolevových prostorech je ekvivalence norem $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ a $\|\cdot\|'_{H_0^1(\Omega)}$ netriviální poznatek.

Poznámka 57. Poincarého nerovnost de facto umožňuje na $H_0^1(\Omega)$ odhadnout L_2 -normu funkce pomocí součtu L_2 -norem jejích derivací. Je zřejmé, že totéž nemůže platit na $H^1(\Omega)$, tj. bez podmínky kompaktního nosiče. Jako protipříklad lze uvažovat libovolnou konstantní, ale nenulovou funkci.

Následující věta ukazuje možnost shora odhadnout funkci, která je omezená integrálem ze sebe samé.

Věta 58. (Gronwallovo lemma) Necht' $u : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}_0^+$ je spojitá, necht' $\alpha > 0, \beta \geq 0$. Necht' platí

$$(\forall t \in [t_0, t_1]) \left(u(t) \leq \int_{t_0}^t (\alpha u(\tau) + \beta) dt \right).$$

Potom

$$u(t) \leq \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha(t-t_0)} - 1).$$

1.7.10 Kompaktnost, věty o vnoření

Následující definice a tvrzení a věty lze nalézt např. v [KJF77].

Definice 59. Necht' A, B jsou množiny, $A \subset B$. Identické zobrazení $\iota : A \rightarrow B$ definované jako

$$\iota(x) = x \quad \forall x \in A$$

se nazývá operátor inkluze.

Poznámka. V případě Hilbertových prostorů lze jako operátor inkluze použít i izomorfismus s duálním prostorem dle poznámky 18, tj. $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$ a $\iota : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2'$.

Definice 60. Buďte $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Banachovy prostory. Lineární operátor $T : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ se nazývá *totálně spojitý* (*completely continuous*), jestliže pro každou slabě konvergentní posloupnost (\mathbf{u}_n) v \mathcal{B}_1 , $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}$, platí $T\mathbf{u}_n \rightarrow T\mathbf{u}$ v \mathcal{B}_2 .

Věta 61. Každý totálně spojitý operátor na reflexivním Banachově prostoru je i spojitý (tj. omezený - viz definice 15).

Důkaz. Necht' $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ jsou Banachovy prostory, \mathcal{B}_1 je reflexivní a $T : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ je totálně spojitý. Uvažujme

$$U = \{ \mathbf{v} \in \mathcal{B}_1 \mid \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{B}_1} = 1 \}.$$

Jestliže T není omezený, pak existuje posloupnost $\mathbf{v}_n \in U$ tak, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T\mathbf{v}_n\|_{\mathcal{B}_2} = +\infty.$$

Protože ale posloupnost \mathbf{v}_n je omezená, tak z ní lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost \mathbf{v}_{k_n} . Díky totální spojitosti T tedy $T\mathbf{v}_{k_n}$ silně konverguje v \mathcal{B}_2 , což je spor. \square

Definice 62. Množina A v topologickém prostoru \mathcal{X} se nazývá *kompaktní*, jestliže z každého otevřeného pokrytí množiny A , tj. ze systému otevřených množin \mathcal{C} takového, že

$$A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B,$$

lze vybrat konečné podpokrytí \mathcal{C}_f , tj. $\exists \mathcal{C}_f \subset \mathcal{C}$, $|\mathcal{C}_f| \in \mathbb{N}$ takové, že

$$A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{C}_f} B.$$

Definice 63. Množina A v topologickém prostoru \mathcal{X} se nazývá *sekvenciálně kompaktní*, jestliže pro každou posloupnost prvků z A existuje podposloupnost, která má limitu v A .

Poznámka. V metrických prostorech jsou kompaktnost a sekvenciální kompaktnost ekvivalentní.

Definice 64. Množina A v metrickém prostoru \mathcal{X} se nazývá *relativně kompaktní*¹¹, jestliže \bar{A} je v \mathcal{X} kompaktní.

Definice 65. Lineární operátor $T : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ se nazývá *kompaktní*, jestliže pro každou omezenou množinu $A \subset \mathcal{B}_1$ je $T(A)$ relativně kompaktní v \mathcal{B}_2 , tj. $\bar{T(A)}$ je kompaktní.

Poznámka 66. Kompaktní a totálně spojitý operátory lze definovat i na obecnějších (topologických vektorových) prostorech. Na Banachových prostorech je každý kompaktní operátor i totálně spojitý. Na reflexivních Banachových prostorech je operátor kompaktní, právě když je totálně spojitý.

Věta 67. Necht' \mathcal{H} je Hilbertův prostor a A je kompaktní samosdružený operátor na \mathcal{H} . Potom existuje posloupnost (opakujících se vlastních čísel operátoru A) (μ_n) a (spočetná) ortonormální báze (\mathbf{x}_n) prostoru

$$\ker A^\perp = \{ \mathbf{x} \in \mathcal{H} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}^\perp$$

taková, že pro každé $\mathbf{v} \in \mathcal{H}$ platí

$$A\mathbf{v} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (\mathbf{v}, \mathbf{x}_n) \mathbf{x}_n.$$

¹¹Relativně kompaktní množiny jsou někdy též nazývány prekompaktní (*precompact*). Stejným termínem jsou však označovány i totálně omezené množiny (*totally bounded*), tj. množiny, které lze pro libovolné $\varepsilon > 0$ pokrýt konečným sjednocením otevřených koulí o poloměru ε (resp. ekvivalentně existuje tzv. konečná ε -sít', tj. množina otevřených koulí o poloměru ε se středy vzdálenými nejméně ε). V úplném metrickém prostoru je relativní kompaktnost ekvivalentní s totální omezeností, čímž odpadá nejednoznačnost definice termínu "prekompaktní množina".

Důkaz. Viz [Con90, kapitola II], [Bre10], [Eva98, Appendix E]. \square

Definice 68. Řekneme, že Banachův prostor \mathcal{B}_1 je *spojitě vnořen* do Banachova prostoru \mathcal{B}_2 a značíme $\mathcal{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{B}_2$, jestliže operátor inkluze $\iota: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ je spojitý, neboli (viz definice 15) existuje $K > 0$ tak, že

$$\|v\|_{\mathcal{B}_2} \leq K \|v\|_{\mathcal{B}_1} \quad \forall v \in \mathcal{B}_1.$$

Prostor \mathcal{B}_1 je *kompaktně vnořen* do prostoru \mathcal{B}_2 (značíme $\mathcal{B}_1 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{B}_2$), jestliže operátor inkluze $\iota: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ je kompaktní.

Poznámka 69. Dle poznámky 66 a věty 61 platí

$$\mathcal{B}_1 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{B}_2 \implies \mathcal{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{B}_2.$$

Věta 70. *Nechť pro dva Banachovy prostory platí $\mathcal{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{B}_2$. Potom $\mathcal{B}_2' \hookrightarrow \mathcal{B}_1'$.*

Důkaz. Zřejmě $\mathcal{B}_2' \subset \mathcal{B}_1'$. Chceme dokázat, že existuje $K > 0$ tak, že pro každé $\underline{w} \in \mathcal{B}_2'$ platí

$$\|\underline{w}\|_{\mathcal{B}_1'} \leq K \|\underline{w}\|_{\mathcal{B}_2'}.$$

Víme, že pro jisté K platí

$$\|v\|_{\mathcal{B}_2} \leq K \|v\|_{\mathcal{B}_1},$$

takže jestliže $\|v\|_{\mathcal{B}_1} \leq 1$, pak určitě $\frac{1}{K} \|v\|_{\mathcal{B}_2} \leq 1$. Platí

$$\begin{aligned} \|\underline{w}\|_{\mathcal{B}_1'} &= \sup_{\substack{v \in \mathcal{B}_1 \\ \|v\|_{\mathcal{B}_1} = 1}} |\underline{w}(v)| = \sup_{\substack{v \in \mathcal{B}_1 \\ \|v\|_{\mathcal{B}_1} \leq 1}} |\underline{w}(v)| \leq \sup_{\substack{v \in \mathcal{B}_1 \\ \frac{1}{K} \|v\|_{\mathcal{B}_2} \leq 1}} |\underline{w}(v)| \\ &= K \sup_{\substack{v \in \mathcal{B}_1 \\ \|v\|_{\mathcal{B}_2} \leq 1}} |\underline{w}(v)| \leq K \sup_{\substack{v \in \mathcal{B}_2 \\ \|v\|_{\mathcal{B}_2} \leq 1}} |\underline{w}(v)| = K \|\underline{w}\|_{\mathcal{B}_2'}. \end{aligned}$$

Přitom nerovnosti jsou vždy v místech, kde se supremum počítá přes větší a větší množinu vektorů (z hlediska inkluze). \square

Věta 71. *Nechť $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ jsou Hilbertovy prostory, pro které platí $\mathcal{H}_1 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{H}_2$. Nechť A je omezený lineární operátor $A: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$. Potom existuje-li inverzní operátor A^{-1} , tak je kompaktní.*

Lemma 72. (Rellichova–Kondrachovova věta o kompaktním vnoření) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí. Potom pro každé $p > 1$ a q splňující*

$$q \in \begin{cases} \left[1, \frac{np}{n-p}\right) & \text{pro } n > p, \\ [p, +\infty) & \text{pro } n = p, \end{cases}$$

platí

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_q(\Omega).$$

Pro $q = \frac{np}{n-p}$ platí pouze

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega).$$

Důkaz. Viz [Eva98, Chapter 5], [Bre10, Chapter 9]. \square

Důsledek. *Konkrétně pro $n \in \{2, 3\}$ a $p = 2$ platí*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega).$$

Lemma 73. (Lionsovo–Aubinovo) Necht' $\mathcal{B}_0 \hookrightarrow \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{B}_1$ jsou Banachovy prostory, kde $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ jsou reflexivní. Necht' $p_0, p_1 \in (1, +\infty)$. Definujme prostor funkcí

$$\mathcal{Y} = \left\{ u \in L_{p_0}(\mathcal{J}; \mathcal{B}_0) \mid \frac{\partial u}{\partial t} \in L_{p_1}(\mathcal{J}; \mathcal{B}_1) \right\}$$

s normou

$$\|u\|_{\mathcal{Y}} = \|u\|_{L_{p_0}(\mathcal{J}; \mathcal{B}_0)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_{p_1}(\mathcal{J}; \mathcal{B}_1)}$$

pro každé $u \in \mathcal{Y}$. Potom platí

$$\mathcal{Y} \hookrightarrow L_{p_0}(\mathcal{J}; \mathcal{B}).$$

Důkaz. Lze najít např. v [Pok20a].

□

Kinematika tekutin

2.1 Materiálové těleso

Předmětem studia je *materiálové těleso*, které vyplňuje určitou souvislou množinu $V \subset \mathbb{R}^3$. Bez dalších předpokladů lze diskutovat matematický aparát, který popisuje transformaci prvků této množiny v čase.

2.2 Referenční a aktuální konfigurace materiálového tělesa

Uvažujme afinní prostor $(\mathbb{R}^3, \mathbf{o})$ a souřadnou soustavu s počátkem v bodě \mathbf{o} , který se vzhledem k pozorovateli nepohybuje. Pro jednoduchost a bez újmy na obecnosti volme standardní bázi prostoru

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T,$$

$$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$$

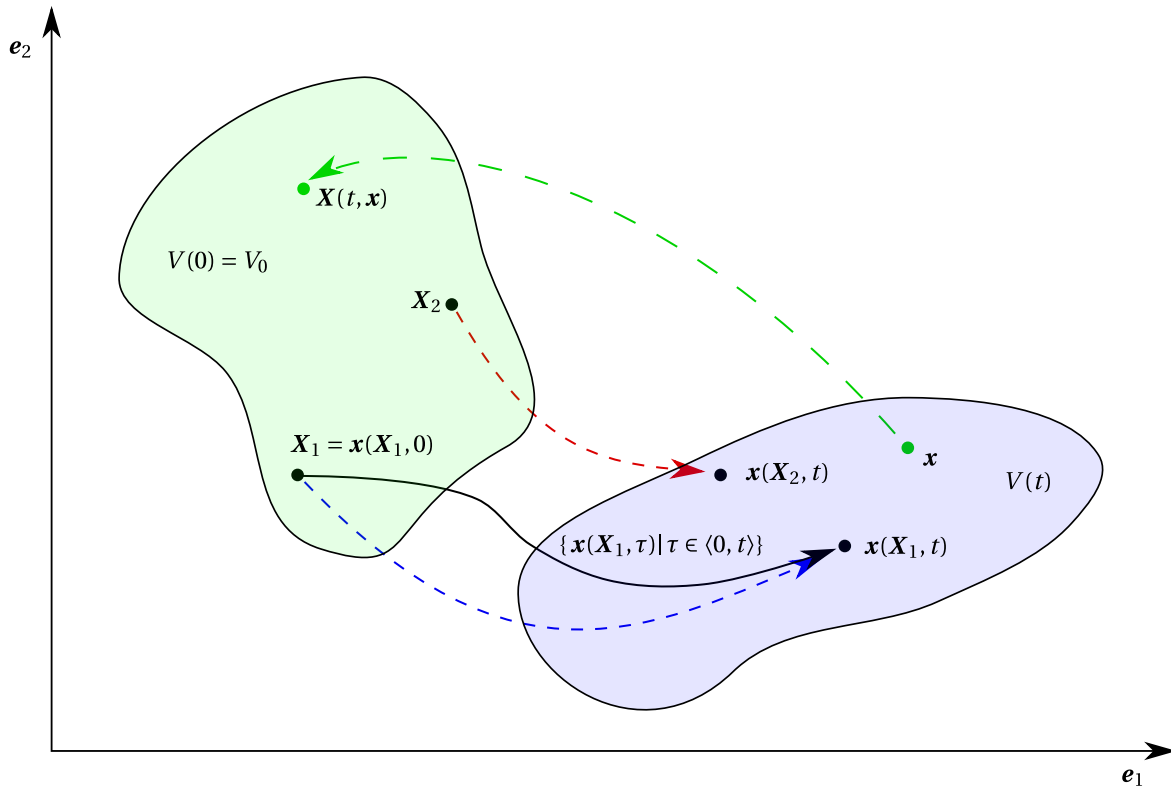
a počátek $\mathbf{o} = \mathbf{0}$, takže každý bod $\mathbf{p} \in (\mathbb{R}^3, \mathbf{o})$ má souřadnice shodné se složkami vektoru $\mathbf{p} - \mathbf{o} \in \mathbb{R}^3$. Z matematického hlediska v dalším textu proto ztotožníme afinní prostor $(\mathbb{R}^3, \mathbf{o})$, jehož prvky jsou body, a vektorový prostor \mathbb{R}^3 , který obsahuje vektory. Dále uvažujme časový interval $\mathcal{J} = (0, t_{\max})$.

Výchozím předmětem studia pro nás bude časová evoluce materiálového tělesa od času $t = 0$ do času $t = t_{\max}$. V čase $t = 0$ se těleso nachází ve svém výchozím (*referenčním*) stavu a zaujímá objem $V_0 \subset \mathbb{R}^3$ s hranicí ∂V_0 . Každý bod $\mathbf{X} \in V_0$, $\mathbf{X} = (X, Y, Z)^T = (X_1, X_2, X_3)^T$ nazveme *materiálovým bodem*. Pro označení materiálových bodů budeme používat velká písmena. Vlivem fyzikálních procesů deformace (např. při působení vnějších sil), translace nebo rotace dochází ke změně tvaru a/nebo velikosti materiálového tělesa, které v čase t zaujímá objem $V(t)$, stejně jako ke změně polohy jednotlivých materiálových bodů. Tím se materiálové těleso dostane do nového, *aktuálního* stavu, který popisujeme pomocí prostorových souřadnic $\mathbf{x} = (x, y, z)^T = (x_1, x_2, x_3)^T$ (viz Obr. 2.1). Naším cílem bude nalézt vztah mezi počátečním (referenčním) a aktuálním stavem materiálového tělesa.

Uvažujme materiálový bod \mathbf{X} a označme jako $\mathbf{x}(t, \mathbf{X})$ jeho polohu v čase t . V čase $t = 0$ platí $\mathbf{x}(0, \mathbf{X}) = \mathbf{X}$. Průběh funkce

$$\mathbf{x}: \mathcal{J} \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \tag{2.1}$$

pro pevně zvolené $\mathbf{X} \in V_0$ si lze představit tak, že v čase $t = 0$ nakreslíme na těleso v bodě \mathbf{X} křížek a v průběhu času budeme sledovat, kam se tento křížek pohne. Jestliže naše kontinuum je kapalina, můžeme do bodu \mathbf{X} umístit malou kuličku a sledovat, jak je unášena proudem.



Obrázek 2.1: Referenční a aktuální konfigurace materiálového tělesa.

Analogicky je možné definovat rychlost pevně zvoleného materiálového bodu $\mathbf{X} \in V_0$ jako časovou derivaci jeho polohy, tj.

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t, \mathbf{X}), \quad (2.2)$$

2.2.1 Přejchod mezi referenčními a prostorovými souřadnicemi

Fyzikální vlastnosti materiálového tělesa zaručují, že dva materiálové body se nemohou nikdy sejít v jednom bodě prostoru, a zároveň jeden materiálový bod nemůže být na dvou místech současně, tj. zobrazení (2.1) je prosté:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{X}_1) = \mathbf{x}(t, \mathbf{X}_2) \iff \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2.$$

Dále se žádné dva materiálové body nemohou k sobě nekonečně přiblížit ani od sebe nekonečně vzdálit, což znamená, že Jacobián

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.3)$$

Za těchto předpokladů platí věta o implicitních funkcích, která v každém časovém okamžiku t zaručuje existenci inverzního zobrazení

$$\mathbf{X}(t, \cdot) : V(t) \rightarrow V_0,$$

které pro každý bod z aktuální konfigurace $\mathbf{x} \in V(t)$ určí materiálový bod $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$, který se v bodě \mathbf{x} aktuálně nachází.

Rychlost materiálového bodu, který v čase t prochází pevně zvoleným bodem prostoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, je

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x})). \quad (2.4)$$

Zjistili jsme tedy, že rychlost může být svázána vztahem (2.2) s pevně zvoleným materiálovým bodem \mathbf{X} , nebo vztahem (2.4) s pevně zvoleným bodem v prostoru \mathbf{x} . Totéž platí pro libovolnou jinou veličinu (např. hustota, tlak, teplota, koncentrace...). Jestliže se zajímáme o zákonitosti, na jejichž základě se mění fyzikální veličiny v materiálovém bodě \mathbf{X} (resp. v malém objemu dV , který ho obklopuje), jedná se o tzv. *Lagrangeův* přístup. Jestliže se naopak soustředíme na pevně zvolený bod v prostoru \mathbf{x} , používáme přístup *Eulerův*. Výsledky obou přístupů jsou totožné, i když matematický zápis stejných zákonitostí může mít formálně jiný tvar. Podrobně se oběma přístupům budeme věnovat v kapitole 3.

2.3 Deformační gradient

Lokální změnu (deformaci) konfigurace materiálu v okolí materiálového bodu \mathbf{X} , který má v čase t polohu $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{X})$, popisuje tenzor \mathbf{F} definovaný jako

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{X}) = \nabla \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial X^j}(t, \mathbf{X}) \right), \quad (2.5)$$

ktej se nazývá *deformačním gradientem*. Z hlediska teorie transformace proměnných v diferenciálních výrazech se jedná o Jacobiho tenzor transformace souřadnic od materiálových souřadnic \mathbf{X} k prostorovým souřadnicím \mathbf{x} . Jelikož předpokládáme regulárnost transformace mezi souřadnicemi \mathbf{X} a \mathbf{x} , existuje též inverzní tenzor \mathbf{F}^{-1} , který lze zapsat

$$\mathbf{F}^{-1}(t, \mathbf{X}) = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}(t, \mathbf{X}) \right), \quad (2.6)$$

a který vyjadřuje Jacobiho tenzor přechodu od souřadnic \mathbf{x} k \mathbf{X} .

Deformační gradient je výchozí nástroj pro matematický popis deformace.

2.4 Integrály a derivace vektorových a tenzorových polí

Nechť $\mathcal{I} = (0, t_{\max})$ je časový interval a $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je oblast. Nechť

$$\begin{aligned} f &: \mathcal{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathbf{g} &: \mathcal{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{T} &: \mathcal{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}, \end{aligned}$$

je skalární, resp. vektorové, resp. tenzorové pole. Budeme používat následující formalismus:

- Operátor nabla funguje jen na prostorových souřadnicích

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) = (\partial_i)$$

tj. ve shodě s poznámkou 3 gradientem funkce, rozumíme výraz

$$\nabla f(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(t, \mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(t, \mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_3}(t, \mathbf{x}) \right)^T = (\partial_i f).$$

- Gradient vektorového pole \mathbf{g} je aplikován po složkách, tj.

$$\nabla \mathbf{g} = (\partial_j g_i) = (\nabla \otimes \mathbf{g})^T.$$

- Divergence vektorového pole je

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = \nabla \cdot \mathbf{g} = \partial_i g_i.$$

- Divergence tenzorového pole: operátor divergence $\nabla \cdot$ je aplikován na formální řádkový vektor složený ze sloupců tenzoru \mathbf{T} , tj.

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \nabla \cdot (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial x_j} = (\partial_j \tau_{ij}).$$

- Rotace (curl) vektorového pole

$$\operatorname{rot} \mathbf{g} \equiv \operatorname{curl} \mathbf{g} = \nabla \times \mathbf{g} = \varepsilon_{ijk} \partial_k g_l.$$

Věta. (Helmholtzova) Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast a $\mathbf{f} \in C^2(\Omega)^2$ je dvakrát diferencovatelné vektorové pole definované na Ω . Potom existuje skalární pole Φ a vektorové pole \mathbf{A} tak, že

$$\mathbf{f} = \nabla \Phi + \nabla \times \mathbf{A}.$$

Poznámka. Helmholtzova věta říká, že každé vektorové pole lze rozložit na součet *potenciální (nevírové, irrotational)* části $\nabla \Phi$ splňující $\nabla \times (\nabla \Phi) = \mathbf{0}$ a *solenoidální (bezzdrojové, divergence-free)* části $\nabla \times \mathbf{A}$ splňující $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$. Skalární pole Φ se nazývá skalární potenciál a \mathbf{A} se nazývá vektorový potenciál. Důkaz věty spočívá v nalezení vzorce pro oba tyto potenciály v integrálním tvaru.

- Laplaceův operátor Δ aplikovatelný na skalární i vektorové veličiny

$$\Delta f(t, \mathbf{x}) = \nabla \cdot \nabla f(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(t, \mathbf{x}) = \partial_{ii} f(t, \mathbf{x}),$$

$$\Delta \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = (\nabla \cdot \nabla \mathbf{g}(t, \mathbf{x})) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial x_i^2}(t, \mathbf{x}) = \partial_{ii} \mathbf{g}(t, \mathbf{x}).$$

- Integrál z vektoru a tenzoru přes prostorovou oblast Ω se rozumí po složkách a jeho výsledkem je opět vektor, resp. tenzor.

2.5 Materiálová derivace

Uvažujme libovolnou veličinu w , jejíž hodnota v materiálovém bodě \mathbf{X} a čase T je rovna $w(T, \mathbf{X})$. V pevně zvoleném bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ a v čase t je pak její hodnota $W(t, \mathbf{x})$. Kvůli korektnosti dalších úvah přitom až do konce kapitoly přistoupíme k označení času jako argumentu funkce w pomocí velkého písmene T a času jako argumentu funkce W pomocí malého písmene t . Přírůstek veličiny w za jednotku času v pevně zvoleném materiálovém bodě \mathbf{X} (v bodě, který jsme si na tělese označili křížkem a který se v průběhu času pohybuje) je roven parciální derivaci funkce w podle času, tj.

$$\frac{\partial w}{\partial T}(T, \mathbf{X}).$$

Podobně přírůstek této veličiny za jednotku času v pevně zvoleném bodě v prostoru \mathbf{x} , který se nehýbe, je roven parciální derivaci funkce W podle času, tj.

$$\frac{\partial W}{\partial t}(t, \mathbf{x}).$$

Zcela zřejmě se jedná o dvě obecně různé hodnoty. Ukažme si nyní, jak spolu souvisejí.

Zvolme si pevně materiálový bod \mathbf{X} . Jeho poloha v čase T je $\mathbf{x}(T, \mathbf{X})$, a proto platí

$$w(T, \mathbf{X}) = W(t(T, \mathbf{X}), \mathbf{x}(T, \mathbf{X})) = W(\Phi(T, \mathbf{X})),$$

kde vnitřní funkce $\Phi: \mathcal{I} \times V_0 \rightarrow \mathcal{I} \times \mathbb{R}^3$ má tvar

$$\Phi(T, \mathbf{X}) = (t(T, \mathbf{X}), x_1(T, \mathbf{X}), x_2(T, \mathbf{X}), x_3(T, \mathbf{X})) = (T, x_1(T, \mathbf{X}), x_2(T, \mathbf{X}), x_3(T, \mathbf{X})).$$

Je vidět, že první složkou zobrazení Φ je funkce t , jejíž hodnota je z předpokladu nezávislosti plynutí času na volbě souřadnic rovna

$$t(T, \mathbf{X}) = T.$$

Označení složek argumentu Φ a složek samotného Φ navzájem různými symboly nám však umožní korektně použít pravidlo o derivaci složené funkce. Platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial T}(T, \mathbf{X}) &= \sum_{k=1}^4 \frac{\partial W}{\partial \Phi_k}(\Phi(T, \mathbf{X})) \frac{\partial \Phi_k}{\partial T}(T, \mathbf{X}) \\ &= \frac{\partial W}{\partial t}(t(T, \mathbf{X}), \mathbf{x}(T, \mathbf{X})) \frac{\partial t}{\partial T}(T, \mathbf{X}) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial W}{\partial x_k}(t(T, \mathbf{X}), \mathbf{x}(T, \mathbf{X})) v_k(T, \mathbf{X}) \\ &= \frac{\partial W}{\partial t}(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})) + \mathbf{v}(T, \mathbf{X}) \cdot \nabla W(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})) \\ &= \frac{\partial W}{\partial t}(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})) + \mathbf{V}(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})) \cdot \nabla W(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Po poslední úpravě máme všechny funkce na pravé straně (2.7) zapsány ve stejném bodě $(t, \mathbf{x}) = (T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X}))$. Proto lze (2.7) ještě přepsat do operátorového tvaru

$$\frac{\partial w}{\partial T}(T, \mathbf{X}) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) W \Big|_{T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})} =: \frac{DW}{Dt}(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})), \quad (2.8)$$

kde poslední vztah definuje operátor tzv. *materiálové derivace*

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + V_i \partial_i.$$

Pro vektorové veličiny operátor materiálové derivace definujeme po složkách. Pro funkce

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= (w_1, w_2, w_3): \mathcal{I} \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{W} &= (W_1, W_2, W_3): \mathcal{I} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

definujeme

$$\left(\frac{D\mathbf{W}}{Dt} \right)_i = \frac{DW_i}{Dt}$$

a jestliže

$$\mathbf{w}(T, \mathbf{X}) = \mathbf{W}(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})),$$

tak potom

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial T}(T, \mathbf{X}) = \frac{D\mathbf{W}}{Dt}(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})).$$

2.6 Zrychlení materiálového bodu

Zrychlení materiálového bodu \mathbf{a} [LT^{-2}] budeme stejně jako v mechanice hmotných bodů definovat jako časovou derivaci rychlosti. V materiálovém popisu je proto zrychlení dáno vztahem

$$\mathbf{a}(T, \mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial T}(T, \mathbf{X}) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial T^2}(T, \mathbf{X}). \quad (2.9)$$

S využitím materiálové derivace definované vztahem (2.8) pak lze psát

$$\mathbf{a}(T, \mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial T}(T, \mathbf{X}) = \frac{D\mathbf{V}}{Dt}(T, \mathbf{x}(T, \mathbf{X})).$$

Po aplikaci inverzní transformace $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x})$, $T = T(t, \mathbf{x}) = t$ dostáváme

$$\mathbf{a}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x})) = \frac{D\mathbf{V}}{Dt}(t, \mathbf{x}). \quad (2.10)$$

Funkce $\frac{D\mathbf{V}}{Dt}$ podle rovnosti (2.10) představuje zrychlení materiálového bodu \mathbf{X} , který prochází místem \mathbf{x} v čase t . To je však definice funkce \mathbf{A} , která vrací hodnotu zrychlení v prostorových souřadnicích t, \mathbf{x} . Platí tedy

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{D\mathbf{V}}{Dt}(t, \mathbf{x}).$$

Poznámka. Tento výsledek lze formulovat i obecně. Jestliže veličina $\tilde{\mathbf{w}}$ popsaná v materiálových souřadnicích funkcí $\tilde{\mathbf{w}}(T, \mathbf{X})$ souvisí s veličinou \mathbf{w} vztahem

$$\tilde{\mathbf{w}}(T, \mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial T}(T, \mathbf{X}),$$

potom je tatáž veličina popsána v prostorových souřadnicích funkcí

$$\tilde{\mathbf{W}}(t, \mathbf{x}) = \frac{D\mathbf{W}}{Dt}(t, \mathbf{x}).$$

2.7 Proudnice a trajektorie

V daném čase $t \in \mathcal{J}$ je v oblasti $V(t)$ definováno rychlostní pole

$$\mathbf{V}(t, \cdot) : V(t) \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Křivka taková, která je v čase t v každém bodě tečná k rychlostnímu poli \mathbf{V} , se nazývá *proudnice* (angl. streamline). Zvolme bod $\mathbf{x}_0 \in V(t)$ a uvažujme křivku φ popsanou parametricky pomocí zobrazení

$$\varphi = (s \mapsto \varphi(s)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Potom jestliže φ je řešením Cauchyovy úlohy (soustavy ODR s počáteční podmínkou)

$$\frac{d\varphi}{ds} = \mathbf{V}(t, \varphi), \quad (2.11)$$

$$\varphi(0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.12)$$

tak φ je proudnice procházející bodem \mathbf{x}_0 . V rovnici (2.11) je t pevně daný parametr.

Poznámka. Parametrizace není dána jednoznačně, a proto lze substitucí $s = h(\bar{s})$ najít další soustavy ODR, jejichž řešení popisuje stejnou křivku φ .

Zvolme nyní bod $\mathbf{X}_0 \in V_0$. Křivka popisující jeho pohyb v čase

$$\tilde{\varphi} = \{ \mathbf{x}(t, \mathbf{X}_0) \mid t \in \mathcal{I} \}$$

se nazývá *trajektorie* bodu \mathbf{X}_0 a její (přirozená) parametrizace

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = (t \mapsto \mathbf{x}(t, \mathbf{X}_0)) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

splňuje soustavu ODR (viz (2.2) a (2.4))

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{\varphi}}}{dt} = \mathbf{V}(t, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{X}_0), \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{X}_0. \quad (2.14)$$

Na rozdíl od (2.11) vystupuje v rovnici (2.13) t jako nezávisle proměnná. Proto proudnice a trajektorie (křivky φ a $\tilde{\varphi}$) jsou obecně různé. Pouze v případě, kdy je rychlostní pole \mathbf{V} nezávislé na čase, proudnice a trajektorie splývají. Tehdy hovoříme o *stacionárním (ustáleném) proudění*.

2.8 Hypotéza kontinua

Nechť na \mathbb{R}^3 je definována klasická Lebesgueova míra m_3 a míra M . Materiálové těleso V považujeme za kontinuum [RG14, kapitola 1], jestliže pro každou (měřitelnou) podmnožinu $A \subset V$ platí

$$m_3(A) = 0 \implies M(A) = 0$$

(tj. míra M je spojitá vzhledem k m_3) a číslo $M(A)$ má fyzikální smysl hmotnosti množiny A . Dále nechť Ψ , resp. $\boldsymbol{\Psi}$ je míra (resp. vektorová míra) taková, že pro každý bod $\mathbf{x} \in V^0$ existuje limita

$$\psi(\mathbf{x}) = \lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{\Psi(B_R(\mathbf{x}))}{M(B_R(\mathbf{x}))},$$

resp.

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = \lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{\boldsymbol{\Psi}(B_R(\mathbf{x}))}{M(B_R(\mathbf{x}))},$$

kde

$$B_R(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{v} - \mathbf{x}| < R \}.$$

Funkci Ψ , (resp. $\boldsymbol{\Psi}$) nazýváme *extenzivní skálární (resp. vektorovou) fyzikální veličinou*. Pro libovolné $\mathcal{V} \subset V$ potom platí

$$\Psi(\mathcal{V}_0) = \int_{\mathcal{V}_0} \psi(\mathbf{x}) dM = \int_{\mathcal{V}_0} \psi(\mathbf{x}) \varrho(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathcal{V}_0) = \int_{\mathcal{V}_0} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) dM = \int_{\mathcal{V}_0} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) \varrho(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

kde

$$\varrho(\mathbf{x}) = \lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{M(B_R(\mathbf{x}))}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

je hmotnostní hustota.

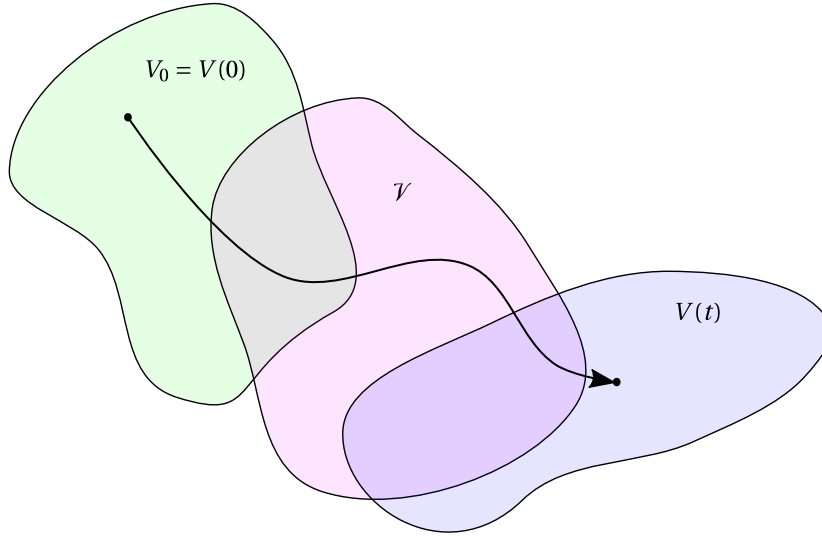
Poznámka.

$$\psi = \frac{d\Psi}{dM}, \quad \text{resp. } \boldsymbol{\psi} = \frac{d\boldsymbol{\Psi}}{dM}$$

je Radon-Nikodymova derivace míry Ψ , resp. $\boldsymbol{\Psi}$.

Například pro vektorovou míru vyjadřující hybnost \mathbf{P} máme „specifickou hybnost“, tj. rychlost v bodě \mathbf{x} definovanou jako

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{P}(B_R(\mathbf{x}))}{M(B_R(\mathbf{x}))}.$$



Obrázek 2.2: Eulerův přístup: pevně zvolený objem \mathcal{V} a materiálové těleso $V(t)$ pohybující se v čase.

2.9 Zákon zachování hmoty

Jako první odvodíme matematickou reprezentaci zákona zachování hmoty. Ukážeme si zde několik přístupů, s jejichž pomocí lze výsledek získat, a zároveň se přesvědčíme, že všechny vedou k témuž cíli.

2.9.1 Eulerův přístup s použitím konečného objemu

Jak jsme již nastínili v části 2.2.1, *Eulerův přístup* k popisu dynamiky kontinua spočívá v popisu zákonitostí, které mají vliv na vývoj fyzikálních veličin v pevně daném bodě prostoru \mathbf{x} , resp. v pevně daném (nehybném) objemu $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ s hranicí $\partial\mathcal{V}$ (obr. 2.2). Zákon zachování hmoty v objemu \mathcal{V} lze formulovat tak, že

úbytek hmoty v objemu \mathcal{V} je roven toku hmoty přes hranici $\partial\mathcal{V}$ ve směru ven z \mathcal{V} .

Jestliže $\rho(t, \mathbf{x})$ [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$] je veličina popisující hustotu materiálu v prostorovém bodě \mathbf{x} a v čase t , potom celková hmota M [kg] obsažená v objemu \mathcal{V} je

$$M(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

a její *úbytek* za jednotku času je roven

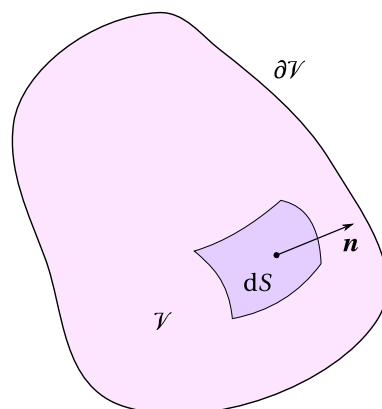
$$-\frac{dM}{dt}(t). \quad (2.15)$$

Nyní uvažujme nekonečně malou plošku $dS \subset \partial\mathcal{V}$ s normálou \mathbf{n} , která směřuje ven z objemu \mathcal{V} (obr. 2.3). Pro všechny body $\mathbf{x} \in dS$ uvažujeme stejnou rychlost proudění $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$. Složka rychlosti ve směru kolmém na dS je potom $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ a hmota, která projde ploškou dS za jednotku času, je rovna

$$\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Celkový tok hmoty ven z objemu \mathcal{V} přes hranici $\partial\mathcal{V}$ za jednotku času je roven plošnému integrálu II. druhu

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.16)$$



Obrázek 2.3: Eulerův přístup: pevně zvolený objem \mathcal{V} s hranicí $\partial\mathcal{V}$, ploška dS s vnější normálou \mathbf{n} .

Matematické vyjádření zákona zachování hmoty tedy dává do rovnosti vztahy (2.15) a (2.16) a vede k rovnici kontinuity v integrálním konzervativním tvaru

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathbf{x} + \int_{\partial\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (2.17)$$

Tuto rovnici lze dále upravit nejprve použitím Gaussovy věty (věta 7, kapitola 1) a věty o derivaci integrálu podle parametru (věta 4) postupně na

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathbf{x} &= 0, \\ \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] d\mathbf{x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Když uvážíme, že objem \mathcal{V} je volen zcela libovolně, může nulovost integrálu (2.18) zaručit pouze nulovost integrandu v celé oblasti, kde se nachází materiálové těleso, tj.

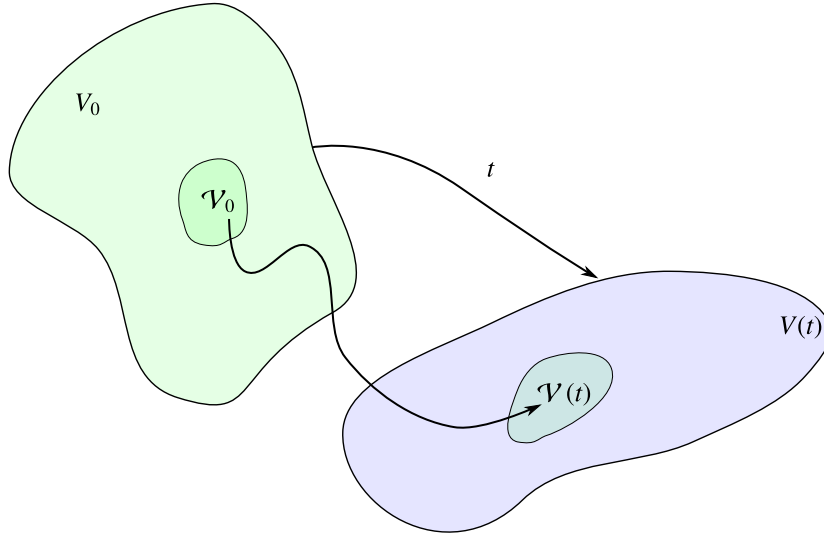
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_j (\rho V_j) = 0. \quad (2.19)$$

Rovnice (2.19) je parciální diferenciální rovnice a nazývá se *rovnici kontinuity v konzervativním (diferenciálním) tvaru*.

2.9.2 Lagrangeův přístup s použitím konečného objemu

Pro zajímavost přistoupíme i k odvození rovnice kontinuity pomocí *Lagrangeova přístupu*, který sleduje vývoj pevně zvoleného materiálového bodu, resp. množiny materiálových bodů $\mathcal{V}_0 \subset V_0$ (obr. 2.4). Celková hmota v tomto objemu je

$$M = \int_{\mathcal{V}_0} \rho(0, \mathbf{X}) d\mathbf{X} = \int_{\mathcal{V}_0} \rho(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$



Obrázek 2.4: Lagrangeův přístup: Materiálové těleso $V(t)$ a jeho vývoj v čase. V rámci $V(t)$ je zvolen objem $\mathcal{V}(t)$, který se pohybuje spolu s materiálovým tělesem.

V průběhu času množina materiálových bodů s touto (stále stejnou) hmotou M změní svůj tvar i velikost, takže zároveň platí

$$M = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.20)$$

pro každé $t \in \mathcal{I}$. Oblast, přes kterou probíhá integrál v (2.20), se v čase mění, a platí pro ní obecně $\mathcal{V}(t) \subset V(t)$ (viz část 2.2). Přejdem od prostorových souřadnic \mathbf{x} k materiálovým souřadnicím \mathbf{X} však dostaneme integrál přes časově neměnný objem \mathcal{V}_0 :

$$M = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}_0} \rho(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})) \left| \det \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right| d\mathbf{X} = \int_{\mathcal{V}_0} \rho(t, \mathbf{X}) |\det \mathbf{F}| d\mathbf{X}, \quad (2.21)$$

přičemž Jacobián transformace $\det \mathbf{F} = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right)$ je z předpokladu (2.3) nenulový a má stejné znaménko pro všechna $\mathbf{X} \in \mathcal{V}_0$. Lze tedy odstranit absolutní hodnotu a platí

$$\pm M = \int_{\mathcal{V}_0} \rho(t, \mathbf{X}) \det \mathbf{F} d\mathbf{X}.$$

Derivací této rovnosti podle času dostaneme *rovnici kontinuity v nekonzervativním integrálním tvaru*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_0} \rho(t, \mathbf{X}) \det \mathbf{F} d\mathbf{X} = 0. \quad (2.22)$$

Podobně jako v části 2.9.1 můžeme odvodit příslušný diferenciální tvar této rovnice. Záměnou integrálu a časové derivace podle věty 4 a uvážením, že objem \mathcal{V}_0 byl volen zcela libovolně, dojdeme k rovnosti

$$\frac{\partial (\rho \det \mathbf{F})}{\partial t} = 0, \quad (2.23)$$

což je rovnice kontinuity v nekonzervativním (diferenciálním) tvaru vyjádřená v materiálových souřadnicích.

Ukažme si, že rovnice (2.23) je ekvivalentní s rovnicí (2.19) odvozenou v části 2.9.1. Provedeme časovou derivaci součinu a obdržíme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \det \mathbf{F} + \rho \frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial t} = 0. \quad (2.24)$$

Nyní využijeme vztah (2.26) dokázaný jako Lemma 74 v následující části 2.10)

$$\frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial t} = \det \mathbf{F} \nabla \cdot \mathbf{V}.$$

Po vydělení nenulovým $\det \mathbf{F}$ získáme rovnost

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

a nakonec uplatníme definici materiálové derivace (2.8), čímž rovnice přejde na

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (2.25)$$

což je rovnice kontinuity v nekonzervativním (diferenciálním) tvaru vyjádřená v prostorových souřadnicích. Nyní již lze snadno získat vztah (2.19), když pouze rozepíšeme materiálovou derivaci

$$\frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0.$$

3.38

2.10 Reynoldsův transportní teorém

Nejprve ukážeme důležité pomocné tvrzení:

Lemma 74. Platí

$$\frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial t} = \det \mathbf{F} \nabla \cdot \mathbf{V}. \quad (2.26)$$

Důkaz. Za předpokladu dostatečné diferencovatelnosti funkce $\mathbf{x}(t, \mathbf{X})$ lze vyjít z vyjádření determinantu (1.18) a z definice \mathbf{F} (2.5), tj.

$$\det \mathbf{F} = \frac{1}{3!} \varepsilon_{IJK} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_I}{\partial X_i} \frac{\partial x_J}{\partial X_j} \frac{\partial x_K}{\partial X_k}.$$

s využitím záměny parciálních derivací $\partial/\partial t$ a $\partial/\partial X_*$ upravíme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial t} &= \frac{1}{3!} \varepsilon_{IJK} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_I}{\partial X_i} \frac{\partial x_J}{\partial X_j} \frac{\partial x_K}{\partial X_k} \right) \\ &= \frac{1}{3!} \varepsilon_{IJK} \varepsilon_{ijk} \left(\underbrace{\frac{\partial v_I}{\partial X_i} \frac{\partial x_J}{\partial X_j} \frac{\partial x_K}{\partial X_k} + \frac{\partial x_I}{\partial X_i} \frac{\partial v_J}{\partial X_j} \frac{\partial x_K}{\partial X_k} + \frac{\partial x_I}{\partial X_i} \frac{\partial x_J}{\partial X_j} \frac{\partial v_K}{\partial X_k}}_{\text{současná záměna } I \leftrightarrow J, i \leftrightarrow j \quad \text{současná záměna } I \leftrightarrow K, i \leftrightarrow k} \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\stackrel{\Rightarrow 3 \times \text{totéž}}{=} \frac{1}{2} \varepsilon_{IJK} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_I}{\partial X_i} \frac{\partial x_J}{\partial X_j} \frac{\partial x_K}{\partial X_k} = \frac{1}{2} \varepsilon_{IJK} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_I}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial X_i} \frac{\partial x_J}{\partial X_j} \frac{\partial x_K}{\partial X_k}. \quad (2.28)$$

Dle definice matice \mathbf{F}^{-1} a vyjádření jejích prvků pomocí kofaktorů (1.19) platí

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_I} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \Delta_{Ii} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \frac{1}{2} \varepsilon_{IJK} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_J}{\partial X_j} \frac{\partial x_K}{\partial X_k}.$$

Po dosazení do (2.28) dostáváme

$$\frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial t} = \det \mathbf{F} \frac{\partial X_i}{\partial x_I} \frac{\partial V_I}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial X_i} = \det \mathbf{F} \underbrace{\frac{\partial X_i}{\partial x_I} \frac{\partial x_\ell}{\partial X_i}}_{\delta_{I\ell}} \frac{\partial V_I}{\partial x_\ell} = \det \mathbf{F} \frac{\partial V_I}{\partial x_I} = \det \mathbf{F} \nabla \cdot \mathbf{V}.$$

□

Nyní necht' $\mathcal{V}_0 \subset V_0$ je pevně daný kontrolní objem materiálového tělesa a označme $\mathcal{V}(t) = \mathbf{x}(t, \mathcal{V}_0)$. Necht' $\phi : (0, T) \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ je libovolná funkce a definujme $\Phi(t, \mathbf{x}) = \phi(t, \mathbf{X})$ kde $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{X})$. Potom platí

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \Phi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_0} \Phi(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X})) |\det \mathbf{F}(t, \mathbf{X})| d\mathbf{X} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_0} \phi |\det \mathbf{F}| d\mathbf{X} \\ &= \int_{\mathcal{V}_0} \frac{\partial}{\partial t} (\phi(t, \mathbf{X}) |\det \mathbf{F}|) d\mathbf{X} = \int_{\mathcal{V}_0} \frac{\partial \phi}{\partial t} |\det \mathbf{F}| + \phi(t, \mathbf{X}) \frac{\partial |\det \mathbf{F}|}{\partial t} d\mathbf{X} \\ &= \int_{\mathcal{V}_0} \left(\frac{D\Phi}{Dt} + \Phi \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \Big|_{(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X}))} |\det \mathbf{F}| d\mathbf{X} \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{D\Phi}{Dt} + \Phi \nabla \cdot \mathbf{V} \Big|_{(t, \mathbf{x})} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Po rozepsání operátoru materiálové derivace dostáváme dále

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \Phi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \Phi + \Phi \nabla \cdot \mathbf{V} d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi \mathbf{V}) d\mathbf{x}. \quad (2.30)$$

Vztahy (2.29), resp. (2.30) se označují jako Reynoldsův transportní teorém.

2.10.1 Rovnice kontinuity jako důsledek Reynoldsova transportního teorému

Zákon zachování hmoty v libovolném objemu $\mathcal{V}_0 \subset V_0$, který se v čase $t > 0$ transformuje na objem $\mathcal{V}(t)$, lze formulovat jako

$$M(\mathcal{V}_0) = M(\mathcal{V}(t)) = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \text{konst.},$$

z čehož

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$$

Dosazením do (2.29), resp. (2.30) s volbou $\Phi = \rho$ dostáváme okamžitě

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathbf{x} = 0$$

bez ohledu na volbu \mathcal{V}_0 , a tedy i $\mathcal{V}(t)$, což znamená, že

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0.$$

To je rovnice kontinuity ve tvarech (2.25), resp. (2.19).

2.10.2 Reynoldsův transportní teorém pro specifické veličiny

Nechť $F : (0, T) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je libovolná funkce (fyzikální veličina definovaná na jednotku hmotnosti, tj. specifická veličina). Potom Dosazením $\Phi = \rho F$ do (2.29) dostáváme

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho F d\mathbf{x} = \int_{V(t)} \frac{D(\rho F)}{Dt} + \rho F \nabla \cdot \mathbf{V} d\mathbf{x} = \int_{V(t)} \rho \frac{DF}{Dt} + \underbrace{F \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \right)}_{=0 \text{ dle r. kontinuity (2.25)}} d\mathbf{x} = \int_{V(t)} \rho \frac{DF}{Dt} d\mathbf{x}. \quad (2.31)$$

2.11 Popis deformace

V této části odvodíme tvar některých matematických objektů, které popisují deformaci tekutiny v průběhu proudění. Studium těchto objektů spadá do oboru lineární a obecné elasticity, z nějž však vybíráme jen znalosti potřebné pro výklad dynamiky tekutin v kapitole 3. Při některých složitějších úpravách budeme pro přehlednost barevně zvýrazňovat některé členy v rovnicích, přičemž vždy upravujeme **červeně označený** výraz a získáváme výraz **modrý**.

Nechť *vektor posunutí* \mathbf{u} (v prostorovém popisu) je definován jako

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) - \mathbf{x}(0, \mathbf{X}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) - \mathbf{X} = (x_k(t, \mathbf{X}) - X_k) \mathbf{e}_k.$$

Uvažujme dva body $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in V_0$, jejichž vzájemné posunutí označíme jako

$$d\mathbf{X} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}.$$

V čase t se tyto body dostanou do polohy

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(t, \mathbf{X}), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{x}(t, \mathbf{Y}) = \mathbf{Y} + \mathbf{u}(t, \mathbf{Y}). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Pro jejich vzájemnou polohu platí v čase 0 a v čase t (přičemž závislosti na t nyní pro přehlednost vypouštíme)

$$\begin{aligned} d\mathbf{X} &= \mathbf{Y} - \mathbf{X}, \\ d\mathbf{x} &= \mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) \\ &= \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) + \nabla \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X} + \mathbf{o}(d\mathbf{X}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) \\ &= \nabla \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X} + \mathbf{o}(d\mathbf{X}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X} + \mathbf{o}(d\mathbf{X}), \end{aligned} \quad (2.33)$$

kde jsme použili Taylorův rozvoj $\mathbf{x}(t, \cdot)$ do 1. řádu, tj. platí

$$\lim_{d\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{o}(d\mathbf{X})}{\|d\mathbf{X}\|} = \mathbf{0}.$$

Rozepsáním (2.33) po složkách dostáváme

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j + \mathbf{o}(d\mathbf{X}). \quad (2.34)$$

Dále definujeme (v bodě (t, \mathbf{X}))

$$\mathbf{H} = \nabla \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) = \left(\frac{\partial (x_i - X_i)}{\partial X_j} \right) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) = \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad (2.35)$$

a dosazením (2.35) do (2.33) dostáváme vyjádření pomocí vektoru posunutí

$$d\mathbf{x} = (\mathbf{H} + \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{X} + \mathbf{o}(d\mathbf{X}) = d\mathbf{X} + \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{X} + \mathbf{o}(d\mathbf{X}) \quad (2.36)$$

2.11.1 Lagrangeův deformační tenzor

Pro velikost vektoru vzájemné polohy tj. vzdálenost bodů \mathbf{x}, \mathbf{y} , platí

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{dx}\|^2 &= \|\mathbf{dX} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{dX} + \mathbf{o}(\mathbf{dX})\|^2 = \left(\mathbf{dX}_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \mathbf{dX}_j + \mathbf{o}(\mathbf{dX}) \right) \left(\mathbf{dX}_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \mathbf{dX}_k + \mathbf{o}(\mathbf{dX}) \right) \\
 &= \mathbf{dX}_i \mathbf{dX}_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \mathbf{dX}_j \mathbf{dX}_i + \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial X_k} \mathbf{dX}_i \mathbf{dX}_k}_{\text{značení indexů: } i \rightarrow j, k \rightarrow i} + \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \mathbf{dX}_j \mathbf{dX}_k}_{\text{značení indexů: } i \rightarrow k} + \mathbf{o}(\mathbf{dX}) \\
 &= \|\mathbf{dX}\|^2 + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \mathbf{dX}_j \mathbf{dX}_i + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \mathbf{dX}_j \mathbf{dX}_i + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \mathbf{dX}_j \mathbf{dX}_i + \mathbf{o}(\mathbf{dX}) \\
 &= \|\mathbf{dX}\|^2 + 2\epsilon_{ij} \mathbf{dX}_i \mathbf{dX}_j + \mathbf{o}(\mathbf{dX}), \tag{2.37}
 \end{aligned}$$

kde \mathbf{e} je tzv. (Lagrangeův) *tenzor deformace*

$$\mathbf{e} = (\epsilon_{ij}), \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right). \tag{2.38}$$

Zanedbáním kvadratických členů v (2.38) získáme symetrický *tenzor malých deformací*

$$\tilde{\mathbf{e}} = (\tilde{\epsilon}_{ij}), \quad \tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right). \tag{2.39}$$

To však dle (1.15) není nic jiného než symetrická část tenzoru $\nabla \mathbf{u}$.

Po dosazení do (2.36) a využití (1.15) a (1.16) dostáváme

$$\mathbf{dx} + \mathbf{o}(\mathbf{dX}) = \mathbf{dX} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{dX} = \mathbf{dX} + (\nabla \mathbf{u})_{\text{sym}} \cdot \mathbf{dX} + (\nabla \mathbf{u})_{\text{skew}} \cdot \mathbf{dX} = \mathbf{dX} + \tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{dX} + \mathbf{w} \times \mathbf{dX},$$

kde dle (1.15) a (1.17) platí

$$(\nabla \mathbf{u})_{\text{skew}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \right) = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix},$$

z čehož

$$\mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{u}.$$

Návratem k (2.32) a odečtením obou rovnic dostáváme

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(t, \mathbf{Y}) &= \mathbf{u}(t, \mathbf{X}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x}) - (\mathbf{Y} - \mathbf{X}) \\
 &= \mathbf{u}(t, \mathbf{X}) + \mathbf{dx} - \mathbf{dX} \\
 &= \mathbf{u}(t, \mathbf{X}) + \tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{dX} + \mathbf{w} \times \mathbf{dX} + \mathbf{o}(\mathbf{dX}).
 \end{aligned}$$

To znamená, že posun bodu \mathbf{Y} lze rozložit na

- $\mathbf{u}(t, \mathbf{X})$... posun libovolného referenčního bodu \mathbf{X} ,
- $\tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{dX}$... dilataci/kontrakci polohy \mathbf{Y} vzhledem k \mathbf{X} (Symetrický tenzor $\tilde{\mathbf{e}}$ je diagonalizovatelný, má reálná vlastní čísla a k nim příslušné tři vlastní vektory, které představují tři hlavní směry dilatace, resp. kontrakce)
- $\mathbf{w} \times \mathbf{dX}$... rotaci \mathbf{Y} kolem bodu \mathbf{X}
- $\mathbf{o}(\mathbf{dX})$... deformaci řádu vyššího, než je vzdálenost bodů \mathbf{X}, \mathbf{Y}

2.11.2 Tenzor rychlosti deformace

Zderivováním rovnosti (2.33) podle času získáváme rychlost změny $d\mathbf{x}$ v závislosti na čase (pro pevné \mathbf{X}, \mathbf{Y}), neboli

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} \nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X} = \nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial X_j} dX_j \right),$$

kde tenzor $\nabla \mathbf{v}(t, \mathbf{X}) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial X_j} \right)$ je *gradient rychlosti* [Rud19] v materiálových souřadnicích. S využitím (2.34) lze dále upravit

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial X_j} dX_j \right) = \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_j \right) = \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} dx_k \right) + \mathbf{o}(d\mathbf{X}) = \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} dx_j \right) + \mathbf{o}(d\mathbf{X}) = \nabla V(t, \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{o}(d\mathbf{X}),$$

kde tenzor $\nabla V(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right)$ je gradient rychlosti v aktuálních souřadnicích.

Relativní rychlost prodloužení úsečky mezi materiálovými body \mathbf{X}, \mathbf{Y} , které jsou v čase t na pozici \mathbf{x}, \mathbf{y} vzdálených od sebe $\|d\mathbf{x}\|$ lze vyjádřit jako

$$\frac{\frac{d}{dt} \|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{x}\|} = \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dt} (\|d\mathbf{x}\|^2)}{\|d\mathbf{x}\|^2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dt} (2\varepsilon_{ij} dX_i dX_j)}{\|d\mathbf{x}\|^2} = \frac{1}{2} \frac{2\dot{\varepsilon}_{ij} dX_i dX_j}{\|d\mathbf{x}\|^2} \quad (2.40)$$

a dále upravujeme výraz

$$\begin{aligned} 2\dot{\varepsilon}_{ij} dX_i dX_j &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) dX_i dX_j \\ &= \left(\frac{\partial v_i}{\partial X_j} + \frac{\partial v_j}{\partial X_i} + \frac{\partial v_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial v_k}{\partial X_i} \right) dX_i dX_j \\ &= 2 \left(\frac{\partial v_j}{\partial X_i} + \frac{\partial v_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) dX_i dX_j. \end{aligned}$$

S použitím (2.35) pokračujeme v úpravách

$$\begin{aligned} 2\dot{\varepsilon}_{ij} dX_i dX_j &= 2 \left(\frac{\partial v_j}{\partial X_i} + \frac{\partial v_k}{\partial X_j} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} - \delta_{ik} \right) \right) dX_i dX_j = 2 \left(\frac{\partial v_j}{\partial X_i} - \frac{\partial v_i}{\partial X_j} + \frac{\partial v_k}{\partial X_j} \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \right) dX_i dX_j \\ &= 2 \left(\underbrace{\frac{\partial v_j}{\partial X_i} dX_i dX_j - \frac{\partial v_i}{\partial X_j} dX_i dX_j}_{=0 \text{ (jen přeznačení indexů } i, j)} + \frac{\partial v_k}{\partial X_j} \frac{\partial x_k}{\partial X_i} dX_i dX_j \right) \\ &= 2 \frac{\partial v_k}{\partial X_j} \frac{\partial x_k}{\partial X_i} dX_i dX_j = 2 \frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial X_j} \frac{\partial x_k}{\partial X_i} dX_i dX_j = 2 \frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_k}{\partial X_i} dX_i \frac{\partial x_\ell}{\partial X_j} dX_j \end{aligned}$$

a s využitím (2.34) nakonec dostáváme

$$\begin{aligned} 2\dot{\varepsilon}_{ij} dX_i dX_j &= 2 \frac{\partial V_k}{\partial x_\ell} dx_k dx_\ell + \mathbf{o}(\|d\mathbf{x}\|^2) \stackrel{(k,l) \sim (i,j) \text{ a } (j,i)}{=} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \mathbf{o}(\|d\mathbf{x}\|^2) \\ &= \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j + \mathbf{o}(\|d\mathbf{x}\|^2). \end{aligned}$$

Po dosazení zpět do (2.40) máme

$$\frac{\frac{d}{dt} \|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{x}\|} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{dx_i dx_j}{dx_k dx_k} + \mathbf{O}(d\mathbf{x}) = \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{O}(d\mathbf{x}),$$

kde

$$\mathbf{D} = (d_{ij}) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right) = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T] \quad (2.41)$$

je *tenzor rychlosti deformace* (strain rate tensor) v aktuálních souřadnicích a $\boldsymbol{\alpha}$ je jednotkový vektor ve směru $d\mathbf{x}$. \mathbf{D} je symetrickou částí tenzoru gradientu rychlosti $\nabla \mathbf{V}$.

Rovnice dynamiky tekutin

Matematický popis dynamiky kontinua, tj. popis pohybu a deformace daného materiálového tělesa v závislosti na působení vnějších a vnitřních sil, lze jednoznačně odvodit ze zákonů zachování v klasické mechanice, tj.

1. zákona zachování hmoty (Lomonosov 1758, Lavoisier 1774) - viz rovnice continuity (3),
2. zákona zachování hybnosti (přímý důsledek tří Newtonových pohybových zákonů)
3. zákona zachování energie (první zákon termodynamiky),

a dále z fyzikálních vlastností materiálu.

3.1 Síly a II. Newtonův zákon v tekutině

- postulát: v kontinuu existují jen povrchové a objemové síly (mělo by být možné dokázat - viz [Tru92])
- Specifická objemová síla \mathbf{F} , resp. intenzita objemové síly \mathbf{F}_V jsou definovány limitou

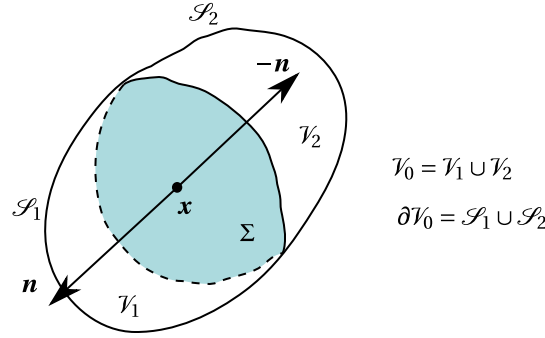
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{F}_V(B_R(\mathbf{x}))}{M(B_R(\mathbf{x}))} = \lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{F}_V(B_R(\mathbf{x}))}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{M(B_R(\mathbf{x}))} = \frac{1}{\varrho(\mathbf{x})} \lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{F}_V(B_R(\mathbf{x}))}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

- povrchová síla působící na jednotku plochy v bodě \mathbf{x} s normálovým vektorem $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ je

$$\mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})).$$

Fakt, že \mathbf{T} nezávisí na dalších vlastnostech plochy, tj. např. na střední křivosti (*mean curvature*) $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$ či vyšších derivacích normálového vektoru, je předmětem tzv. Cauchyho hypotézy, kterou v r. 1957 dokázal Walter Noll s využitím Cauchyho fundamentálního lemmatu (které dokážeme níže) [Tru92], [Gur81, str. 97].

- vnitřní a vnější síly
 - vnitřní působí v rámci sledovaného systému
 - vnější působí prostřednictvím objektů mimo sledovaný systém



Obrázek 3.1: K odvození Cauchyho lemmatu, tj. principu akce a reakce povrchových sil

Formulujeme zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti v obecném tvaru (zákon síly). Necht' opět je $\mathcal{V}_0 \subset V_0$ pevně ale libovolně zvolený kontrolní objem materiálového tělesa. Hybnost hmoty, která tento objem vyplňuje a v čase t se dostane do objemu $\mathcal{V}(t)$, podléhá zákonu síly

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{V} d\mathbf{x} = \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) dS + \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{F} d\mathbf{x} \quad (3.1)$$

a moment hybnosti této hmoty (vzhledem k počátku souřadné soustavy¹) splňuje

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{V} d\mathbf{x} = \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) dS + \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{F} d\mathbf{x}. \quad (3.2)$$

Od vztahu (3.1) platného nezávisle na volbě objemu \mathcal{V}_0 dojdeme k diferenciálním rovnicím popisujícím bilanci (zákon zachování) hybnosti. Vztah (3.2) nevede k další nezávislé rovnici popisující proudění, neboť moment hybnosti (*angular momentum*) každého konečného objemu \mathcal{V}_0 lze popsat pomocí hybností (*linear momentum*) elementárních podobobjemů $d\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_0$, splňujících (3.1). Vztah (3.2) má však při $|\mathcal{V}_0| \rightarrow 0$ důsledky pro tvar síly $\mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n})$, které si vzápětí ukážeme.

3.2 Tenzor napětí

Uvažujme rozdělení objemu \mathcal{V}_0 na dvě části $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ a hranici mezi nimi označme Σ . Příslušné množiny v čase $t > 0$ mají tvar $\mathbf{x}(t, \mathcal{V}_1)$, $\mathbf{x}(t, \mathcal{V}_2)$, $\mathbf{x}(t, \Sigma)$. Je-li \mathbf{n} vnější normálou k $\mathbf{x}(t, \mathcal{V}_1)$ v bodě $\xi \in \mathbf{x}(t, \Sigma)$, pak je $-\mathbf{n}$ vnější normálou k $\mathbf{x}(t, \mathcal{V}_2)$ ve stejném bodě. Formulujeme-li (3.1) zvlášť pro $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, dostaneme

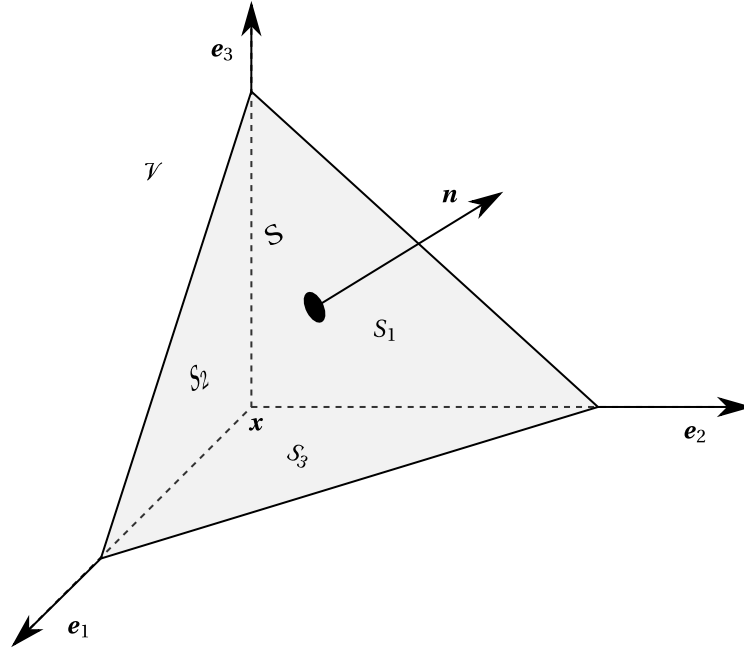
$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{x}(t, \mathcal{V}_1)} \rho \mathbf{V} d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{x}(t, \Sigma)} \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) dS + \int_{\mathbf{x}(t, \mathcal{S}_1)} \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) dS + \int_{\mathbf{x}(t, \mathcal{V}_1)} \rho \mathbf{F} d\mathbf{x}, \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{x}(t, \mathcal{V}_2)} \rho \mathbf{V} d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{x}(t, \Sigma)} \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, -\mathbf{n}) dS + \int_{\mathbf{x}(t, \mathcal{S}_2)} \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) dS + \int_{\mathbf{x}(t, \mathcal{V}_2)} \rho \mathbf{F} d\mathbf{x}. \quad (3.4)$$

Sečtením (3.3)-(3.4) dostáváme

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{V} d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{x}(t, \Sigma)} [\mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) + \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, -\mathbf{n})] dS + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) dS + \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{F} d\mathbf{x} \quad (3.5)$$

¹Bilanci momentu hybnosti vzhledem k libovolnému bodu \mathbf{x}_0 bychom získali nahrazením \mathbf{x} výrazem $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ v (3.2).



Obrázek 3.2: Argument čtyřstěnu k odvození existence tenzoru napětí. Bez újmy na obecnosti je jeden z vrcholů čtyřstěnu zobrazen v počátku souřadné soustavy, tj. $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$.

a odečtením (3.1) nakonec

$$\int_{\mathbf{x}(t, \Sigma)} [\mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) + \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, -\mathbf{n})] dS = 0.$$

Vzhledem k tomu, že příslušný objem \mathcal{V}_0 i jeho řez Σ byly voleny libovolně, musí platit

$$\mathbf{T}(t, \mathbf{x}, -\mathbf{n}) = -\mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad \forall \mathbf{x}, \forall \mathbf{n},$$

což je tzv. Cauchyho fundamentální lemma a jde de facto o III. Newtonův zákon (zákon akce a reakce).

Představme si nyní takový kontrolní objem \mathcal{V}_0 , že jeho tvar v čase t je čtyřstěn $\mathcal{V} := \mathcal{V}(t) = \mathbf{x}(t, \mathcal{V}_0)$, jehož tři stěny S_1, S_2, S_3 jsou kolmé k osám souřadné soustavy (obr. 3.2). Vnější normála k stěně S_i je $\mathbf{n}_i = -\mathbf{e}_i$. Čtvrtá stěna S má jednotkový vektor vnější normály \mathbf{n} . Podle věty o střední hodnotě lze vyjádřit působení povrchových sil na čtyřstěn jako

$$\int_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})) dS = \mathbf{T}(t, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}) |S| + \mathbf{T}(t, \boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{n}_1) |S_1| + \mathbf{T}(t, \boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{n}_2) |S_2| + \mathbf{T}(t, \boldsymbol{\xi}_3, \mathbf{n}_3) |S_3|, \quad (3.6)$$

kde $\boldsymbol{\xi}_j \in S_j$, $\boldsymbol{\xi} \in S$. Dále:

- Z Cauchyho lemmatu platí $\mathbf{T}(t, \boldsymbol{\xi}_j, \mathbf{n}_j) = \mathbf{T}(t, \boldsymbol{\xi}_j, -\mathbf{e}_j) = -\mathbf{T}(t, \boldsymbol{\xi}_j, \mathbf{e}_j)$.
- Plocha S_j je projekcí plochy S do roviny souřadné soustavy s normálou \mathbf{e}_j , a proto její obsah splňuje

$$\frac{|S_j|}{|S|} = n_j,$$

kde $\mathbf{n} = (n_j)$. n_j je totiž projekce normálového vektoru \mathbf{n} do směru \mathbf{e}_j .

Dosazením těchto faktů do (3.6) dostáváme dle (3.1) bilanci hybnosti pro čtyřstěn \mathcal{V} v podobě

$$\frac{d}{dt} (\rho v) \Big|_{(t, \xi_\nu)} |\mathcal{V}| = (\mathbf{T}(t, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}) - \mathbf{T}(t, \boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{e}_1) n_1 - \mathbf{T}(t, \boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{e}_2) n_2 - \mathbf{T}(t, \boldsymbol{\xi}_3, \mathbf{e}_3) n_3) |\mathcal{S}| + \rho F \Big|_{(t, \tilde{\xi}_\nu)} |\mathcal{V}|, \quad (3.7)$$

kde byla opět využita věta o střední hodnotě pro objemové integrály, tj. $\in \mathcal{V}_0$, $\boldsymbol{\xi}_\nu, \tilde{\xi}_\nu \in \mathcal{V}$. Škálujeme nyní všechny strany čtyřstěnu \mathcal{V} fakorem ϵ . Protože $|\mathcal{S}| = O(\epsilon^2)$ a $|\mathcal{V}| = O(\epsilon^3) = o(\epsilon)$, tak vydělením (3.7) číslem ϵ^2 a provedením limity $\epsilon \rightarrow 0$ dostáváme

$$0 = \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) - \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{e}_1) n_1 - \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{e}_2) n_2 - \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{e}_3) n_3,$$

neboli

$$\mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}, \quad (3.8)$$

kde

$$\mathbf{T}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{e}_1) & \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{e}_2) & \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{e}_3) \end{pmatrix} = (\mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{e}_j)_i) = (\tau_{ij})$$

je tenzor napětí, jehož j -tý sloupec vyjadřuje vektor povrchové síly působící na jednotkovou plochu s normálou \mathbf{e}_j .

3.2.1 Symetrie tenzoru napětí

S využitím (3.8) lze přepsat plošný integrál v (3.2) do tvaru

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{V}(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) dS &= \int_{\partial \mathcal{V}(t)} \mathbf{x} \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{\partial \mathcal{V}(t)} \varepsilon_{ijk} x_j (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_k \mathbf{e}_i dS = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \int_{\partial \mathcal{V}(t)} x_j \tau_{kl} n_l dS. \\ &\dots \text{dle Greenovy formule (věta 5)} \dots \\ &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j \tau_{kl}) d\mathbf{x} = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \int_{\mathcal{V}(t)} \left(\delta_{jl} \tau_{kl} + x_j \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_l} \right) d\mathbf{x} \\ &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \int_{\mathcal{V}(t)} \left(\tau_{kj} + x_j \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_l} \right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Na levou stranu (3.2) použijeme Reynoldsův transportní teorém pro specifické veličiny (2.31) a dostáváme

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{V} d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \times \mathbf{V}) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \left(\underbrace{\frac{D\mathbf{x}}{Dt} \times \mathbf{V} + \mathbf{x} \times \frac{D\mathbf{V}}{Dt}}_{= \mathbf{V} \times \mathbf{V} = 0} \right) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \left(\mathbf{x} \times \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \right) d\mathbf{x}. \quad (3.10)$$

Po dosazení obou takto upravených členů (3.9) a (3.10) zpět do (3.2) máme již všechny členy pod objemovým integrálem

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \rho \left(\mathbf{x} \times \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \right) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \left(\tau_{kj} + x_j \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_l} \right) d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{F} d\mathbf{x}. \quad (3.11)$$

Nyní označme $\epsilon = \text{diam } \mathcal{V}(t)$ a bez újmy na obecnosti volme \mathcal{V}_0 tak, aby $\mathbf{0} \in \mathcal{V}(t)$. To pouze znamená, že reprezentujeme moment hybnosti vůči bodu, který je uvnitř $\mathcal{V}(t)$, a odpovídá to příslušné volbě \mathbf{x}_0 v (3.2) - viz poznámka 1 na straně 54. Potom ovšem $\|\mathbf{x}\| = O(\epsilon)$. Jestliže vydělíme (3.11) ϵ^3 , budeme škálovat objem $\mathcal{V}(t)$ kolem bodu $\mathbf{0}$ ($=\mathbf{x}_0$) a provedeme limitní přechod pro $\epsilon \rightarrow 0$, všechny členy v (3.11) násobené \mathbf{x} budou mít limitu rovnou nule a zbude jediný člen, pro který tedy musí platit

$$\varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \tau_{kj} \Big|_{(t, \mathbf{x}_0)} = \mathbf{0}.$$

Po složkách tedy platí

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1jk}\tau_{kj} = 0 &\iff \tau_{23} = \tau_{32}, \\ \varepsilon_{2jk}\tau_{kj} = 0 &\iff \tau_{13} = \tau_{31}, \\ \varepsilon_{3jk}\tau_{kj} = 0 &\iff \tau_{12} = \tau_{21},\end{aligned}$$

což znamená, že tenzor napětí \mathbf{T} je symetrický. Má tedy reálná vlastní čísla a tři na sebe kolmé vlastní vektory, které se nazývají *hlavní napětí* (*principal stresses*), resp. *hlavní směry napětí* (*principal stress directions*).

3.3 Rovnice zákona zachování hybnosti v obecném tvaru

Vezměme rovnici

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{V} d\mathbf{x} = \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathbf{T}(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) dS + \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{F} d\mathbf{x}. \quad (3.1)$$

i -tá složka této vektorové rovnice udává bilanci i -té složky hybnosti, tj.

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho V_i d\mathbf{x} = \int_{\partial\mathcal{V}(t)} T_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{n}) dS + \int_{\mathcal{V}(t)} \rho F_i d\mathbf{x}. \quad (3.12)$$

Využitím Reynoldsova transportního teorému s volbou $\Phi = \rho V_i$ a vztahu 3.8 dostáváme dosazením do (3.12)

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \nabla \cdot (\rho V_i \mathbf{V}) d\mathbf{x} = \int_{\partial\mathcal{V}(t)} (\mathbf{T}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n})_i dS + \int_{\mathcal{V}(t)} \rho F_i d\mathbf{x},$$

což lze zapsat s využitím Einsteinovy sumace také jako

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \partial_j (\rho V_i V_j) d\mathbf{x} = \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \tau_{ij} n_j dS + \int_{\mathcal{V}(t)} \rho F_i d\mathbf{x}, \quad (3.13)$$

Dále aplikujeme Greenovu formuli na plošný integrál v (3.13), čímž získáme

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \partial_j (\rho V_i V_j) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \partial_j \tau_{ij} d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{V}(t)} \rho F_i d\mathbf{x}.$$

Vzhledem k libovolné volbě objemu \mathcal{V} musí též platit rovnost integrandů

$$\frac{\partial (\rho V_i)}{\partial t} + \partial_j (\rho V_i V_j) = \partial_j \tau_{ij} + \rho F_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.14)$$

což je *zákon zachování hybnosti v konzervativním* (diferenciálním) *tvaru* pro obecnou tekutinu. Systém rovnic (3.14) lze s využitím $V_i V_j = (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V})_{ij}$ přepsat i ve vektorovém tvaru

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F}. \quad (3.15)$$

Alternativně lze pro úpravu levé strany (3.12) využít místo (2.30) Reynoldsova transportního teorému pro specifické veličiny (2.31) a tím získat zákon zachování hybnosti v nekonzervativním tvaru

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = \partial_j \tau_{ij} + \rho F_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.16)$$

resp. ve vektorovém tvaru

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{F}. \quad (3.17)$$

3.4 Jednoduché tekutiny

Tekutina se nazývá *jednoduchá*, jestliže tenzor napětí (3.8) má tvar

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + \mathbf{T}_D \quad (3.18)$$

kde

$$\mathbf{T}_D = (\tilde{\tau}_{ij}) \quad (3.19)$$

je tzv. *dynamický tenzor (viskózního) napětí (viscous stress tensor)*, který závisí na t, \mathbf{x} pouze prostřednictvím rychlosti pohybu tekutiny a jejích derivací tak, že $\mathbf{T}_D = \mathbf{0}$ všude, kde jsou \mathbf{V} a její derivace rovny nule. Skalární veličina P se nazývá (*termodynamický, resp. hydrostatický*) tlak [Haz13], který odpovídá síle na jednotku plochy působící kolmo na danou plochu v materiálovém tělese, které je v klidu. Platí pro něj $P = P(\rho, T)$, kde T je absolutní (termodynamická) teplota, a je dán stavovou rovnicí tekutiny (viz část 6.2.1). Zákon zachování hybnosti má pro jednoduchou tekutinu tvar (konzervativní, resp. nekonzervativní)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \partial_j(\rho V_i V_j) = \\ \rho \frac{DV_i}{Dt} = -\partial_i P + \partial_j \tilde{\tau}_{ij} + \rho F_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

resp. ve vektorovém tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = \\ \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \mathbf{T}_D + \rho \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Předmětem našeho dalšího studia budou pouze jednoduché tekutiny.

3.5 Newtonovské tekutiny a Navierovy-Stokesovy rovnice

V této části odvodíme konstitutivní vztahy pro dynamický tenzor napětí \mathbf{T}_D pro tzv. newtonovské tekutiny, což je model použitelný pro řadu tekutin, s nimiž se v praxi často setkáváme (vzduch, voda, olej, ...). Teorii konstitutivních vztahů lze však budovat mnohem rigoróznějším způsobem, který je nad rámec tohoto předmětu [Mar11, Haz13].

3.5.1 Objektivní veličiny

Tvar tenzoru napětí (a obecně dalších termodynamických veličin, jako je Helmholtzova volná energie, které zde neuvažujeme), závisí v konkrétním materiálu na intenzivních fyzikálních veličinách, které jsou tzv. *objektivní* [Haz13, kapitola 5], tj. nezávislé na transformaci souřadné soustavy ve tvaru

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} + \mathbf{C}(t), \quad (3.22)$$

kde \mathbf{C} je vektor translace a \mathbf{Q} je časově závislá ortogonální transformace. Vektorová veličina \mathbf{A} se nazývá objektivní, jestliže se její velikost nemění transformací souřadnic. Konkrétně pro vektor vzájemné polohy

$$\mathbf{A} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$$

platí s užitím (3.22)

$$\mathbf{A}' = \mathbf{Q}(t) \mathbf{A},$$

z čehož (s využitím $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$) plyne

$$\|\mathbf{A}'\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2.$$

Podobně tenzor \mathbf{M} (jakožto matice – viz část 1.2.8) je objektivní, právě když transformuje objektivní vektory na objektivní vektory, tj.

$$\mathbf{M}' \mathbf{A}' = \mathbf{Q}(t) \mathbf{M} \mathbf{A},$$

z čehož

$$\mathbf{M}' = \mathbf{Q}^T \mathbf{M} \mathbf{Q}. \quad (3.23)$$

Naopak např. vektory rychlosti a zrychlení objektivní nejsou. S použitím (3.23) lze ukázat, že gradient rychlosti $\nabla \mathbf{V}$ není objektivní veličinou, ale jeho symetrická část, tj. tenzor rychlosti deformace \mathbf{D} daný vztahem (2.41), objektivní je. Proto budeme uvažovat závislost \mathbf{T}_D na rychlosti mechanické deformace právě prostřednictvím \mathbf{D} .

3.5.2 Newtonovské tekutiny

Předpokládejme, že \mathbf{T}_D je závislý pouze na tenzoru rychlosti deformace \mathbf{D} (tj. není závislý např. na gradientu teploty). Navíc předpokládejme, že tekutina nemá žádnou vnitřní strukturu a je tzv. izotropní (její vlastnosti jsou nezávislé na směru). To znamená, že \mathbf{T}_D je izotropní tenzorovou funkcí \mathbf{D} . Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je funkce $\mathbf{F}(\mathbf{D}) = \mathbf{D}^n = \underbrace{\mathbf{D} \mathbf{D} \mathbf{D} \cdots \mathbf{D}}_{n \times}$ zřejmě izotropní, protože dle definice (1.20) platí pro ortogonální \mathbf{Q}

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{F}(\mathbf{D}) \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{D}^n \mathbf{Q} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q})^n = \mathbf{F}(\mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q}).$$

Navíc tenzor \mathbf{D} je symetrický, takže i každá jeho mocnina splňuje $(\mathbf{D}^n)^T = \mathbf{D}^n$. Uvažujme tedy závislost ve tvaru konečného součtu [Haz13, kap. 7]

$$\mathbf{T}_D(\mathbf{D}) = \sum_n \tilde{\alpha}_n \mathbf{D}^n,$$

kde $\tilde{\alpha}_n$ jsou čísla, která už nemohou být závislá na prvcích tenzoru $\mathbf{D} = (d_{ij})$ v konkrétní bázi, ale mohou být závislá na jeho invariantech. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat závislost na hlavních invariantech (viz část 1.2.10)

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\mathbf{D} I_1, \mathbf{D} I_2, \mathbf{D} I_3),$$

protože jakýkoliv další invariant z nich lze jednoznačně dopočítat. Potom \mathbf{T}_D bude symetrický tenzor a bude izotropní funkcí \mathbf{D} . Dle Cayleyho-Hamiltonovy věty platí

$$l(\mathbf{D}) = -\mathbf{D}^3 + \mathbf{D} I_1 \mathbf{D}^2 - \mathbf{D} I_2 \mathbf{D} + \mathbf{D} I_3 \mathbf{I} = \mathbf{0},$$

což znamená, že všechny mocniny \mathbf{D}^n pro $n \geq 3$ lze vyjádřit pomocí $\mathbf{I}, \mathbf{D}, \mathbf{D}^2$ a invariantů. Lze proto napsat

$$\mathbf{T}_D(\mathbf{D}) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{D} + \alpha_2 \mathbf{D}^2 \quad (3.24)$$

pro jistá $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, která jsou funkcemi ${}_D I_1, {}_D I_2, {}_D I_3$. Toto je obecný konstitutivní vztah pro tzv. *Reinerovy-Rivlinovy* tekutiny [Haz13, kap. 7].

Jestliže ovšem uvažujeme striktně lineární závislost na \mathbf{D} , dostáváme konstitutivní vztah pro *newtonovské* tekutiny. V tom případě zřejmě musí $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \text{konst.}$ a α_0 může být pouze ve tvaru

$$\alpha_0 = \mu' {}_D I_1 = \mu' \text{Tr} \mathbf{D} = \mu' d_{ii} = \mu' \nabla \cdot \mathbf{V},$$

neboť invarianty ${}_D I_2, {}_D I_3$ mají kvadratickou, resp. kubickou závislost na \mathbf{D} - viz část 1.2.10. Dosadíme do (3.24) a s konvencí $\alpha_1 = 2\mu$ dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_D(\mathbf{D}) &= \mu' (\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}, \\ \mathbf{T}(\mathbf{D}) &= (-P + \mu' \nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Koeficient μ , který obecně závisí na teplotě T a hustotě ρ , se nazývá *koeficient dynamické viskozity* a μ' se nazývá *druhý (dilatační) viskózní koeficient*.

Poznámka. Vztah pro \mathbf{T}_D lze odvodit i z předpokladu izotropní lineární závislosti na tenzoru rychlosti deformace \mathbf{D} ve tvaru

$$\tau_{ij} = \alpha_{ijkl} d_{kl} + \beta_{ij},$$

kde $\mathbf{A} = (\alpha_{ijkl})$, $\mathbf{B} = (\beta_{ij})$ jsou izotropní tenzory (viz část 1.2.11).

Rozepsáním $\mathbf{T}_D = (\tilde{\tau}_{ij})$ po složkách dostáváme

$$\tilde{\tau}_{ij} = \mu' \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{V} + \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = \mu' \delta_{ij} \partial_k V_k + \mu (\partial_j V_i + \partial_i V_j), \quad (3.26)$$

resp. v rozepsaném tvaru

$$\tilde{\tau}_{ii} = \mu' \partial_k V_k + 2\mu \partial_i V_i, \quad (3.27)$$

$$\tilde{\tau}_{ij} = \tilde{\tau}_{ji} = \mu (\partial_j V_i + \partial_i V_j), \quad i \neq j. \quad (3.28)$$

Uvedené vztahy lze interpretovat jako efekt viskozity tekutiny, kde různě rychle proudící vrstvy tekutiny se o sebe třou a působí na sebe silou, která je úměrná rozdílu jejich rychlostí.

Dosadíme-li vztahy (3.27)–(3.28) do rovnic (3.20), dostaneme tzv. *Navierovy-Stokesovy rovnice² v nekonzervativním (diferenciálním) tvaru*, které popisují stlačitelné proudění vazké newtonovské tekutiny

²V širším smyslu rozumíme Navierovými-Stokesovými rovnicemi celý systém rovnic popisující proudění, tj. rovnice (3.30)–(3.32) spolu s rovnicí kontinuity a rovnicí energie (viz část 3.9).

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = -\partial_i P + \partial_j (\mu' \delta_{ij} \partial_k V_k + \mu (\partial_j V_i + \partial_i V_j)) + \rho F_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.29)$$

resp. v rozepsaném tvaru

$$\rho \frac{DV_1}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu' \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mu \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\mu \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \right] + \rho F_1 \quad (3.30)$$

$$\rho \frac{DV_2}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\mu \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu' \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\mu \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \right) \right] + \rho F_2, \quad (3.31)$$

$$\rho \frac{DV_3}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\mu \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mu \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu' \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) + \rho F_3. \quad (3.32)$$

3.5.3 Stokesova hypotéza

Tzv. *mechanický tlak* se často [Bur15] definuje jako

$$P_{\text{mech}} = -\frac{1}{3} \text{Tr} \mathbf{T} = -\frac{1}{3} \tau_{ii}, \quad (3.33)$$

tj. jako průměr sil působících na tři jednotkové plochy orientované kolmo na osy souřadné soustavy. Na volbě souřadné soustavy přitom nezáleží, protože jde o invariant tenzoru \mathbf{T} (viz část 1.2.10). Pro jednoduché tekutiny definované vztahem (3.18), a tedy i pro newtonovské tekutiny, platí v klidu $P_{\text{mech}} = P$. Jak je to však při pohybu?

Tenzor rychlosti deformace \mathbf{D} lze zapsat jako součet jeho izotropní (volumetrické) části

$$\mathbf{D}_{\text{iso}} = \frac{1}{3} (\text{Tr} \mathbf{D}) \mathbf{I} = \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I}$$

a zbytku, tzv. deviatorické části s nulovou stopou

$$\mathbf{D}_{\text{dev}} = \mathbf{D} - \mathbf{D}_{\text{iso}} = \left(\frac{1}{2} \left((\partial_i V_j + \partial_j V_i) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \partial_k V_k \right) \right).$$

Dosazením do tvaru tenzoru napětí (3.25) máme

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= (-P + \mu' \nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I} + 2\mu (\mathbf{D}_{\text{iso}} + \mathbf{D}_{\text{dev}}) = \left(-P + \underbrace{\left(\mu' + \frac{2}{3} \mu \right)}_{:=\kappa} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}_{\text{dev}} \\ &= (-P + \kappa \nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}_{\text{dev}}, \end{aligned}$$

kde $\kappa = \mu' + \frac{2}{3} \mu$ je tzv. *koeficient objemové viskozity* (*volumetric viscosity*, *bulk viscosity coefficient*) a dynamická viskozita μ se v tomto kontextu nazývá též *smykovou viskozitou* (*shear viscosity*). Dle (3.33) pak platí

$$P_{\text{mech}} = P - \kappa \nabla \cdot \mathbf{V}.$$

Obvyklým předpokladem je, že hydrostatický a mechanický tlak jsou stejné i při pohybu, což vyjadřuje tzv. Stokesova hypotéza vztahem

$$\kappa = 0, \quad \text{resp.} \quad \mu' = -\frac{2}{3} \mu. \quad (3.34)$$

V [Gad95] a nověji v [Bur15] se diskutuje, že pro určité tekutiny (jednoatomové dostatečně zředěné plyny) lze tento vztah odůvodnit i kinetickou teorií plynů, avšak v obecnosti neplatí. Existují experimentální metody [Gad95], jimiž lze κ změřit, a u zcela běžných materiálů (plyny jako kyslík, dusík) je zřejmě κ stejného řádu jako μ . U CO_2 je dokonce κ zhruba tisíckrát větší než μ . Důvod, proč lze Stokesovu hypotézu přesto použít a dosáhnout realistických výsledků simulací proudění je totiž spíše ten, že (nejen) pro tyto materiály běžně platí

$$|\kappa \nabla \cdot \mathbf{V}| \ll P.$$

Výjimkou jsou extrémní situace jako nadzvukové proudění při vstupu kosmického modulu do planetární atmosféry s vysokým obsahem CO_2 . V řadě případů není naopak Stokesova hypotéza vůbec potřeba, jak se dozvíme dále v části 3.7.

3.6 Nevazké proudění - Eulerovy rovnice

V některých případech lze viskozitu tekutiny zanedbat. Tehdy hovoříme o tzv. *nevazké (ideální) tekutině*. Položením $\mu = \mu' = 0$ v (3.30)–(3.32), resp. $\tilde{\tau}_{ij} = 0$ v (3.20) dostáváme tzv. *Eulerovy rovnice v nekonzervativním (diferenciálním) tvaru*

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = -\partial_i P + \rho F_i, \quad (3.35)$$

resp. ve vektorovém tvaru

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla P + \rho \mathbf{F},$$

což získáme dosazením $\mathbf{T}_D = 0$ do (3.17).

3.7 Nestlačitelné proudění

Při *nestlačitelném proudění* se v čase nemění objemová míra v žádném kontrolním objemu tekutiny $\mathcal{V}_0 \subset V_0$, tj. (podobně jako v 2.21) máme

$$m_3(\mathcal{V}_0) = \int_{\mathcal{V}_0} d\mathbf{X} \stackrel{!}{=} \int_{\mathcal{V}(t)} d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}_0} \left| \det \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right| d\mathbf{X} = \int_{\mathcal{V}_0} |\det \mathbf{F}| d\mathbf{X}, \quad (3.36)$$

z čehož dostáváme

$$\int_{\mathcal{V}_0} (1 - |\det \mathbf{F}|) d\mathbf{X} = 0$$

a vzhledem k libovolné volbě \mathcal{V}_0 musí

$$|\det \mathbf{F}| = 1. \quad (3.37)$$

Nyní zderivováním (3.37) podle času a využitím (2.26) dostáváme

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \partial_j V_j = 0, \quad (3.38)$$

Za tohoto předpokladu pak dostáváme rovnici kontinuity (2.19) ve tvaru tzv. *transportní rovnice*

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \underbrace{\rho \nabla \cdot \mathbf{V}}_{=0} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho = \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.39)$$

Hustota ρ vyjádřená v materiálových souřadnicích je tedy nezávislá na čase. Z toho je vidět, že podmínku nestlačitelnosti splňuje proudění tehdy, je-li libovolné počáteční rozložení hustoty pouze unášeno spolu s prouděním. Je-li tekutina na počátku homogenní, tj. $\rho = \text{konst.}$, pak musí platit $\rho = \text{konst.}$ v libovolném čase t a pro každé $\mathbf{x} \in V(t)$.

3.8 Rovnice proudění nestlačitelné tekutiny

Pro jednoduchost nyní předpokládejme

$$\rho = \text{konst.}$$

Potom přímo z rovnice kontinuity (2.19) dostáváme podmínku nestlačitelnosti (3.38). Předpokládejme navíc, že kinematická viskozita (a tedy i dynamická viskozita μ) je rovněž konstantní. Přímým dosazením (3.38) do (3.30) získáme

$$\begin{aligned} \rho \frac{DV_i}{Dt} &= -\partial_i P + \mu \partial_j ((\partial_j V_i + \partial_i V_j)) + \rho F_i \\ &= -\partial_i P + \mu \left(\partial_{jj} V_i + \underbrace{\partial_{ij} V_j}_{=0} \right) + \rho F_i \quad i \in \{1, 2, 3\}, \\ &= -\partial_i P + \mu \partial_{jj} V_i. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Označený člen se rovná nule, neboť jde o zderivovanou rovnici kontinuity $\partial_k V_k = 0$ podle x_i (s předpokladem záměnnosti derivací). Ve vektorovém tvaru máme

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla P + \mu \Delta \mathbf{V} + \rho \mathbf{F}. \quad (3.41)$$

Po vydělení hustotou ρ získáváme často používaný tvar

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla \tilde{P} + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F}, \quad (3.42)$$

kde

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.43)$$

je tzv. *kinematická viskozita* a

$$\tilde{P} = \frac{P}{\rho} \quad (3.44)$$

je *kinematický* (normalizovaný) *tlak*.

Za uvedených předpokladů je systém rovnic (3.38), (3.42) doplněný o stavovou rovnici tekutiny (viz sekce 3.10) uzavřený a řešitelný bez použití zákona zachování energie, který odvodíme v následující sekci. Totéž platí o nevazkém proudění při konstantní teplotě.

3.9 Zákon zachování energie

3.9.1 Zákon zachování celkové energie

Nyní se budeme zabývat zákonem zachování celkové energie pro jednoduché tekutiny. Stejně jako v části 3.1, necht' \mathcal{V}_0 je pevně zvolený kontrolní objem materiálového tělesa V_0 a jeho tvar v čase t je $\mathcal{V}(t)$. Označme jako $E(t, \mathbf{x})$ specifickou vnitřní energii (na jednotku hmotnosti). Celková (kinetická a vnitřní) energie látky obsažené v objemu $\mathcal{V}(t)$ je potom

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \left(E + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) d\mathbf{x}, \quad (3.45)$$

kde jsme označili $\mathbf{V}^2 := \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = V_i V_i = \|\mathbf{V}\|^2$. Časová změna této hodnoty je součtem:

1. Výkonu povrchových sil (tlaku a viskózních sil) na hranici objemu $\partial\mathcal{V}$, tj.

$$\int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{n}) dS = \int_{\partial\mathcal{V}} V_i (\mathbf{T}\mathbf{n})_i dS = \int_{\partial\mathcal{V}} V_i \tau_{ij} n_j dS = \int_{\mathcal{V}(t)} \partial_j (V_i \tau_{ij}) d\mathbf{x}. \quad (3.46)$$

2. Výkonu objemových sil na látku v celém objemu \mathcal{V}

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \mathbf{F} \cdot (\rho \mathbf{V} d\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho F_i V_i d\mathbf{x}. \quad (3.47)$$

3. Tok vnitřní energie přes hranici $\partial\mathcal{V}$ v důsledku difuze (vedení) tepla materiálem. Tepelný tok směrem *dovnitř* objemu \mathcal{V} přes plošku dS s *vnější* normálou \mathbf{n} v důsledku vedení tepla je dán Fourierovým zákonem

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} dS = \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.48)$$

kde λ [$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$] je koeficient tepelné vodivosti. Proto celkový tepelný tok přes hranici $\partial\mathcal{V}$ způsobený vedením tepla je

$$\int_{\partial\mathcal{V}(t)} \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \lambda \partial_i T n_i dS = \int_{\mathcal{V}(t)} \partial_i (\lambda \partial_i T) dS = \int_{\mathcal{V}(t)} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) d\mathbf{x}. \quad (3.49)$$

4. Výkonem objemových zdrojů tepla v objemu \mathcal{V} . Je-li tepelný výkon objemových zdrojů tepla na jednotku hmotnosti roven \dot{Q} , celkový tepelný výkon v objemu $\mathcal{V}(t)$ je

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \rho \dot{Q} d\mathbf{x}. \quad (3.50)$$

Sečtením všech těchto příspěvků (3.46)–(3.50) dostáváme bilanci celkové energie

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \left(E + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \partial_j (V_i \tau_{ij}) + \rho F_i V_i + \partial_i (\lambda \partial_i T) + \rho \dot{Q} d\mathbf{x}.$$

S použitím Reynoldsova transportního teorému pro specifické veličiny (2.31) s volbou $\Phi = E + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2$ a s uvážením, že volba \mathcal{V}_0 byla libovolná, dostáváme rovnost integrandů ve tvaru

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(E + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) = \partial_j (V_i \tau_{ij}) + \rho F_i V_i + \partial_i (\lambda \partial_i T) + \rho \dot{Q}, \quad (3.51)$$

neboli zákon zachování celkové energie v (nekonzervativním) diferenciálním tvaru. Konzervativní tvar (získaný pomocí (2.30)) neuvádíme, neboť není tak kompaktní.

3.9.2 Zákon zachování vnitřní energie

Je zřejmé, že kinetická energie, stejně jako hybnost, není objektivní veličinou (viz část 3.5.1). Rovnici (3.51) lze však zjednodušit. Vyjdeme z rovnic obecné bilance hybnosti

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = \partial_j \tau_{ij} + \rho F_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.16)$$

kteřé vynásobíme V_i a sečteme přes i , čímž získáme

$$\rho \underbrace{\frac{DV_i}{Dt} V_i}_{\frac{D}{Dt} \frac{1}{2} v^2} = V_i \partial_j \tau_{ij} + \rho F_i V_i. \quad (3.52)$$

Odečtením (3.52) od (3.51) pak obdržíme

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \tau_{ij} \partial_j V_i + \partial_i (\lambda \partial_i T) + \rho \dot{Q}, \quad (3.53)$$

resp. ve vektorovém tvaru

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{V} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \rho \dot{Q}, \quad (3.54)$$

což je zákon zachování vnitřní energie v nekonzervativním (diferenciálním) tvaru.

3.9.3 Zákon zachování vnitřní energie pro jednoduché tekutiny

Dosazením vztahu (3.18) do (3.53) dostáváme rovnici bilance vnitřní energie pro jednoduché tekutiny

$$\begin{aligned} \rho \frac{DE}{Dt} &= (-P \delta_{ij} + \tilde{\tau}_{ij}) \partial_j V_i + \partial_i (\lambda \partial_i T) + \rho \dot{Q}, \\ &= -P \partial_i V_i + \tilde{\tau}_{ij} \partial_j V_i + \partial_i (\lambda \partial_i T) + \rho \dot{Q}, \end{aligned}$$

neboli ve vektorovém tvaru

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -P \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{T}_D \cdot \nabla \mathbf{V} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \rho \dot{Q}.$$

3.9.4 Zákon zachování vnitřní energie pro nevazké proudění

Při nevazkém proudění, které popisují Eulerovy rovnice (viz část 3.6), se obvykle navíc zanedbává i vedení tepla, tj. pokládáme $\mu = 0$ a $\lambda = 0$. Zákon zachování vnitřní energie má potom tvar

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -P \nabla \cdot \mathbf{V} + \rho \dot{Q}. \quad (3.55)$$

3.10 Uzavření systému rovnic pro proudění tekutiny

Dosud jsme odvodili několik rovnic, které v procesu proudění tekutiny vyjadřují zákony zachování fundamentálních fyzikálních veličin. Jde o 1 rovnici pro zákon zachování hmoty (část 2.9), 3 rovnice pro zákony zachování složek hybnosti (část 3.3) a 1 rovnici pro zákon zachování energie (sekce 3.9). Celkem tedy máme 5 rovnic pro hustotu ρ , 3 složky hybnosti ρV_i , vnitřní energii E , absolutní teplotu T a tlak P ³. Proměnných veličin je tedy 7 a je zřejmé, že pro nalezení jednoznačného řešení bude

³Symbolika odpovídá eulerovskému přístupu a příslušnému konzervativnímu tvaru rovnic. Toto značení dodržíme v celé sekci (3.10).

třeba ještě 2 dalších rovnic. Těmito rovnicemi jsou

1. vztah mezi vnitřní energií a absolutní teplotou,
2. stavová rovnice tekutiny.

Tyto vztahy budou podrobněji zkoumány v částech 6.1 a 6.2.

3.11 Rovnice potenciálního proudění

Předpokládáme stacionární nevířivé nevazké a izentropické proudění. *Stacionární* znamená, že parciální derivace všech veličin podle času jsou rovny nule. *Nevířové* ve 3D znamená

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0, \quad (3.56)$$

což je ekvivalentní s prouděním potenciálním, tj. existencí funkce Φ takové, že

$$\mathbf{V} = \nabla \Phi.$$

Podmínka (3.56) totiž odpovídá exaktnosti (a tedy integrovatelnosti) diferenciální formy $V_i dx_i$. Ve dvourozměrné oblasti je odpovídající podmínkou exaktnost diferenciální formy

$$V_1 dx_1 + V_2 dx_2,$$

tj. musí platit (relace uzavřenosti)

$$\partial_2 V_1 - \partial_1 V_2 = 0.$$

Soustava Eulerových rovnic v konzervativním tvaru pro stacionární proudění lze zapsat

$$\begin{aligned} \partial_1 (\rho V_1) + \partial_2 (\rho V_2) &= 0, \\ \partial_1 (\rho V_1^2 + P) + \partial_2 (\rho V_1 V_2) &= 0, \\ \partial_1 (\rho V_1 V_2) + \partial_2 (\rho V_2^2 + P) &= 0. \end{aligned}$$

Z Eulerových rovnic (ZZH) v nekonzervativním tvaru lze pak odvodit

$$-\frac{1}{2} \rho d(V_1^2 + V_2^2) = dp$$

a protože pro lokální rychlost zvuku platí

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho},$$

dostáváme

$$d\rho = -\frac{dp}{a^2} = -\frac{\rho}{2a^2} d(V_1^2 + V_2^2)$$

a z toho spočítáme $\partial_1 \rho, \partial_2 \rho$. Po dosazení do rovnice kontinuity a vyjádření $V_1 = \partial_1 \Phi, V_2 = \partial_2 \Phi$ dostaneme *úplnou potenciální rovnici* (bez explicitního výskytu ρ) ve tvaru

$$\partial_{11} \Phi \left(1 - \frac{1}{a^2} (\partial_1 \Phi)^2\right) + \partial_{22} \Phi \left(1 - \frac{1}{a^2} (\partial_2 \Phi)^2\right) - \frac{2}{a^2} \partial_1 \Phi \partial_2 \Phi \partial_{12} \Phi = 0.$$

Matematická analýza rovnic proudění

V této kapitole se stručně seznámíme s některými principy a matematickými nástroji, které se používají v matematické analýze úloh proudění. Cílem této analýzy je ukázat, zda, za jakých předpokladů a v jaké podobě existuje řešení úloh proudění, a pokud existuje, je-li jednoznačné.

4.1 Formulace problému nestlačitelného proudění

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je oblast s lipschitzovskou hranicí (viz definice 29) a $\mathcal{I} = (0, t_{\max})$ je časový interval. Problémem, který budeme zkoumat, bude problém nestlačitelného proudění ve tvaru

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla \tilde{P} + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F}, \quad (3.42)$$

pro neznámé \mathbf{V} a \tilde{P} , kde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ je tzv. *kinematická viskozita* a $\tilde{P} = \frac{P}{\rho}$ je *kinematický tlak* (viz části 3.7 a 3.8), s okrajovou podmínkou

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{x})|_{\partial\Omega} = \mathbf{W}(t, \mathbf{x}). \quad (4.1)$$

Integrací (3.38) přes Ω a použitím Gaussovy věty (Důsledek 7) zjišťujeme, že funkce \mathbf{W} musí splňovat

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Počáteční podmínka je zadána funkcí

$$\mathbf{V}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{V}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.2)$$

splňující podmínku *solenoidálnosti* (*divergence-free*)

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.3)$$

4.2 Poissonova rovnice pro tlak

Jestliže na (3.42) aplikujeme operátor divergence, dostaneme

$$\nabla \cdot \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla \cdot \nabla \tilde{P} + \nu \nabla \cdot \Delta \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (4.4)$$

Označme $\Phi = \nabla \cdot \mathbf{V}$. Na levé straně (4.4) dostaneme z definice materiálové derivace (2.8)

$$\nabla \cdot \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}).$$

Na pravé straně (4.4) lze upravit

$$v \nabla \cdot \Delta \mathbf{V} = v \partial_i \partial_{kk} V_i = v \partial_{kki} V_i = v \partial_{ikk} V_i = v \partial_{kk} \partial_i V_i = v \Delta \Phi.$$

(4.4) lze tedy zapsat jako

$$\Delta \tilde{P} + \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) - \nabla \cdot \mathbf{F} = v \Delta \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (4.5)$$

Z podmínky nestlačitelnosti (3.38), tj $\Phi = 0$, platí tzv. (zjednodušená) Poissonova rovnice pro tlak (PPE - Pressure Poisson Equation)

$$\Delta \tilde{P} = -\nabla \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (4.6)$$

Podmínka nestlačitelnosti tedy indukuje tlakové pole, které je až na konstantu jednoznačně určeno aktuální hodnotou rychlostního pole \mathbf{V} a jeho změny se šíří na nekonečně rychle celou oblastí na základě změn \mathbf{V} . Předpokládáme-li naopak platnost (4.6), dostáváme pro veličinu Φ dle (4.5) rovnici vedení tepla ve tvaru

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = v \Delta \Phi. \quad (4.7)$$

Jestliže uvažujeme okrajovou podmínku

$$\Phi|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4.8)$$

nebo

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.9)$$

pak společně s počáteční podmínkou (4.3) rovnice (4.7) implikuje $\Phi \equiv 0$ nezávisle na t a \mathbf{x} . \tilde{P} tedy vystupuje v rovnici (3.42) jako Lagrangeův multiplikátor zajišťující podmínku (3.38). Rovnice (4.7) spolu s okrajovou podmínkou (4.8) zajišťuje, že v průběhu času dochází k difuzi počáteční hodnoty $\nabla \cdot \mathbf{V}$ k nule, i když počáteční podmínka (4.2) nesplňuje (4.3), tj. neplatí $\nabla \cdot \mathbf{V}_0$ v celé Ω . V numerických algoritmech (viz také část ??), které jsou na tomto tvaru PPE založené, tedy dochází k relaxaci divergence rychlosti k nule, což v praxi umožňuje zbavit se těžko splnitelné podmínky (4.3).

Alternativně k (4.6) lze v (4.5) jakožto důsledek nestlačitelnosti využít pouze $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ a získat zdánlivě ekvivalentní, tzv. *konzistentní* Poissonovu rovnici pro tlak ve tvaru

$$\Delta \tilde{P} = -\nabla \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + v \nabla \cdot \Delta \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (4.10)$$

Řešení (4.10) poté naopak implikuje

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

což znamená, že se hodnota divergence \mathbf{V} v čase nemění. S počáteční podmínkou (4.3) pak již máme zaručenu ekvivalenci s podmínkou nestlačitelnosti (3.38).

Rovnice (4.6), resp. (4.10), vyžadují pro své řešení rovněž okrajové podmínky, které původní úloha nezahrnuje. Vhodnou okrajovou podmínku lze získat rozšířením platnosti (3.42) na hranici $\partial\Omega$. Protože jde o vektorovou rovnici, je zde zdánlivě možnost volby. Provedeme-li projekci (3.42) do směru vnější normály \mathbf{n} k $\partial\Omega$, dostaneme Neumannovu okrajovou podmínku

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla \tilde{P} = -\frac{DV_n}{Dt} + v \Delta V_n + F_n, \quad (4.11)$$

kde V_n, F_n jsou normálové složky vektorů \mathbf{V}, \mathbf{F} . V článku [GS87] autoři ukazují, že za předpokladu dostatečné regularity řešení i hranice je i projekce do tečného směru ekvivalentní podmínkou, a dále že při použití (4.11) jsou ekvivalentní rovnice (4.6) a (4.10).

4.3 Slabé řešení úlohy nestlačitelného proudění

Uvažujme nyní problém (3.42), (3.38), (4.2), pro jednoduchost s okrajovou podmínkou

$$\mathbf{V}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}. \quad (4.12)$$

Podmínka (4.12) je běžně aplikovaná tzv. *non-slip* podmínka pro vazké tekutiny na stěnách - viz část 7.1. Pro obecnější případ (např. oblast se vstupem a výstupem) lze problém přeformulovat pomocí pole $\tilde{\mathbf{V}}_W$ splňujícího $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}}_W = 0$, $\tilde{\mathbf{V}}_W|_{\partial\Omega} = \mathbf{W}$. Poté stačí hledat řešení úlohy ve tvaru $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V} - \tilde{\mathbf{V}}_W$, které splňuje (3.42) a (4.12).

Následující výklad je inspirován původním kurzem [Neu06a]. Pro detailnější studium lze použít i hezky zpracované materiály ke kurzu o teorii Navierových-Stokesových na MFF [Pok20a].

4.3.1 Slabá rovnost

Uvažujme opět Navierovy–Stokesovy rovnice (3.42) a rozepišme materiálovou derivaci, tj.

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\nabla \tilde{P} + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F}.$$

Z Helmholtzovy věty 2.4 plyne, že k (dostatečně hladkému) vektorovému poli \mathbf{F} existuje potenciál Φ tak, že

$$\mathbf{F} = \nabla \Phi + \mathbf{F}_\sigma, \quad (4.13)$$

přičemž $\nabla \cdot \mathbf{F}_\sigma = 0$. Jestliže dosadíme do (4.14), dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}}_{(1)} = -\underbrace{\nabla(\tilde{P} - \Phi)}_{(2)} + \underbrace{\nu \Delta \mathbf{V}}_{(3)} + \mathbf{F}_\sigma. \quad (4.14)$$

Rovnici (4.14) vynásobíme skalárně dostatečně hladkou funkcí $\boldsymbol{\varphi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, která má kompaktní support v Ω , platí pro ni $\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0$ v Ω . Zintegrujeme přes Ω a pro jednotlivé členy zleva doprava získáme

$$(1) \quad \int_{\Omega} (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} V_j (\partial_j V_i) \varphi_i \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} V_j V_i \underbrace{\varphi_i}_{=0} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \partial_j (V_j \varphi_i) V_i \, d\mathbf{x} \\ - \int_{\Omega} \underbrace{(\partial_j V_j)}_{=0} \varphi_i V_j \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} V_i \partial_j \varphi_i V_j \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{V} \, d\mathbf{x}, \quad (4.15)$$

$$(2) \quad - \int_{\Omega} \nabla(\tilde{P} - \Phi) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\partial_i (\tilde{P} - \Phi)) \varphi_i \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} (\tilde{P} - \Phi) \underbrace{\varphi_i}_{=0} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\tilde{P} - \Phi) \underbrace{(\partial_i \varphi_i)}_{=0} \, d\mathbf{x} = 0,$$

$$(3) \quad \int_{\Omega} \Delta \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\partial_{jj} V_i) \varphi_i \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (\partial_j V_i) \underbrace{\varphi_i}_{=0} n_j \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\partial_j V_i) (\partial_j \varphi_i) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x}.$$

Celý vztah má tedy po provedení těchto operací tvar

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{V} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{F}_\sigma \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x}. \quad (4.16)$$

Dále vynásobíme (4.16) hladkou funkcí $\vartheta : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $\vartheta(t_{\max}) = 0$ a zintegrujeme přes \mathcal{J} . V prvním členu dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \, dt &= \int_{\mathcal{J}} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \right) \vartheta \, dt = [\text{per partes}] \\ &= \left[\int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \vartheta \right]_0^{t_{\max}} - \int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \, \dot{\vartheta} \, dt \\ &= -\vartheta(0) \int_{\Omega} \mathbf{V}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx - \int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \, \dot{\vartheta} \, dt. \end{aligned}$$

Po těchto krocích získáme z (4.16) tzv. *slabou rovnost*

$$\int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} -\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\varphi} \dot{\vartheta} - \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{V} \vartheta + \nu \nabla \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \vartheta - \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varphi} \vartheta \, dx \, dt = \vartheta(0) \int_{\Omega} \mathbf{V}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx. \quad (4.17)$$

Povšimněme si, že:

1. V (4.17) jsou podmínky na regularitu funkce \mathbf{V} podstatně slabší než v původní rovnici (4.14). Nemusí být diferencovatelná podle času a musí být spolu s jejími prvními derivacemi definována jen skoro všude.
2. V (4.17) vůbec nevystupuje tlak \tilde{P} ani potenciál Φ z (4.13). Bez újmy na obecnosti proto můžeme předpokládat $\Phi = 0$, tj. $\mathbf{F} = \mathbf{F}_\sigma$, a tedy $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.
3. Každé dostatečně hladké, tzv. *klasické* řešení úlohy pro nestlačitelné proudění (3.42), (3.38), (4.12), (4.2) splňuje slabou rovnost pro libovolnou volbu funkcí $\boldsymbol{\varphi}, \vartheta$ výše uvedených vlastností.

Otázkou je, jestli lze naopak pomocí slabé rovnosti (4.17) definovat funkci, která je v jistém smyslu řešením původní úlohy. Z výše uvedeného postupu například plyne, že k odvození (4.17) byla důležitá podmínka nestlačitelnosti (3.38), ale v samotné slabé rovnosti už nijak nefiguruje. Co je třeba ještě předpokládat o funkci \mathbf{V} , aby splnění slabé rovnosti identifikovalo funkci, která má vztah k původnímu problému? Lze pak zaručit, že taková funkce vůbec existuje? Na tyto otázky se pokusíme odpovědět v dalším výkladu.

4.3.2 Speciální funkční prostory

V této chvíli je vhodné si připomenout definice funkčních prostorů z části 1.7.4. Navíc zavedme ještě následující prostory:

$L_2(\Omega)^3$ Hilbertův prostor vektorových funkcí $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, jejichž složky¹ jsou v $L_2(\Omega)$, se skalárním součinem

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L_2(\Omega)^3} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 (u_i, v_i)_{L_2(\Omega)}$$

a jím indukovanou normou

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)^3} &= \sqrt{\int_{\Omega} \|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|^2 \, d\mathbf{x}} = \sqrt{\int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u_i^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}} \\ &= \|(\|u_i\|_{L_2(\Omega)})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{L_2(\Omega)}^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

$H_0^1(\Omega)^3$ Hilbertův prostor vektorových funkcí $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, jejichž složky jsou v $H_0^1(\Omega)$, se skalárním součinem

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_0^1(\Omega)^3} \equiv ((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \partial_j u_i \partial_j v_i \, d\mathbf{x} \quad (4.19)$$

a jím indukovanou normou

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{H_0^1(\Omega)^3} &= \sqrt{((\mathbf{u}, \mathbf{u}))} = \sqrt{\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \, d\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 (\partial_j u_i)^2 \, d\mathbf{x}} \\ &= \|(\|u_i\|'_{H_0^1(\Omega)})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \|u_i\|'_{H_0^1(\Omega)}^2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Poznámka 75. Výraz (4.19) je evidentně symetrická bilineární forma. Díky úpravám (4.20) vidíme,

$$((\mathbf{u}, \mathbf{u})) = \sum_{i=1}^3 \|u_i\|'_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

kde napravo je „čárkovaná“ norma zavedená v důsledku 1.7.9. Proto je $((\cdot, \cdot))$ i pozitivně definitní a jde tedy skutečně o skalární součin. Dle poznámky 57 dále existuje $k > 0$ tak, že

$$\|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)^3} \leq k \|\mathbf{u}\|_{H_0^1(\Omega)^3}. \quad (4.21)$$

$L_{2,\text{div}}(\Omega)^3$ prostor vektorových funkcí \mathbf{u} se složkami z $L_2(\Omega)$, pro něž navíc $\nabla \cdot \mathbf{u} \in L_2(\Omega)$. Norma v tomto prostoru je

$$\|\mathbf{u}\|_{L_{2,\text{div}}(\Omega)^3} = \|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)^3} + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Věta 76. (o stopách II) Existuje spojitě zobrazení $T : L_{2,\text{div}}(\Omega)^3 \rightarrow L_2(\partial\Omega)$ takové, že pro každou $\mathbf{f} \in C^1(\bar{\Omega})^3$ platí

$$T\mathbf{f} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}.$$

¹Tato definice přisuzuje vlastnosti složkám vektorových funkcí - tj. prvky prostoru $L_2(\Omega)^3$ jsou trojice funkcí z $L_2(\Omega)$, které, pokud jsou vyčísleny v bodě (což lze obecně jen skoro všude), dohromady vytvoří sloupcový vektor funkčních hodnot, který leží v \mathbb{R}^3 . Alternativně lze $L_2(\Omega)^3$ definovat jako tenzorový součin vektorových prostorů

$$L_2(\Omega)^3 = L_2(\Omega) \otimes L_2(\Omega) \otimes L_2(\Omega),$$

jehož prvky jsou formální vektory prvků z $L_2(\Omega)$, tj. o vyčíslování v bodě se vůbec nediskutuje. Tento pohled se využije v důkazu tvrzení 78, i když přímé definici tenzorového součinu vektorových prostorů se zde vyhýbáme.

Poznámka. Funkce z $L_2(\Omega)^3$ nelze obecně (spojitě) dodefinovat na hranici, ale funkce z $L_{2,\text{div}}(\Omega)^3$ lze spojité dodefinovat jejich normálovou složkou.

$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3$ prostor vektorových funkcí \mathbf{u} se složkami z $C_0^\infty(\Omega)$, splňujících navíc $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ($\sigma \dots$ solenoidální funkce).

$H = L_{2,\sigma}(\Omega)^3$ uzávěr prostoru $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3$ v $L_2(\Omega)^3$, se skalárním součinem $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L_2(\Omega)^3}$ a normou $\|\cdot\|_H = \|\cdot\|_{L_2(\Omega)^3}|_H$.

Poznámka. Uzávěr $C_0^\infty(\Omega)^3$ (bez „ σ “) v $L_2(\Omega)^3$ je celý $L_2(\Omega)^3$, tj. $C_0^\infty(\Omega)^3$ je hustý v $L_2(\Omega)^3$. Prostor H lze také uvažovat jako prostor funkcí z $L_2(\Omega)^3$, jejichž divergence ve smyslu distribucí (viz část 1.7.5) je nulová a jejich normálová složka na hranici $\partial\Omega$ je (dle věty 76) nulová.

V uzávěr prostoru $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3$ v $H_0^1(\Omega)^3$, tj. Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)_V = ((\cdot, \cdot))|_{V \times V}$ a s normou $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)^3}|_V$.

Poznámka. Prostor V lze také uvažovat jako prostor funkcí z $H_0^1(\Omega)^3$, jejichž divergence je rovna nule skoro všude v Ω . (na rozdíl od H totiž mají funkce z V derivace skoro všude)

Lemma 77. Platí $V \subset H$.

Důkaz. Dle poznámky 75 omezenost funkce u v normě prostoru $H_0^1(\Omega)^3$ znamená i omezenost v normě prostoru $L_2(\Omega)^3$, z čehož plyne

$$H_0^1(\Omega)^3 \subset L_2(\Omega)^3. \quad (4.22)$$

Alternativně lze k důkazu inkluze (4.22) využít i první část důkazu následujícího tvrzení 78 (kde se dokazuje dokonce něco více). Nyní uvažujme libovolný prvek $\mathbf{u} \in V$. Ten (z definice V jako uzávěru $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3$ v $H_0^1(\Omega)^3$) lze vyjádřit jako limitní prvek posloupnosti funkcí $(\mathbf{u}_n) \subset C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3$ v normě prostoru $H_0^1(\Omega)^3$, tj. platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{H_0^1(\Omega)^3} = 0.$$

Opět díky poznámce 75 však platí i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)^3} = 0,$$

což znamená, že \mathbf{u} je limitní prvek té stejné posloupnosti funkcí $(\mathbf{u}_n) \subset C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3$ i v normě prostoru $L_2(\Omega)^3$, neboli leží v uzávěru $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3$ v $L_2(\Omega)^3$, což je H . Tím je tvrzení dokázáno. \square

Tvrzení 78. Platí $V \hookrightarrow H$.

Důkaz. Dle důsledku Rellichovy-Kondrachovovy věty 1.7.10 platí

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega).$$

Platí-li $\mathcal{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{B}_2$ a $\mathcal{X} \Subset \mathcal{B}_1$ je podprostorem \mathcal{B}_1 (se stejnou normou), pak zřejmě rovněž $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{B}_2$, což plyne ihned z definice kompaktního vnoření 68 a kompaktního operátoru. Díky tomu tedy konkrétně i

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega). \quad (4.23)$$

Nejprve ukážeme, že

$$H_0^1(\Omega)^3 \hookrightarrow L_2(\Omega)^3. \quad (4.24)$$

Prostor $H_0^1(\Omega)^3$ je Hilbertův prostor, a tedy je (poznámka 20) reflexivní. Identický operátor

$$\iota : H_0^1(\Omega)^3 \rightarrow L_2(\Omega)^3 \quad (4.25)$$

je tedy kompaktní (definice 65) právě tehdy (poznámka 66), je-li totálně spojitý (definice 60). Proto stačí z definice ukázat, že ι je totálně spojitý. Necht' tedy (\mathbf{u}^n) je slabě konvergentní posloupnost prvků z $H_0^1(\Omega)^3$, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\mathbf{w}}(\mathbf{u}^n) = \underline{\mathbf{w}}(\mathbf{u}), \quad \forall \underline{\mathbf{w}} \in H_0^1(\Omega)^{3'}. \quad (4.26)$$

Z definice operace sčítání po složkách a linearity $\underline{\mathbf{w}}$ lze napsat²

$$\underline{\mathbf{w}}(\mathbf{u}^n) = \underline{\mathbf{w}}\left(\begin{pmatrix} u_1^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \underline{\mathbf{w}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ u_2^n \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \underline{\mathbf{w}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3^n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^3 \underline{\mathbf{w}}_i(u_i^n)$$

kde $\underline{\mathbf{w}}_i \in H_0^1(\Omega)'$ jsou tři obecně různé funkcionály na $H_0^1(\Omega)'$. Zvolíme-li $\underline{\mathbf{w}}_i$ libovolně a $\underline{\mathbf{w}}_j = \mathbf{0}$ pro $j \neq i$, dostaneme díky (4.26) rovněž

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\mathbf{w}}_i(u_i^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\mathbf{w}}(\mathbf{u}^n) \stackrel{(4.26)}{=} \underline{\mathbf{w}}(\mathbf{u}) = \underline{\mathbf{w}}_i(u_i), \quad \forall \underline{\mathbf{w}}_i \in H_0^1(\Omega)' \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

To znamená, že i jednotlivé složky u_i^n slabě konvergují v $H_0^1(\Omega)$ k u_i , a tedy díky (4.23) silně konvergují v $L_2(\Omega)$. Z definice normy na $L_2(\Omega)^3$ po složkách pomocí (4.18) pak ale plyne, že i posloupnost celých vektorů \mathbf{u}^n konverguje v $L^2(\Omega)^3$. Tím je dokázána totální spojitost (a tedy i kompaktnost) operátoru (4.25), neboli kompaktní vnoření (4.24). Nakonec, protože $V \in H_0^1(\Omega)^3$, tak i $V \hookrightarrow L_2(\Omega)^3$, ale protože dle lemmatu 77 platí $V \subset H$, tak i $V \hookrightarrow H$. \square

4.3.3 Energetická nerovnost a definice slabého řešení

Provedeme tzv. apriorní odhad řešení úlohy (3.42), (3.38), (4.12), (4.2). Předpokládáme, že existuje její řešení, a úpravami (4.14) dojdeme k nerovnosti, kterou toto řešení musí splňovat. Tato nerovnost bude představovat jeho omezenost v normách jistých funkčních prostorů. Díky tomu zjistíme, v jakých funkčních prostorech toto řešení musí ležet.

Vyjdeme ze vztahu (4.16) a dosadíme $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{V}$, čímž dostaneme

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot \mathbf{V} \, d\mathbf{x}}_{(1)} - \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \, d\mathbf{x}}_{(2)} + \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \, d\mathbf{x}. \quad (4.27)$$

Platí přitom

$$(1) = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot \mathbf{V} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial t} \, d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} V^2 \, d\mathbf{x}$$

Připomeneme-li odvozený vztah (4.15), tj.

$$\int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{V} \, d\mathbf{x},$$

tak dosazením $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{V}$ (v tomto okamžiku potřebujeme od \mathbf{V} stejné vlastnosti jako od $\boldsymbol{\varphi}$, tj. zejména (4.12)!) dostáváme okamžitě

$$(2) = \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \, d\mathbf{x} = 0.$$

²Formálně lze zjednodušit na $\mathbf{u}^n = u_i^n \mathbf{e}_i$, ale prvky vektoru jsou funkce a operace násobení je definována jen ve smyslu $\mathbf{u}^n(\mathbf{x}) = u_i^n(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$ skoro všude na Ω .

Dosazením zpět s využitím definic prostorů v části 4.3.2 (a zejména (4.20)) získáváme

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 d\mathbf{x} + \nu \|\mathbf{V}\|_V^2 = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} d\mathbf{x}.$$

S využitím Schwarzovy, Poincarého (poznámka 57 uvažovaná s konstantou úměrnosti k) a (zobecněné) Youngovy nerovnosti lze upravit pravou stranu

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} d\mathbf{x} &= (\mathbf{F}, \mathbf{V})_{L_2(\Omega)^3} \leq \|\mathbf{F}\|_{L_2(\Omega)^3} \|\mathbf{V}\|_{L_2(\Omega)^3} \\ &\leq k \|\mathbf{F}\|_H \|\mathbf{V}\|_V \\ &\leq \frac{\nu}{2} \|\mathbf{V}\|_V^2 + \frac{k}{2\nu} \|\mathbf{F}\|_H^2. \end{aligned}$$

Proto dále platí

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 d\mathbf{x} + \frac{\nu}{2} \|\mathbf{V}\|_V^2 \leq \frac{k^2}{2\nu} \|\mathbf{F}\|_H^2.$$

Zintegrováním přes časový interval $(0, t)$ dostáváme tzv. *energetickou nerovnost*

$$\underbrace{\left. \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 d\mathbf{x} \right|_t}_{\text{aktuální kin. energie}} + \underbrace{\int_0^t \nu \frac{1}{2} \|\mathbf{V}(\tau, \cdot)\|_V^2 d\tau}_{\text{disipace kin. energie od } t=0 \text{ do } t} \leq \underbrace{\left. \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 d\mathbf{x} \right|_{t=0}}_{\text{kin. energie na začátku}} + \underbrace{\frac{k^2}{2\nu} \int_0^t \|\mathbf{F}(\tau, \cdot)\|_H^2 d\tau}_{\approx \text{práce objemových sil}^3 \text{ od času } 0 \text{ do času } t}. \quad (4.28)$$

Pokud zanedbáme druhý člen na levé straně (4.28) a nerovnost vynásobíme 2, můžeme dále pokračovat v odhadech k

$$\left. \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 d\mathbf{x} \right|_t \leq \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{V}_0^2 d\mathbf{x} + \frac{k^2}{2\nu} \int_{\mathcal{J}} \|\mathbf{F}\|_H^2 dt,$$

což lze dále přepsat pomocí definice norem v příslušných prostorech na

$$\|\mathbf{V}(t, \cdot)\|_H^2 \leq \|\mathbf{V}_0\|_H^2 + \frac{k^2}{\nu} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{J}; H)}^2, \quad (4.29)$$

což platí pro (*skoro*) každé $t \in \mathcal{J}$. Jinými slovy, $\|\cdot\|_H$ (esenciální) supremum levé strany, neboli norma v Bochnerově prostoru $L_{\infty}(\mathcal{J}; H)$ splňuje stejnou nerovnost, tj.

$$\|\mathbf{V}\|_{L_{\infty}(\mathcal{J}; H)}^2 \leq \|\mathbf{V}_0\|_H^2 + \frac{k^2}{\nu} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{J}; H)}^2. \quad (4.30)$$

Zanedbáme-li v energetické nerovnosti (4.28) naopak první člen, dostaneme pro $t = t_{\max}$ (a po vynásobení $\frac{2}{\nu}$)

$$\|\mathbf{V}\|_{L_2(\mathcal{J}; V)}^2 = \int_{\mathcal{J}} \|\mathbf{V}\|_V^2 dt \leq \frac{1}{\nu} \|\mathbf{V}_0\|_H^2 + \frac{k^2}{\nu^2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{J}; H)}^2. \quad (4.31)$$

Apriorní odhady (4.30) a (4.31) tedy naznačují, že případné řešení problému nestlačitelného proudění by mělo ležet v prostorech $L_{\infty}(\mathcal{J}; H)$ a zároveň $L_2(\mathcal{J}; V)$, a navíc splňovat uvedené nerovnosti. Díky tomu můžeme přistoupit k definici slabého řešení úlohy nestlačitelného proudění:

³Přesněji řečeno, práce objemových sil v celé oblasti Ω za čas t by byla rovna

$$\int_0^t \int_{\Omega} |\mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{V}(\tau, \mathbf{x})| d\mathbf{x} d\tau.$$

Definice 79. Necht' $V_0 \in H$, $F \in L_2(\mathcal{J}; H)$. Funkci $V \in L_\infty(\mathcal{J}; H) \cap L_2(\mathcal{J}; V)$ splňující slabou rovnost

$$\int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} -V \cdot \boldsymbol{\varphi} \dot{\vartheta} - V \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot V \vartheta + \nu \nabla V \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \vartheta - F \cdot \boldsymbol{\varphi} \vartheta dx dt = \vartheta(0) \int_{\Omega} V_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} dx \quad (4.17)$$

pro všechna $\boldsymbol{\varphi} \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3$ a všechna $\vartheta \in C_0^\infty([0, T_{\max}))$ nazýváme slabým řešením úlohy nestlačitelného proudění (3.42), (3.38), (4.12), (4.2).

Poznámka. Volba $\vartheta \in C_0^\infty([0, T_{\max}))$ zajišťuje $\vartheta(t_{\max}) = 0$, ale nevynucuje $\vartheta(0) = 0$ (ϑ musí mít kompaktní support v polouzavřeném intervalu).

Poznámka. Libovolný výběr testovacích funkcí nahrazuje výběr objemu \mathcal{V}_0 v integrálním tvaru zákonů zachování, které také požadují nižší regularitu řešení než rovnice v diferenciálním tvaru.

Poznámka. Při popisu reálných situací při proudění mohou skutečně existovat ve fyzikálních veličinách nespojitosti. Při transsonickém proudění (které je ale z principu stlačitelné) je rozhraní mezi podzvukovým a nadzvukovým prouděním tvořeno plochou (tzv. rázovou vlnou), na níž jsou tlak, hustota i teplota nespojitá. Slabé řešení je tedy z fyzikálního hlediska vhodnější k popisu reálných situací než klasické řešení původní úlohy (3.42), (3.38), (4.12), (4.2). Na druhou stranu, v našem konkrétním případě nestlačitelného proudění jsou způsoby, jakými mohou být řešení nespojitá, docela přísně specifikovány větami 45 and 46.

4.4 Existence a jednoznačnost slabého řešení

Slabé řešení nalezneme jako limitu posloupnosti jeho aproximací pomocí Galerkinovy metody. Pro tuto metodu je potřeba mít k dispozici v daném prostoru spočetnou ortonormální bázi, tj. úplný ortonormální soubor funkcí. Tyto funkce nalezneme jako vlastní funkce tzv. Stokesova operátoru.

4.4.1 Funkcionálně-analytická vložka: Stokesův operátor

Definujeme tzv. *Stokesův operátor* $A: V \rightarrow V'$ pomocí vztahu

$$(A\mathbf{u})(\mathbf{v}) = ((\mathbf{u}, \mathbf{v})), \quad (4.32)$$

kde $((\cdot, \cdot))$ je skalární součin na V definovaný vztahem (4.19). Potom

1. A je (zřejmě) lineární:

$$(A(\alpha \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2))(\mathbf{v}) = ((\alpha \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v})) = \alpha((\mathbf{u}_1, \mathbf{v})) + ((\mathbf{u}_2, \mathbf{v})) = \alpha(A\mathbf{u}_1)(\mathbf{v}) + (A\mathbf{u}_2)(\mathbf{v}).$$

2. A je spojitý (omezený) na V :

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{u}\|_{V'} &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in V \\ \|\mathbf{v}\|_V=1}} |(A\mathbf{u})(\mathbf{v})| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in V \\ \|\mathbf{v}\|_V=1}} |((\mathbf{u}, \mathbf{v}))| \\ &\stackrel{\text{Schwarz}}{=} \left((\mathbf{u}, \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_V}) \right) = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|_V} \|\mathbf{u}\|_V^2 = \|\mathbf{u}\|_V. \end{aligned}$$

3. A je bijekce $A: V \rightarrow V'$, tj. A je invertibilní.

Dle Rieszovy věty 1.7.2 totiž existuje ke každému $\underline{\mathbf{w}} \in V'$ právě jeden prvek $\mathbf{u} \in V$ tak, že

$$\underline{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = ((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = (A\mathbf{u})(\mathbf{v}),$$

tj. právě jedno řešení rovnice

$$A\mathbf{u} = \underline{\mathbf{w}}.$$

Poznámka. Kdybychom měli na V zaveden skalární součin pomocí

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} dx,$$

jemuž odpovídá "nečárkovaná" norma (1.36) na $H_0^1(\Omega)$, použili bychom zde místo Rieszovy věty 1.7.2 Laxovo-Milgramovo lemma 19. Z platnosti Poincarého nerovnosti 1.7.9 jsou ale norma indukovaná tímto skalárním součinem a norma indukovaná $((\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ ekvivalentní, a tedy i duální prostory jsou při použití obou norem stejné (funkcionál je spojité v jedné normě, právě když je ve druhé). Proto můžeme brát $((\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ jako „primární“ skalární součin na V a všechny postupy se tím zjednoduší.

Poznámka. Zřejmě protože $V \subset H$, tak $H' \subset V'$ (Spojitost funkcionálů je brána v normě H , tj. $L_2(\Omega)^3$).

Věta 80. *Necht' $\mathbf{w} \in H'$. Potom řešení rovnice*

$$A\mathbf{u} = \mathbf{w},$$

splňuje

$$\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3 \cap L_{2,\sigma}(\Omega)^3 = H^2(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3 \cap V.$$

Označme

$$D_{\tilde{A}} = H^2(\Omega)^3 \cap H_0^1(\Omega)^3 \cap V \quad (4.33)$$

a operátor A zúžený na $D_{\tilde{A}}$ označme jako \tilde{A} .

V Hilbertově prostoru H platí izomorfnost $H' \cong H$ a dle Rieszovy věty (1.7.2) je každý prvek $\tilde{A}\mathbf{u} \in H'$ pro $\mathbf{u} \in D_{\tilde{A}}$ reprezentován jednoznačně prvkem $\mathbf{z} \in H$ tak, že (dle definice Stokesova operátoru (4.32)

$$(\mathbf{z}, \mathbf{v})_H = (\tilde{A}\mathbf{u})(\mathbf{v}) = ((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} dx.$$

Tímto reprezentantem je dle Greenovy formule (Věta 5)

$$\mathbf{z} = -\Delta \mathbf{u},$$

což je díky tvaru $D_{\tilde{A}}$ (4.33) funkce definovaná skoro všude v Ω (protože \mathbf{u} je v $H^2(\Omega)$).

V tomto smyslu tedy uvažujme \tilde{A} jako operátor

$$\tilde{A}: D_{\tilde{A}} \rightarrow H,$$

s hodnotami

$$\tilde{A}\mathbf{u} = \mathbf{z} = -\Delta \mathbf{u}.$$

Ten je (opět dle Rieszovy věty a odvození nahoře) na $D_{\tilde{A}}$ omezený a navíc symetrický:

$$(\tilde{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = ((\mathbf{v}, \mathbf{u})) = (\tilde{A}\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \tilde{A}\mathbf{v}).$$

\tilde{A} je tedy samosdruženým a invertibilním operátorem. Operátor $\tilde{A}^{-1}: H \rightarrow D_{\tilde{A}}$ je tedy také samosdružený a díky kompaktnímu vnoření $D_{\tilde{A}} \subset V \hookrightarrow H$ (viz tvrzení 78) je dle věty 71 navíc i kompaktní. Dle věty 67 proto existuje spočetná ortonormální báze prostoru H .

4.4.2 Galerkinova metoda

Dle předchozí části 4.4.1 existuje ortonormální báze (\mathbf{W}_n) prostoru H , která splňuje podmínku ortonormality v H , tj.

$$(\mathbf{W}_k, \mathbf{W}_\ell)_H = \delta_{k\ell}. \quad (4.34)$$

Protože jsou však \mathbf{W}_n zároveň vlastní funkce Stokesova operátoru \tilde{A}^4 , tak i $\mathbf{W}_n \in V$ a navíc

$$((\mathbf{W}_k, \mathbf{W}_\ell)) = (\tilde{A}\mathbf{W}_k, \mathbf{W}_\ell)_H = (\mu_k \mathbf{W}_k, \mathbf{W}_\ell)_H = \mu_k \delta_{k\ell}. \quad (4.35)$$

Označme nyní

$$V_n = [\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_n]_\lambda. \quad (4.36)$$

Galerkinova metoda spočívá v konstrukci posloupnosti aproximací slabého řešení, tj. funkce V splňující slabou rovnost dle definice 79. n -tou aproximací hledíme jako funkci $V_n: \mathcal{J} \rightarrow V_n$ ve tvaru

$$V_n(t, \mathbf{X}) = \sum_{k=1}^n a_k(t) \mathbf{W}_k(\mathbf{x}),$$

pro niž platí (4.16), tj.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial V_n}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} V_n \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot V_n \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nu \nabla V_n \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x}, \quad (4.37)$$

pro každou $\boldsymbol{\varphi} \in V_n$. Z konstrukce V_n je to totéž, jako když je (4.37) splněna pro každé $\boldsymbol{\varphi} \in \{\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_n\}$. Po dosazení $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{W}_\ell$ získáme

$$\sum_{k=1}^n \dot{a}_k(t) (\mathbf{W}_k, \mathbf{W}_\ell)_H - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k(t) a_j(t) \int_{\Omega} \mathbf{W}_k \cdot \nabla \mathbf{W}_\ell \cdot \mathbf{W}_j \, d\mathbf{x} + \nu \sum_{k=1}^n a_k(t) ((\mathbf{W}_k, \mathbf{W}_\ell)) = (\mathbf{F}, \mathbf{W}_\ell)_H.$$

S využitím vztahů ortogonalit (4.34) a (4.35) dále upravíme na

$$\dot{a}_\ell(t) - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k(t) a_j(t) \int_{\Omega} \mathbf{W}_k \cdot \nabla \mathbf{W}_\ell \cdot \mathbf{W}_j \, d\mathbf{x} + \nu \mu_\ell a_\ell(t) = (\mathbf{F}, \mathbf{W}_\ell)_H. \quad (4.38)$$

Rovnice (4.38) pro $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$ tvoří soustavu obyčejných diferenciálních rovnic pro neznámé funkce $a_1(t), \dots, a_n(t)$. Počáteční podmínky pro tuto soustavu získáme jako

$$a_\ell(0) = \beta_\ell, \text{ kde } \mathbf{V}_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \mathbf{W}_k, \quad (4.39)$$

což znamená, že n -tá aproximace má splňovat n -tou počáteční podmínku

$$\mathbf{V}_n(0, \cdot) = \mathbf{V}_{0,n} := \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{W}_k.$$

Ukážeme, že problém (4.38), (4.39) má řešení na celém intervalu \mathcal{J} . Protože jde o tzv. *autonomní* systém ve tvaru $\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ kde $\mathbf{a} = (a_\ell)$, tj. bez explicitní závislosti pravé strany na čase, mohou nastat pouze dvě možnosti

⁴ \mathbf{W}_n jsou vlastní funkce operátoru \tilde{A}^{-1} , tj. platí $\tilde{A}^{-1} \mathbf{W}_n = \lambda_n \mathbf{W}_n \in V$, kde $\lambda_n \neq 0$, protože \tilde{A}^{-1} je (stejně jako \tilde{A}) prostý. Potom ovšem

$$\tilde{A} \mathbf{W}_n = \tilde{A} \left(\frac{1}{\lambda_n} \tilde{A}^{-1} \mathbf{W}_n \right) = \frac{1}{\lambda_n} \mathbf{W}_n,$$

tj. \mathbf{W}_n je též vlastní funkce operátoru \tilde{A} příslušná vlastnímu číslu $\mu_n = \lambda_n^{-1}$.

1. řešení existuje na celém intervalu \mathcal{J} , nebo
2. v čase $T_b < T_{\text{end}}$ dojde k tzv. „blow-upu“, tj.

$$\lim_{t \rightarrow T_b} \|\mathbf{a}(t)\|_{\mathbb{R}^n} = +\infty. \quad (4.40)$$

Tuto druhou možnost nyní vyloučíme.

Platí

$$\|\mathbf{V}_n\|_{\mathbb{H}}^2 = \int_{\Omega} \mathbf{V}_n \cdot \mathbf{V}_n \, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k a_j (\mathbf{W}_k, \mathbf{W}_j)_{\mathbb{H}} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k a_j \delta_{kj} = \sum_{k=1}^n a_k^2 = \|\mathbf{a}\|_{\mathbb{R}^n}^2.$$

Odhadem normy $\|\mathbf{V}_n\|_{\mathbb{H}}$ lze tedy odhadnout i normu řešení systému ODR, tj. $\|\mathbf{a}\|$. Tento odhad provedeme opět ve smyslu energetické nerovnosti (4.28). Volbou $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{V}_n$ v (4.37) dostaneme vztah analogický (4.27), pouze s \mathbf{V}_n místo \mathbf{V} . Provedením všech úprav až po (4.29) získáváme

$$\|\mathbf{a}\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \|\mathbf{V}_n(t, \cdot)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \|\mathbf{V}_{0,n}\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{k^2}{\nu} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{J}; \mathbb{H})}^2, \quad (4.41)$$

neboli stejnoměrnou omezenost \mathbf{a} nezávisle na t , což vylučuje (4.40). Analogicky k (4.30) a (4.31) navíc máme k dispozici i apriorní odhady

$$\|\mathbf{V}_n\|_{L_{\infty}(\mathcal{J}; \mathbb{H})}^2 \leq \|\mathbf{V}_{0,n}\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{k^2}{\nu} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{J}; \mathbb{H})}^2, \quad (4.42)$$

$$\|\mathbf{V}_n\|_{L_2(\mathcal{J}; \mathbb{V})}^2 \leq \frac{1}{\nu} \|\mathbf{V}_{0,n}\|_{\mathbb{H}}^2 + \frac{k^2}{\nu^2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{J}; \mathbb{H})}^2. \quad (4.43)$$

4.4.3 Limitní přechod

Protože prostor \mathbb{V} je Hilbertův, je dle poznámky 48 i Bochnerův prostor $L_2(\mathcal{J}; \mathbb{V})$ Hilbertův, a tedy je (dle poznámky 20) reflexivní. Podle věty 23 lze tedy z omezené (díky (4.43)) posloupnosti \mathbf{V}_n v $L_2(\mathcal{J}; \mathbb{V})$ vybrat podposloupnost, která slabě konverguje, tj.

$$\mathbf{V}_{k_n} \rightharpoonup \mathbf{V} \in L_2(\mathcal{J}; \mathbb{V}).$$

Od této chvíle však budeme pro zjednodušení značení tuto podposloupnost značit rovněž $\mathbf{V}_n := \mathbf{V}_{k_n}$. Naším cílem je ukázat, že slabá limita \mathbf{V} je zároveň slabým řešením úlohy dle definice 79.

Znovu si uvědomíme, že řešením systému ODR (4.38), (4.39) je funkce \mathbf{V}_n , která skutečně splňuje (4.37) pro každé $t \in \mathcal{J}$ a každou $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{V}_n$ (na rozdíl od formální konstrukce slabé rovnosti, kde o funkci \mathbf{V} v rovnosti (4.16) musíme předpokládat, že existuje!).

Vynásobením (4.37) testovací funkcí $\vartheta \in C_0^{\infty}([0, T_{\text{max}}))$ a zintegrováním přes \mathcal{J} získáme obdobu slabé rovnosti (4.17) ve tvaru

$$\int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} - \underbrace{\mathbf{V}_n \cdot \boldsymbol{\varphi} \dot{\vartheta}}_{(1)} - \underbrace{\mathbf{V}_n \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{V}_n \vartheta}_{(2)} + \underbrace{\nu \nabla \mathbf{V}_n \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \vartheta}_{(3)} - \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varphi} \vartheta \, d\mathbf{x} \, dt = \vartheta(0) \int_{\Omega} \underbrace{\mathbf{V}_{0,n} \cdot \boldsymbol{\varphi}}_{(4)} \, d\mathbf{x}, \quad (4.44)$$

která je splněna pro každé $\vartheta \in C_0^{\infty}([0, T_{\text{max}}))$ a každé $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{V}_n$.

Integrály z (1) a (3) představují lineární funkcionály z $L_2(\mathcal{J}; \mathbb{V})$ do \mathbb{R} aplikované na \mathbf{V}_n , a proto pro ně díky $\mathbf{V}_{k_n} \rightharpoonup \mathbf{V}$ (viz definice slabé konvergence 21) platí

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} (1) \, d\mathbf{x} \, dt &= \int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} \mathbf{V}_n \cdot \boldsymbol{\varphi} \dot{\vartheta} \, d\mathbf{x} \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\varphi} \dot{\vartheta} \, d\mathbf{x} \, dt, \\ \int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} (3) \, d\mathbf{x} \, dt &= \int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{V}_n \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \vartheta \, d\mathbf{x} \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \vartheta \, d\mathbf{x} \, dt, \end{aligned}$$

neboli konvergují k příslušným výrazům ve slabé rovnosti (4.17). Totéž platí pro člen (4), protože dle volby n -té počáteční podmínky (4.39) platí

$$\mathbf{V}_{0,n} \rightarrow \mathbf{V}_0$$

ve V , takže

$$\int_{\Omega} (4) dx = \int_{\Omega} \mathbf{V}_{0,n} \cdot \boldsymbol{\varphi} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \mathbf{V}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} dx.$$

Problémem však zůstává limitní přechod v integrálu z (2), k němuž nestačí slabá konvergence \mathbf{V}_n k \mathbf{V} v $L_2(\mathcal{J}; V)$.

Řešením je následující postup:

1. Nejprve uvažujme časovou derivaci $\frac{\partial \mathbf{V}_n}{\partial t}$ jakožto funkci do duálního prostoru

$$\frac{\partial \mathbf{V}_n}{\partial t} : \mathcal{J} \rightarrow V'$$

ve smyslu

$$\left(\frac{\partial \mathbf{V}_n}{\partial t}(t) \right) (\boldsymbol{\varphi}) = \left(\frac{\partial \mathbf{V}_n}{\partial t}(t, \cdot), \boldsymbol{\varphi} \right)_H = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{V}_n}{\partial t}(t, \cdot) \cdot \boldsymbol{\varphi} dx \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in V.$$

Potom lze ukázat [Pok20a] omezenost $\frac{\partial \mathbf{V}_n}{\partial t}$ v normě

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{V}_n}{\partial t} \right\|_{L_{p_1}(\mathcal{J}; V')} = \left\| \left\| \frac{\partial \mathbf{V}_n}{\partial t} \right\|_{V'} \right\|_{L_{p_1}(\mathcal{J})} = \left\| \sup_{\boldsymbol{\varphi} \in V, \|\boldsymbol{\varphi}\|_V=1} \left| \left(\frac{\partial \mathbf{V}_n}{\partial t}(t) \right) (\boldsymbol{\varphi}) \right| \right\|_{L_{p_1}(\mathcal{J})} \leq \dots$$

Přitom pro $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ lze použít $p_1 = 2$, ale pro $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ máme $p_1 = \frac{4}{3}$.

2. Následně uijeme Lionsova-Aubinova lemmatu 73, kde zvolíme $\mathcal{B}_0 = V$, $\mathcal{B} = H$, $\mathcal{B}_1 = V'$, $p_0 = 2$ a $p_1 \in \{2, \frac{4}{3}\}$ dle dimenze oblasti Ω (viz předchozí bod). Dle poznámky 78 máme $V \hookrightarrow\hookrightarrow H$ a navíc z poznámky 69 (tj. víme, že $V \hookrightarrow H$) a věty 70 (tj. $V \hookrightarrow H \implies H' \hookrightarrow V$) platí

$$H \equiv H' \hookrightarrow V',$$

kde jsme ztotožnili $H \equiv H'$ dle poznámky 18. Tvrzením Lionsova-Aubinova lemmatu je v tomto případě

$$\mathcal{Y} \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\mathcal{J}; H) \tag{4.45}$$

kde \mathcal{Y} je podprostor $L_2(\mathcal{J}; V)$ obsahující funkce s omezenými derivacemi, v němž leží všechny aproximace \mathbf{V}_n díky tomu, co bylo řečeno výše.

3. Díky kompaktnímu vnoření (4.45) víme (viz definice 68 a 65), že

$$\mathbf{V}_n \xrightarrow[\text{(silně)}]{} \mathbf{V} \text{ v } L_2(\mathcal{J}; H).$$

Díky silné konvergenci můžeme dokončit limitní přechod v nelineárním členu (2).

Nechť je nyní $m \in \mathbb{N}$ pevné a zvolme $\boldsymbol{\varphi} \in V_m$. Navíc předpokládejme i

$$\boldsymbol{\varphi} \in C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)^3, \tag{4.46}$$

čehož využijeme na závěr důkazu. Nechť $n \geq m$ a $\vartheta \in C_0^{\infty}([0, T_{\max}))$. Ukážeme, že

$$\left| \int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} \mathbf{V}_n \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{V}_n \vartheta dx dt - \int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{V} \vartheta dx dt \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \tag{4.47}$$

Upravujeme levou stranu

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} (\mathbf{V}_n \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{V}_n - \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{V}) \vartheta \, dx \, dt \right| \\
 &= \left| \int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} \left(\mathbf{V}_n \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{V}_n - \underbrace{\mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{V}_n + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{V}_n - \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{V}}_{\text{uměle přidáno a odebráno}} \right) \vartheta \, dx \, dt \right| \\
 &\leq \underbrace{\int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} |(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}) \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{V}_n \vartheta| \, dx \, dt}_{(A)} + \underbrace{\int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} |\mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}) \vartheta| \, dx \, dt}_{(B)}
 \end{aligned}$$

Člen (B) je lineárním funkcioálem na prostoru $L_2(\mathcal{J}; \mathbf{H})$, aplikovaným na rozdíl $(\mathbf{V}_n - \mathbf{V})$. Dokonce již ze slabé konvergence

$$\mathbf{V}_n \rightharpoonup \mathbf{V}$$

v $L_2(\mathcal{J}; \mathbf{H})$ proto opět plyne

$$(B) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Člen (A) odhadneme dále pomocí Hölderovy nerovnosti 53 (pro integrál přes \mathcal{J}) a Hölderovy nerovnosti pro vektorové funkce 54 s $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$

$$(A) \leq \sqrt{\underbrace{\int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} \|\mathbf{V}_n - \mathbf{V}\|^2 \, dx \, dt}_{(A1)}} \sqrt{\underbrace{\int_{\mathcal{J}} \int_{\Omega} \|\nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{V}_n\|^2 \, dx \, \vartheta^2 \, dt}_{(A2)}},$$

přičemž

$$(A1) = \|\mathbf{V}_n - \mathbf{V}\|_{\mathbf{H}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

K důkazu (4.47) tedy stačí omezenost členu (A2). Ten dále upravíme

$$\begin{aligned}
 (A2) &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \left(\underbrace{\sum_{i=1}^3 \partial_j \varphi_i V_{n,i}}_{[\text{Hölder } p=q=\frac{1}{2}]} \right)^2 \, dx \leq \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 (\partial_j \varphi_i)^2 \sum_{i=1}^3 V_{n,i}^2 \, dx \\
 &= \int_{\Omega} (\nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}) \|\mathbf{V}_n\|^2 \, dx.
 \end{aligned}$$

Ještě jednou použijeme Hölderovu nerovnost 54 s volbou $\frac{1}{p} = \frac{1}{3}, \frac{1}{q} = \frac{2}{3}$

$$(A2) \leq \underbrace{\left(\int_{\Omega} \|\mathbf{V}_n\|^6 \, dx \right)^{\frac{1}{3}}}_{\|\mathbf{V}_n\|_{L_6(\Omega)^3}^2} \left(\int_{\Omega} (\nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi})^{\frac{3}{2}} \, dx \right)^{\frac{2}{3}} \, dt.$$

Druhý integrál je konečný z dodatečného předpokladu regularity funkce $\boldsymbol{\varphi}$ (4.46), Norma $\|\mathbf{V}_n\|_{L_6(\Omega)^3}$ je rovněž omezená, neboť zároveň $\mathbf{V}_n(t, \cdot) \in \mathbf{V}$ a z Rellich-Kondrachovova lemmatu 72 pro $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ i

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ totiž máme⁵

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L_6(\Omega).$$

Ukázali jsme tedy, že limita V splňuje slabou rovnost (4.17) pro $\boldsymbol{\varphi} \in V_m \cap C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3$, kde ovšem m je libovolně velké. Z konstrukce V_m pomocí (4.36) platí, že pro každý prvek

$$\boldsymbol{\psi} \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3 = H \cap C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3$$

existuje posloupnost $\boldsymbol{\varphi}_m \in V_m \cap C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3$ taková, že $\lim_{m \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\varphi}_m = \boldsymbol{\psi}$ a navíc V splňuje (4.17) s volbou $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_m$ pro každé $m \in \mathbb{N}$. Limitním přechodem pro $m \rightarrow +\infty$ pak zjistíme, že (4.17) je splněna i pro $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}$ (všechny členy jsou lineární vzhledem k $\boldsymbol{\varphi}_m$, tj. žádný problém nenastane)⁶. Uzavíráme, že V splňuje slabou rovnost (4.17) pro každé

$$\boldsymbol{\varphi} \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3,$$

a je tedy dle definice 79 slabým řešením úlohy nestlačitelného proudění.

4.4.4 Jednoznačnost řešení, nediskutované a otevřené problémy

Zkoumání řešení Navierových-Stokesových rovnic zdaleka není omezeno na důkaz existence slabého řešení:

- jednoznačnost řešení v \mathbb{R}^2 byla dokázána
- jednoznačnost řešení v \mathbb{R}^3
 - jsou známy jen dílčí výsledky
- existence funkce P , která má smysl tlaku (existuje pro dostatečně hladkou hranici oblasti)
 - pokud V je dostatečně hladká, že existuje i klasické řešení, pak existuje i P ([Neu06b])
- otázky lokálnosti vs. globálnosti řešení, otázky regularity, souvislost s regularitou počáteční podmínky
 - hladké řešení existuje jen lokálně v čase (Ladyženská, Kyselev 1957)
- energetická nerovnost
 - Nalezli jsme řešení, které splňuje energetickou nerovnost.
 - Otázka, zda každé slabé řešení musí splňovat energetickou nerovnost, je otevřený problém

Řada tvrzení je dokázána v [Pok20a] a shrnutí známých a neznámých výsledků je také v [Pok20b]. Pokročilé partie analýzy NS rovnic pro stlačitelné proudění lze najít v [NS04, FN17].

⁵Přesně řečeno lemma 72 implikuje

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L_{\mathcal{D}}(\Omega)$$

pro $\mathcal{D} \in [1, 6]$ když $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a pro $\mathcal{D} \in [2, +\infty)$ pro $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Pro odhad členu (A2) lze tedy použít Hölderovu nerovnost s volbou $2p = \mathcal{D} \in [2, 6]$ ale zároveň $p > 1$ (aby $\exists q > 1$ tak, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Celkem tedy $p \in (1, 3]$. Volbou maximálního možného $p = 3$ klademe na $\nabla \boldsymbol{\varphi}$ minimální možné požadavky na regularitu. Za předpokladu (4.46), který používáme, ale lze volit p i jinak.

„Čarování“ s odhady pomocí Hölderovy nerovnosti lze v literatuře nalézt v různých variantách (viz např. [Pok20a, str. 36]), přičemž pro důkaz některých dalších tvrzení už je nutný konkrétní postup.

⁶Tomu se někdy říká argument uzávěru, protože

$$\overline{\bigcup_{m=1}^{+\infty} [V_m \cap C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3]} = H \cap C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3 = C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)^3.$$

Turbulentní proudění a modelování turbulence

5.1 Turbulentní proudění

- princip: kinetická energie se ukládá ve vírech různých velikostí (kaskáda vírů)
- přenos kinetické energie je od větších měřítek po menší, ale teoreticky i opačně
- na nejmenších měřítkách dochází k disipaci kinetické energie na energii vnitřní

5.2 Průměrování veličin

5.2.1 Reynoldsovo průměrování

- dekompozice veličiny $f \in \{P, \rho, V_i, T\}$ na střední hodnoty a fluktuaace

$$f = \bar{f} + f' \quad (5.1)$$

- průměrování v čase (vhodné pro stacionární proudění)

$$\bar{f}_T(t, \mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau, \mathbf{x}) d\tau,$$

- průměrování v prostoru (vhodné pro homogenní proudění)

$$\bar{f}_{\mathcal{V}}(t, \mathbf{x}) = \lim_{|\mathcal{V}(\mathbf{x})| \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\mathcal{V}(\mathbf{x})|} \int_{\mathcal{V}(\mathbf{x})} f(t, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi},$$

kde $\mathbf{x} \in \mathcal{V}(\mathbf{x})$,

- průměrování přes statistický soubor (*ensemble averaging*), tj. N opakování stejného procesu (experimentu)

$$\bar{f}_E(t, \mathbf{x}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_k f(t, \mathbf{x})$$

- V praxi $T \rightarrow +\infty$, $|\mathcal{V}| \rightarrow +\infty$ znamená, že interval, resp. kontrolní objem pro průměrování má řádově větší velikost než časové, resp. prostorové měřítko, turbulentních jevů.

5.2.2 Reynoldsova pravidla průměrování

Pro průměrované veličiny f, g a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí za předpokladu stacionárního, resp. homogenního proudění

$$\begin{aligned}\overline{\alpha f} &= \alpha \bar{f}, \\ \overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g}, \\ \overline{fg} &= \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'}, \\ \overline{\partial_i f} &= \partial_i \bar{f}\end{aligned}$$

a dále

$$\overline{\bar{f}} = \bar{f},$$

z čehož též plyne

$$\overline{f'} = 0.$$

V případě nestacionárního nehomogenního proudění lze metodu (např. časového) průměrování změnit na

$$\bar{f}_T(t, \mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} f(\tau, \mathbf{x}) d\tau,$$

kde $\delta t \ll t_0$ a t_0 je časové měřítko pomalých (makroskopických) změn proudění. Pro

$$\frac{\delta t}{t_0} \rightarrow 0$$

lze z Taylorova rozvoje

$$f(t + \delta t) = f(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(t) \delta t + \dots$$

ukázat

$$\overline{\bar{f}} \rightarrow \bar{f}, \quad \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}} \rightarrow \frac{\partial \bar{f}}{\partial t},$$

a tedy i asymptotické splnění dalších pravidel průměrování.

5.2.3 Reynoldsovsky průměrované Navierovy–Stokesovy rovnice (RANS)

- pro *nestlačitelné* proudění lze vyjít z rovnic (3.42) a aplikovat Reynoldsovo průměrování na V_i , resp. P
- vede k formálně stejnému tvaru (NS rovnice) pro zprůměrované veličiny, ale vystupuje tam navíc tzv. Reynoldsův tenzor napětí

$$\mathbf{T}^R = \left(\tau_{ij}^R \right), \quad \tau_{ij}^R = -\rho v'_i v'_j = -\rho (\overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j).$$

– tvar Reynoldsova tenzoru napětí je nutné *modelovat*

* k - ε model, k - ω model...

5.2.4 Favreovo průměrování, stlačitelné proudění

- při modelování stlačitelného proudění lze použít Reynoldsovo průměrování na všechny veličiny (nejen P a V_i , ale i ρ a T), ale výsledné rovnice je nutné doplnit o korelace modelující fluktuace hustoty
- lepší je použít na Reynoldsovo průměrování na ρ a P a Favreovo průměrování na V_i, T, E, H
- Favreovo průměrování je dáno vztahem

$$\tilde{f} = \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho f dt,$$

kde $\bar{\rho}$ je Reynoldsovsky průměrovaná hustota.

- podobně jako u Reynoldsova průměrování (5.1) lze tedy příslušnou veličinu rozložit na průměrovanou a fluktuující část

5.2.5 Favreovsky a Reynoldsovsky průměrované Navierovy–Stokesovy rovnice

- **TODO:** viz [Bla15], str. 220
- Favreovsky průměrovaný Reynoldsův tenzor napětí

5.3 Okrajové podmínky

- okrajové podmínky pro k, ε, ω

5.4 Large Eddy Simulation

- LES .. large eddy simulation
- je založeno na prostorovém filtrování

$$f = \bar{f} + f',$$

kde \bar{f} je makroskopická (na numerické síti vyřešená) část f a f' je mikroskopická (*subgrid-size*) složka

- Smagorinsky
- malé víry jsou vyfiltrovány, velké jsou zpracovány na dostatečně jemné síti

5.5 Moderní metody modelování turbulence

- DNS simulace a učení NN

Základy termodynamiky tekutin

6.1 Vztah mezi vnitřní energií a absolutní teplotou

Vyjdeme z definic měrných tepelných kapacit (tj. vztažených na jednotku hmotnosti) při stálém objemu a stálém tlaku

$$c_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V, \quad c_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P, \quad (6.1)$$

kde

$$H = E + \frac{P}{\rho}$$

je *měrná (specifická) entalpie*. Obvyklé termodynamické značení

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V$$

v (6.1) je třeba chápat následujícím způsobem. Vnitřní energie je obecně funkcí stavových veličin P , V , T . Dolní index V značí, že proces probíhá při konstantním objemu. Ze stavové rovnice proto plyne, že tlak je již funkcí pouze teploty, tj. $P = P(T)$ a vnitřní energii lze tedy vyjádřit jako funkci

$$\mathcal{E}(T) = E(\Phi(T)),$$

kde

$$\Phi(T) = (P(T), V, T).$$

Potom změna vnitřní energie systému v závislosti na teplotě je podle věty o derivaci složené funkce dána vztahem

$$c_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V := \frac{d\mathcal{E}(T)}{dT} = \frac{\partial E}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial T} + \frac{\partial E}{\partial V} \underbrace{\frac{\partial V}{\partial T}}_{=0} + \frac{\partial E}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial T} = \frac{\partial E}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial T} + \frac{\partial E}{\partial T}.$$

Analogická úvaha platí pro výpočet c_P .

Pro kapaliny, které lze považovat za nestlačitelné ($\rho = \text{konst.}$) platí

$$c_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_P + \underbrace{\left(\frac{\partial \left(\frac{P}{\rho} \right)}{\partial T} \right)_P}_{=0} = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_P.$$

Některé tekutiny lze považovat za tzv. *perfektní* plyny, u nichž vnitřní energie závisí pouze na teplotě. Pro ně lze potom vyjádřit

$$E(T) = \int_{T_{\text{ref},i}}^T c_V(\tau) d\tau, \quad H(T) = \int_{T_{\text{ref},i}}^T c_P(\tau) d\tau \quad (6.2)$$

kde T_{ref} je libovolná referenční teplota. Protože nikde v systému rovnic nevystupuje přímo hodnota vnitřní energie, ale pouze její derivace, lze T_{ref} volit libovolně, např. $T_{\text{ref}} = 0$. V mnoha aplikacích se teplota mění v rozsahu, kdy lze tepelné kapacity považovat za konstantní. Potom z (6.2) plynou vztahy

$$E = c_V T, \quad H = c_P T. \quad (6.3)$$

Hodnoty c_V a c_P pro různé tekutiny jsou změřeny a lze je dohledat v tabulkách.

6.2 Stavové rovnice

Stavová rovnice udává závislost mezi stavovými veličinami uzavřeného systému. Stavové veličiny jsou takové, které závisí pouze na aktuálním stavu systému. Například pro plyny udává stavová rovnice vztah mezi teplotou T , tlakem P a objemem V

$$f(T, P, V) = 0.$$

V dynamice tekutin je vhodnější tvar

$$f(T, P, \rho) = 0. \quad (6.4)$$

Vzah (6.4) společně se vztahem mezi specifickou vnitřní energií E a teplotou T umožňuje uzavřít systém rovnic popisující proudění (viz část 3.10).

6.2.1 Stavová rovnice ideálního plynu

Dobře známá *stavová rovnice ideálního plynu* má tvar

$$PV = nRT,$$

kde n je molární množství plynu a R je univerzální (molární) plynová konstanta s hodnotou

$$R \doteq 8.31446 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \text{K}.$$

Tuto rovnici lze rovněž přepsat do tvaru vztáženého na jednotku objemu

$$P = \frac{n}{V} RT = \frac{nM}{V} \frac{R}{M} T = \rho R_{\text{spec}} T, \quad (6.5)$$

kde M je molární hmotnost plynu a $R_{\text{spec}} = R/M$ je tzv. specifická plynová konstanta. Dle tzv. Maye-rova vztahu (důkaz např. v [CB15, od str. 668] platí pro ideální plyn také

$$c_P - c_V = R_{\text{spec}}. \quad (6.6)$$

Dosazením do (6.5) s využitím (6.3) dostáváme stavovou rovnici ideálního plynu ve tvaru

$$P = \rho (c_P - c_V) T = \left(\frac{c_P}{c_V} - 1 \right) \rho E = (\kappa - 1) \rho E, \quad \text{kde } \kappa = \frac{c_P}{c_V}. \quad (6.7)$$

Koeficient κ se nazývá Poissonova konstanta (angl. jednoduše *heat capacity ratio*).

6.2.2 Další tvary stavové rovnice

- EOS pro směsi apod.

6.3 Přestup tepla

6.3.1 Přestup tepla radiací

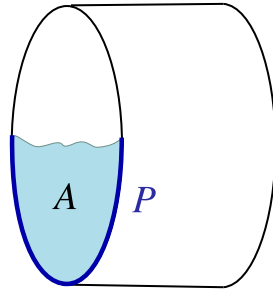
- integro-diferenciální rovnice pro radiační přestup tepla

Formulace problémů v inženýrské praxi

7.1 Okrajové podmínky pro úlohy proudění

- rozdělení hranice na vstup, výstup a stěnu
- podmínky na vstupu a výstupu pro vazké a nevazké proudění
 - řada možností vyhovující teorii PDR
 - např. v trubce: rychlost nebo tok hmoty (hybnost) na vstupu, tlak na výstupu,
 - ostatní veličiny se dopočítávají z proudového pole, tj. platí pro ně nulová Neumannova okrajová podmínka
 - existují případy, kde na vstupu lze předepsat všechny podmínky, na výstupu žádné (nadzvukové vazké proudění, nevazké proudění)
- podmínky na stěně pro vazké a nevazké proudění ($\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ nebo no-slip podmínka $V = 0$)
- Navierova okrajová podmínka: $\boldsymbol{\nu}$ je úměrné tečné složce \mathbf{T}_D k $\partial\Omega$
- Žádná okrajová podmínka není zcela realistická (např. ve skutečnosti nebude na výstupu z trubky vždy konstantní atmosférický tlak, neboť bude záviset na tom, co zrovna z trubky vyfouklo.). Vynucením idealizované okrajové podmínky může dojít k oscilacím a odrazům.
- resistance boundary condition
- pulzující proudění - okrajové podmínky zamezující odrazu (Omer Rathore - vystoupení na NC2019)
- far field okrajové podmínky
- periodické okrajové podmínky a podmínky symetrie (implementační záležitost: buňky propojeny, jako by pokračovaly za hranicí oblasti)
- okrajové podmínky pro přestup tepla
 - okrajové podmínky ve 3D a zdrojové členy v 1D, Nusseltovo číslo
 -

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\rho T) = A_{\text{conv}} \cdot (T - T_{\text{wall}}).$$



Obrázek 7.1: Průtočná plocha a omočený obvod

7.2 Proudění tekutin v porézním prostředí

V této kapitole stručně popíšeme proudění tekutin v porézním prostředí. Porézní prostředí je tvořeno pevným skeletem a volným, propojeným prostorem (póry), skrze který mohou tekutiny proudit. Přítomnost pevného skeletu způsobí, že rovnici zákona zachování hybnosti lze aproximovat Darcyho zákonem

$$\mathbf{V} = -\frac{1}{\mu} \mathbf{K} (\nabla P - \rho \mathbf{g}), \quad (7.1)$$

kde \mathbf{K} [m^2] je tenzor propustnosti prostředí.

Darcyho zákon (7.1) lze dále dosadit do rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0,$$

čímž dostaneme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\frac{\rho}{\mu} \mathbf{K} (\nabla P - \rho \mathbf{g}) \right) = 0. \quad (7.2)$$

Při uvažování stavové rovnice pro hustotu $\rho = \rho(P)$ lze pak dynamický popis proudění tekutiny v porézním prostředí popsat jedinou parciální diferenciální rovnicí (7.2) pro neznámý tlak P .

7.3 Bezrozměrná čísla charakterizující proudění

- *Reynoldsovo* číslo vyjadřující charakter proudění (laminární nebo turbulentní)

$$\text{Re} = \frac{\rho |\mathbf{V}| D_H}{\mu} = \frac{|\mathbf{V}| D_H}{\nu},$$

kde D_H je tzv. *hydraulický průměr* (trubky), resp. v obecném případě tzv. charakteristická vzdálenost. Hydraulický průměr je hypotetický průměr válcové trubky, v níž by se proudění chovalo stejně jako ve skutečné trubce s obecným tvarem průřezu. Hydraulický *poloměr* je definován jako poměr *průtočné plochy* (*cross-sectional flow area*) k *omočenému obvodu* (*wetted perimeter*), viz obrázek 7.1, a hydraulický průměr jako jeho čtyřnásobek (!), tj.

$$R_H = \frac{A}{P}, \quad D_H = 4R_H.$$

Například pro zcela naplněnou trubku s kruhovým průřezem o poloměru R vychází

$$R_H = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2}, \quad D_H = 2R (= D).$$

Pro trubku s obdélníkovým průřezem o stranách a, b platí

$$D_H = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}.$$

- *Machovo* číslo, udávající poměr rychlosti proudění vůči lokální rychlosti zvuku v daném místě

$$M = \frac{|V|}{A},$$

kde lokální rychlost zvuku je obecně dána rovnicí [MMD16]

$$A = \sqrt{\kappa \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T},$$

resp. pro ideální plyn splňující stavovou rovnici (6.5) je

$$A = \sqrt{\kappa R_{\text{spec}} T},$$

kde $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$, viz část 6.2.1.

- *Prandtlovo* číslo udávající vztah mezi difuzivitou hybnosti (tj. vazkostí) a difuzivitou tepla

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu/\rho}{\lambda/(\rho c_p)} = \frac{\mu c_p}{\lambda},$$

kde

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} \text{ [m}^2 \cdot \text{s}^{-1}\text{]}$$

je tepelná difuzivita a λ [W · m · K⁻¹] je tepelná vodivost.

- *Schmidtovo* číslo udávající poměr difuzivity hybnosti a hmotnosti

$$\text{Sc} = \frac{\nu}{D} = \frac{\mu}{\rho D},$$

kde D [m² · s⁻¹] je difuzní koeficient (hmoty).

- *Pécletovo* číslo udává poměr advekčního a difuzního transportu libovolné veličiny ve volném proudě. Pro transport hmoty platí

$$\text{Pe}_M = \frac{D_H |V|}{D} = \text{ReSc}.$$

Pro transport tepla platí

$$\text{Pe}_E = \frac{D_H |V|}{\alpha} = \text{RePr}.$$

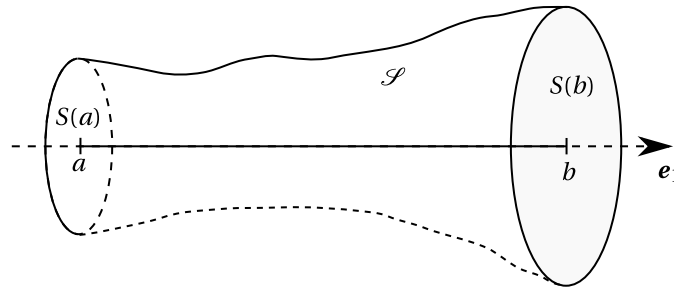
- *Nusseltovo* číslo udávající poměr konvektivního a konduktivního přestupu tepla na hranici (na stěně)

$$\text{Nu} = \frac{h}{\lambda/L} = \frac{hL}{\lambda},$$

přičemž na stěně trubky je přenos tepla dán koeficientem konvekce

$$\dot{Q} = h(T_w - T_\infty),$$

kde T_w je teplota trubky a T_∞ teplota plynu ve volném proudě.

Obrázek 7.2: Kontrolní objem \mathcal{V} v trubce s proměnlivým průřezem.

- *Sherwoodovo* číslo udávající poměr konvektivního a difuzního přesunu hmoty na rozhraní dvou látek, resp. fází

$$\text{Sh} = \frac{u}{D/L} = \frac{uL}{D},$$

kde L je charakteristický rozměr a u [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] je koeficient konvektivního přesunu hmoty (de facto rychlost). Například pro vícefázové proudění jde o absolutní hodnotu rozdílu rychlostí jednotlivých fází. Využijte se například při modelování rychlosti

- přestupu vodní páry k nebo od kapičky vody při fázových přechodech,
- přístupu kyslíku k povrchu hořící částice.

Charakteristický rozměr L je v tom případě roven průměru kapičky, resp. částice.

7.4 Kvazi-1D proudění

Uvažujme proudění v trubce V orientované rovnoběžně s osou $x \equiv x_1$ o proměnlivém vnitřním průřezu $S(x)$ s plochou $|S(x)| = A(x)$ (na tvaru nezáleží). Zvolme nyní kontrolní objem $\mathcal{V} \subset V$ jako vnitřní část trubky pro $x \in (a, b)$ (viz obr. 7.2). Potom

$$\mathcal{V} = \{S(x) | x \in (a, b)\}.$$

Zákon zachování hmoty ve tvaru (2.17) má tedy pro tuto volbu \mathcal{V} tvar

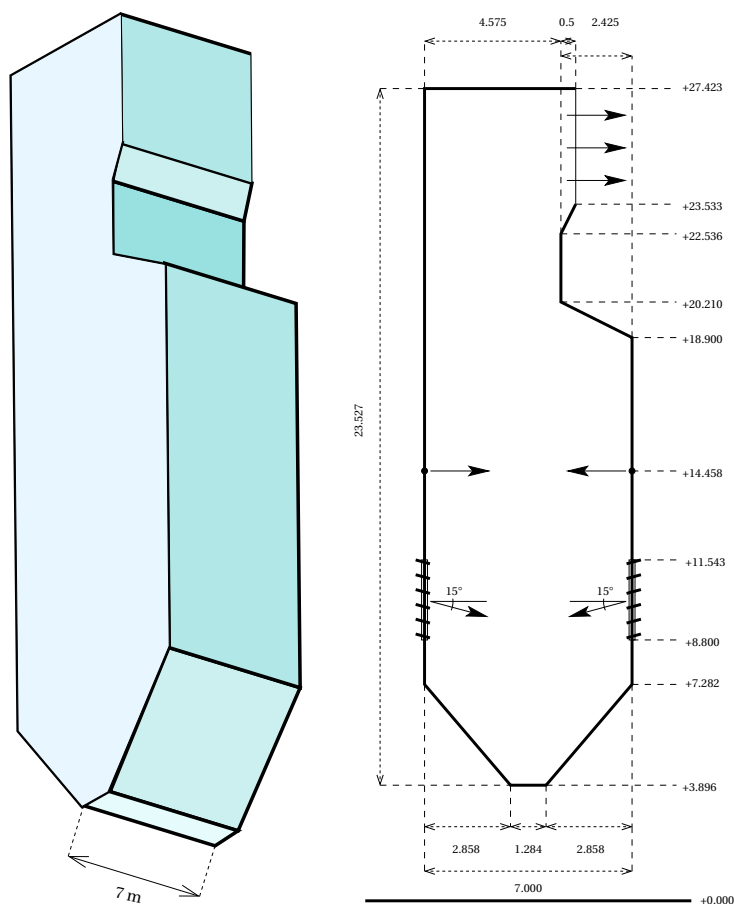
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathbf{x} + \int_{\partial\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^b dx \int_{S(x)} \rho d(x_2, x_3) + \int_{S(a)} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S(b)} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS, \end{aligned} \quad (7.3)$$

kde \mathcal{S} je „plášť“ objemu \mathcal{V} mezi podstavami $S(a)$ a $S(b)$. Bez ohledu na volbu okrajové podmínky na stěně (viz část 7.1) bude platit

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ na } \mathcal{S}.$$

Proto poslední člen v (7.3) vypadne a dále tedy platí

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int_a^b A(x) \rho(t, \boldsymbol{\xi}_x) dx + A(b) \rho V_1|_{(t, \boldsymbol{\xi}_b)} - A(a) \rho V_1|_{(t, \boldsymbol{\xi}_a)} \\ &= \int_a^b A(x) \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \boldsymbol{\xi}_x) dx + \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (A(x) \rho V_1|_{(t, \boldsymbol{\xi}_x)}) dx, \end{aligned}$$



Obrázek 7.3: Trojrozměrná geometrie spalovací komory průmyslového kotle a její dvourozměrný model.

kde z věty o střední hodnotě v integrálu přes $S(x)$ platí $\xi_x \in S(x)$. Vzhledem k libovolné volbě intervalu (a, b) pak musí platit

$$A(x) \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \xi_x) + \frac{\partial}{\partial x} (A(x) \rho V_1|_{(t, \xi_x)}) = 0. \quad (7.4)$$

Zavedeme-li nyní funkce $\bar{\rho}(t, x) = \rho(t, \xi_x)$, $\bar{V}_1(t, x) = V_1(t, \xi_x)$, lze (7.4) přepsat na

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}(t, x) + \frac{1}{A(x)} \frac{\partial}{\partial x} (A(x) \bar{\rho}(t, x) \bar{V}_1(t, x)) = 0. \quad (7.5)$$

Hodnoty funkcí $\bar{\rho}(t, x)$, $\bar{V}_1(t, x)$ lze též považovat za průměrné hodnoty hustoty, resp. x -ové složky rychlosti na průřezu $S(x)$ v čase t .

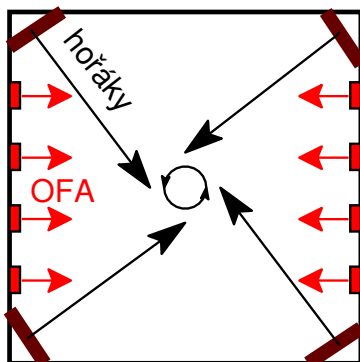
7.5 Reagující vícesložkové proudění, modelování hoření

Představíme značně komplikovanou úlohu proudění, spalování, přestupu tepla a chemických reakcí ve spalovací komoře průmyslového kotle na práškové uhlí, na níž si předvedeme různé aspekty matematického modelování fyzikálních a průmyslových procesů. Model je založen na pracích [BSM⁺ 13b, BSM⁺ 13a], které vznikly v rámci společného projektu FJFI ČVUT a Honeywell.

Palivem v kotli je směs uhlí a biomasy obecně různého původu. Obvykle se jedná o obilné otruby či dřevní štěpku, která se prodává ve formě lisovaných pelet. Biomasa je zastoupena pouze v jednotkách procent, neboť její vyšší podíl by měl negativní vliv na provoz kotle (zanášení tepelných

as received basis								
A	C			H	O	N	S	W
ash (A)	fixed carbon (FC)		volatile matter (VM)				moisture (W)	
char (coke)			volatiles					

Obrázek 7.4: Složení paliva z hlediska chemického a fyzikálního.



Obrázek 7.5: Horizontální řez spalovací komorou s naznačeným uspořádáním hořáků.

výměníků apod.). Každé palivo má chemické složení s jistým zastoupením základních chemických prvků (*ultimate analysis*) a zároveň složení z hlediska fyzikálního (*proximate analysis*) - viz obrázek 7.4. Chemickými reakcemi při spalování jednotky hmotnosti paliva se uvolní tzv. spalné teplo (*HHV* - *higher heating value*). V palivu je však zastoupena vlhkost, která se při spalování vypaří. Latentní teplo, které je na vypaření vlhkosti spotřebováno, snižuje množství okamžitě dostupné tepelené energie. Jeho odečtením od spalného tepla získáváme tzv. výhřevnost (*LHV*, *lower heating value*). V zařízeních, která v rámci pracovního cyklu zajišťují i kondenzaci spalin (kondenzační kotle), pak dochází k využití celého spalného tepla a efektivita těchto zdrojů tepla je vzhledem k LHV vyšší než 100%.

Schéma spalovací komory vysoké téměř 30 metrů je na obrázku 7.3. V každém rohu spalovací komory je šest hořáků nad sebou, které vhánějí směs předehřátého tzv. primárního vzduchu spolu s jemně namletým palivem. Proud této směsi je ještě obklopen proudem tzv. sekundárního vzduchu. Výše nad hořáky je vstup tzv. dohořivacího (terciárního) vzduchu (*OFA* - *Over Fire Air*), který za cenu snížení teploty spalin může zvýšit koncentraci kyslíku ve spalinách a zajistit dokonalejší spalování směsi. U stropu komory je realizován odvod spalin do komína. Teplo je předáváno do stěn radiací a konvekcí. Ve stěnách jsou vertikální trubky (várnice), v nichž se z kapalné vody tvoří pára pod vysokým tlakem. Proud páry je veden shora dolů, tj. proti proudu spalin, aby byl přestup tepla efektivnější. V horní části spalovací komory je umístěn výměník tepla (tzv. přehřívák), v němž vzniká přehřátá pára. Pára pak pohání turbínu k výrobě elektřiny a po ochlazení je dále využita k distribuci tepla. Mimo spalovací komoru kotel obsahuje ještě další výměník tepla, tzv. ekonomizér, který využívá již částečně vychladlých spalin k předehřátí ještě kapalné vody, a dále předehřívá primárního vzduchu. V našem modelu však vystupuje pouze samotná spalovací komora.

Model spalovací komory je dvourozměrný, což v tomto případě není příliš vhodné. Proudění v komoře je totiž velmi závislé na prostorovém uspořádání hořáků, které vytvářejí vír v centrální části komory (viz obrázek 7.5). Proudění v komoře je značně turbulentní, což přispívá k promíchávání paliva se vzduchem a tedy i k dokonalejšímu spalování.

7.5.1 Rovnice dynamiky tekutin a bilance energie

Systém rovnic popisující 2D proudění má tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \partial_{x_i} (\rho V_i) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) + \partial_{x_i} (P + \rho V_i^2) &= \partial_{x_j} (\mu \partial_{x_j} V_i) + \frac{1}{3} \partial_{x_j} (\mu \partial_{x_i} V_j) - \frac{2}{3} \partial_{x_i} (\rho k) + \rho g_i, \\ c_P \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho T) + \partial_{x_i} (\rho T V_i) \right] &= \underbrace{-R_{\text{char}} h_{\text{char}} - R_{\text{vol}} h_{\text{vol}} - R_{\text{bms}} h_{\text{bms}}}_{\text{produkce tepla}} - \underbrace{(q_c + q_{rg} + q_{rw})}_{\text{přestup tepla}} \\ &+ \partial_{x_j} \left[\left(\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \partial_{x_j} k \right] \end{aligned} \quad (7.6)$$

kde tlak P se spočítá pomocí stavové rovnice ideálního plynu

$$P = \rho R_{\text{spec}} T. \quad (6.5)$$

Členy $R_{\text{char}}, R_{\text{vol}}, R_{\text{bms}}$ představují rychlosti vyhořívání (postupně) pevné složky uhlí, těkavé složky uhlí, a biomasy (viz část 7.5.4). Členy q_c, q_{rg}, q_{rw} představují různé způsoby přestupu tepla, popsané v části 7.5.8.

Rychlost vyhořívání částice je závislá na její velikosti. Průměrná velikost částic uhlí v daném bodě se vypočítává z průměrného počtu částic n na jednotku objemu, což je intenzivní veličina podléhající pasivnímu transportu dle rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \partial_{x_i} (n V_i) = \underbrace{\partial_{x_i} \left(\frac{\mu_T}{\text{Sc}_t} \partial_{x_i} n \right)}_{\text{turbulentní difuze}}.$$

7.5.2 Modelování turbulence

Turbulence je modelována k - ε modelem, přičemž k je turbulentní kinetická energie a ε je rychlost její disipace. Tyto veličiny splňují rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \partial_{x_i} (\rho k V_i) &= \partial_{x_j} \left[\left(\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \partial_{x_j} k \right] + G_k - G_b - Y_m - \rho \varepsilon, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \partial_{x_i} (\rho \varepsilon V_i) &= \partial_{x_j} \left[\left(\mu_L + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \partial_{x_j} \varepsilon \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned}$$

kde koeficienty tření splňují

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad \mu = \mu_L + \mu_T,$$

a členy produkce turbulence mají tvar

$$\begin{aligned} G_k &= (\partial_{x_2} V_1 + \partial_{x_1} V_2)^2 + \partial_{x_1} V_1 \left[\frac{4}{3} \mu \partial_{x_1} V_1 - \frac{2}{3} (\rho k + \mu \partial_{x_2} V_2) \right] + \partial_{x_2} V_2 \left[\frac{4}{3} \mu \partial_{x_2} V_2 - \frac{2}{3} (\rho k + \mu \partial_{x_1} V_1) \right], \\ G_b &= -g_i \frac{\mu}{\rho \text{Pr}_t} \partial_{x_i} \rho, \end{aligned}$$

kde

$$C_{3\varepsilon} = \tanh \left| \frac{V_2}{V_1} \right|, \quad Y_m = 2\rho \varepsilon M_t^2, \quad M_t = \sqrt{\frac{k}{a^2}}, \quad a = \sqrt{\gamma RT}.$$

7.5.3 Modelování chemických reakcí

7.5.3.1 Rovnice bilance chemických složek

Reakce probíhají mezi chemickými sloučeninami plynu a mezi plynnými složkami a složkami paliva. Jednotlivé chemické složky splňují bilanční rovnice, na jejichž pravé straně vystupují zdrojové členy udávající rychlost přeměny příslušné složky.

- Pro pevný uhlík, těkavé složky paliva a biomasu jsou to rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{char}} + \partial_{x_i} (\rho_{\text{char}} V_i) = \partial_{x_i} \left(\frac{\mu_T}{Sc_t} \partial_{x_i} \rho_{\text{char}} \right) + R_{\text{char}}, \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{vol}} + \partial_{x_i} (\rho_{\text{vol}} V_i) = \partial_{x_i} \left(\frac{\mu_T}{Sc_t} \partial_{x_i} \rho_{\text{vol}} \right) + R_{\text{vol}}, \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{bms}} + \partial_{x_i} (\rho_{\text{bms}} V_i) = \partial_{x_i} \left(\frac{\mu_T}{Sc_t} \partial_{x_i} \rho_{\text{bms}} \right) + \underbrace{R_{\text{bms}}}_{\text{vyhořívání paliva}}. \quad (7.9)$$

- Pro složky plynu jsou to rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho Y_*) + \partial_{x_i} (\rho Y_* V_i) = \partial_{x_i} \left(-\frac{\mu_T}{Sc_t} \partial_{x_i} Y_* \right) + \omega_*, \quad (7.10)$$

kde $*$ \in { O₂, N₂, NO, HCN, NH₃, H₂O, CO₂}. Jako reprezentant oxidů dusíku (NO_x) je v tomto modelu zastoupen oxid dusnatý, tj. NO.

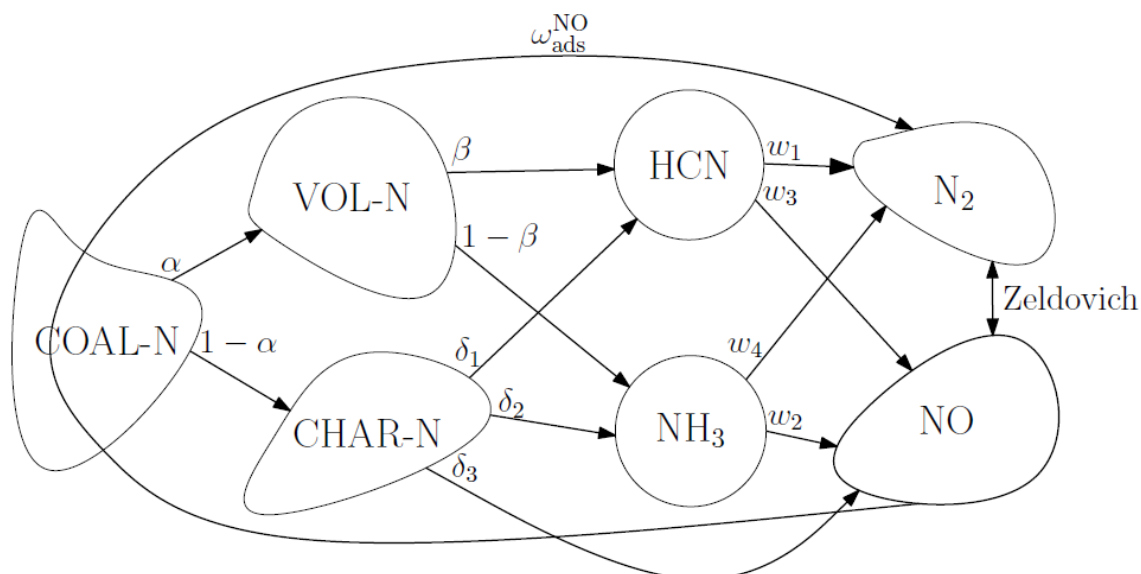
7.5.3.2 Zdrojové členy a chemie oxidů dusíku

Zdrojové členy na pravé straně rovnic (7.7)–(7.10) mají tvar

$$\begin{aligned} \omega_{\text{O}_2} &= \rho_{\text{O}_2} V_{\text{O}_2}^{\circ} (R_{\text{coal}}^{\text{char}} + R_{\text{coal}}^{\text{vol}} + R_{\text{bms}}^{\text{char}} + R_{\text{bms}}^{\text{vol}}) + (-w_1 - w_3) \cdot \frac{M_{\text{O}_2} p}{RT} \\ \omega_{\text{N}_2} &= (w_2 + w_4) \cdot \frac{M_{\text{N}_2} p}{RT} + \omega_{\text{ads}}^{\text{NO}} \cdot \frac{M_{\text{N}_2}}{M_{\text{NO}}} \\ \omega_{\text{NO}} &= M_{\text{NO}} \cdot w_0 + (w_1 - w_2 + w_3 - w_4) \cdot \frac{M_{\text{NO}} p}{RT} - \omega_{\text{ads}}^{\text{NO}} \\ &+ \alpha \cdot \delta_3 \cdot \left(Y_{\text{coal}}^{\text{N}} (-R_{\text{coal}}^{\text{char}} - R_{\text{coal}}^{\text{vol}}) + Y_{\text{bms}}^{\text{N}} (R_{\text{bms}}^{\text{char}} - R_{\text{bms}}^{\text{vol}}) \right) \cdot \frac{M_{\text{NO}}}{M_{\text{N}}} \\ \omega_{\text{HCN}} &= (-w_1 - w_2) \cdot \frac{M_{\text{HCN}} p}{RT} - ((1 - \alpha) \beta (Y_{\text{coal}}^{\text{N}} R_{\text{coal}}^{\text{vol}} + Y_{\text{bms}}^{\text{N}} R_{\text{bms}}^{\text{vol}}) - \delta_1 \alpha (Y_{\text{coal}}^{\text{N}} R_{\text{coal}}^{\text{char}} + Y_{\text{bms}}^{\text{N}} R_{\text{bms}}^{\text{char}})) \cdot \frac{M_{\text{HCN}}}{M_{\text{N}}} \\ \omega_{\text{NH}_3} &= (-w_3 - w_4) \cdot \frac{M_{\text{NH}_3} p}{RT} - ((1 - \alpha) (1 - \beta) (Y_{\text{coal}}^{\text{N}} R_{\text{coal}}^{\text{vol}} + Y_{\text{bms}}^{\text{N}} R_{\text{bms}}^{\text{vol}}) - \delta_2 \alpha (Y_{\text{coal}}^{\text{N}} R_{\text{coal}}^{\text{char}} + Y_{\text{bms}}^{\text{N}} R_{\text{bms}}^{\text{char}})) \cdot \frac{M_{\text{NH}_3}}{M_{\text{N}}} \\ \omega_{\text{H}_2\text{O}} &= \rho_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \left(11.1 \frac{\text{H}}{100} + 1.24 \frac{\text{W}}{100} \right) (-R_{\text{coal}}^{\text{vol}} - R_{\text{bms}}^{\text{vol}}) \\ \omega_{\text{CO}_2} &= \rho_{\text{CO}_2} \cdot \left(-1.866 \cdot (R_{\text{coal}}^{\text{char}} + R_{\text{bms}}^{\text{char}}) - \frac{V_{\text{CO}_2} - 1.866 \text{FC}}{\text{VM}} (R_{\text{coal}}^{\text{vol}} + R_{\text{bms}}^{\text{vol}}) \right) \end{aligned}$$

kde $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ jsou rychlosti přeměny dusíku vázaném v pevném palivu na HCN, NH₃, and NO, a koeficienty w_k vyjadřují rychlost reakcí dle arrheniovské reakční kinetiky v zjednodušeném mechanismu reakcí dusíku, který je schematicky znázorněn na obrázku 7.6. Příslušné detaily následují níže:

- Termální NO, tj. oxid dusnatý vznikající přímo oxidací dusíkových radikálů ve spalínách za vysokých teplot je popsán Zeldovichovým [?] a Bowmanovým [?] mechanismem a příslušná rychlost

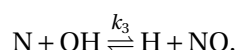
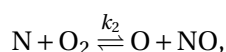
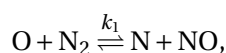


Obrázek 7.6: Mechanismus a kinetika reakcí dusíku (pouze pro uhlí).

reakce je aproximována pomocí

$$w_0 = 2k_1^+ \cdot X_O \cdot X_{N_2} \cdot \frac{1 - \frac{k_1^- k_2^- [NO]^2}{k_1^+ [N_2] k_2^+ [O_2]}}{1 + \frac{k_1^- [NO]}{k_2^+ [O_2] + k_3^+ [OH]}}$$

kde $k_1^\pm, k_2^\pm, k_3^\pm$ popisují rychlosti následujících dopředných (+) a zpětných (-) reakcí:



Jejich aproximace je (arrheniovská kinetika předpokládá exponenciální závislost rychlosti reakcí na teplotě)

$$\begin{aligned} k_1^+ &= 1.8 \times 10^8 \cdot \exp\left(\frac{-38370}{T}\right), & k_1^- &= 3.8 \times 10^7 \cdot \exp\left(\frac{-425}{T}\right), \\ k_2^+ &= 1.8 \times 10^4 \cdot \exp\left(\frac{-4680}{T}\right), & k_2^- &= 3.8 \times 10^3 \cdot T \cdot \exp\left(\frac{-20820}{T}\right), \\ k_3^+ &= 7.1 \times 10^7 \cdot \exp\left(\frac{-450}{T}\right), & k_3^- &= 1.7 \times 10^8 \cdot \exp\left(\frac{-24560}{T}\right). \end{aligned}$$

- Vznik NO oxidací HCN probíhá rychlostí

$$w_1 = 1.0 \times 10^{10} X_{HCN} X_{O_2}^a \exp(-33732.5/T). \quad (7.11)$$

- Vznik NO oxidací NH₃ probíhá rychlostí

$$w_2 = 4.0 \times 10^6 X_{NH_3} X_{O_2}^a \exp(-16111.0/T). \quad (7.12)$$

- Spotřebování NO redukcí na HCN probíhá rychlostí

$$w_3 = -3.0 \times 10^{12} X_{\text{HCN}} X_{\text{NO}} \exp(-30208.2/T). \quad (7.13)$$

- Spotřebování NO redukcí na NH₃ probíhá rychlostí

$$w_4 = -1.8 \times 10^8 X_{\text{NH}_3} X_{\text{NO}} \exp(-13593.7/T). \quad (7.14)$$

- Heterogenní redukce NO na povrchu částic uhlí probíhá rychlostí

$$\omega_{\text{ads}}^{\text{NO}} = 2.27 \times 10^{-3} c_s A_{\text{BET}} M_{\text{NO}} p_{\text{NO}} \exp(-17168.33/T). \quad (7.15)$$

Ve vztazích (7.11)–(7.15) symbol X reprezentuje molární zlomek a a je řád reakce kyslíku.

Poznámka. Zde je důležité si uvědomit, že uvedené divoké hodnoty konstant jsou **vázány na konkrétní volbu fyzikálních jednotek**. Absolutní teplota T je uvedena v kelvinech (K) a konstanty v exponenciálách mají rozměr K^{-1} . Při přechodu k jiným jednotkám by tyto stejné konstanty měly jinou numerickou hodnotu!

7.5.4 Vyhohřívání paliva

Členy $R_{\text{char}}, R_{\text{vol}}, R_{\text{bms}}$ v rovnici energie (7.6) určují rychlost vyhořívání tří složek paliva (vázaný uhlík v uhlí, těkavé látky z uhlí, biomasa). U uhlí bývá dobře známa chemická i fyzikální analýza, a proto je možné uvažovat pevné částice a těkavé složky samostatně a uplatnit na ně známou teorii. Není však možné sledovat postupné uvolňování těkavých složek z částic, a proto se vzhledem k nepatrné velikosti částic předpokládá, že částice se pohybují spolu s plynem, a že úplná devolatilizace už proběhla před vstupem do spalovací komory. To alespoň zčásti skutečně platí, neboť primární vzduch je předeřhřátý.

Jednoduchý model [BSM⁺13a] pro rychlost vyhořívání pevných částic i těkavých látek v závislosti na jejich aktuální koncentraci, resp. v přepočtu na hmotnost jedné částice má tvar

$$\frac{dm_{\text{vol}}}{dt} = -A_{\text{vol}} m_{\text{vol}}^{\alpha_{\text{vol}}} Y_{\text{O}_2}^{\beta_{\text{vol}}} e^{-E_{\text{vol}}/(RT)}, \quad (7.16)$$

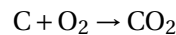
$$\frac{dm_{\text{char}}}{dt} = -A_{\text{char}} m_{\text{char}}^{\alpha_{\text{char}}} Y_{\text{O}_2}^{\beta_{\text{char}}} e^{-E_{\text{char}}/(RT)}. \quad (7.17)$$

Tzv. vyhořívací křivky pro m_{char} v závislosti na teplotě jsou zobrazeny na obrázku 7.7.

Výhřevnost jednotlivých složek je pak dána rovnicí

$$h_{\text{char}} + h_{\text{vol}} = \text{LHV}_{\text{coal}},$$

přičemž h_{char} je dána energií reakce

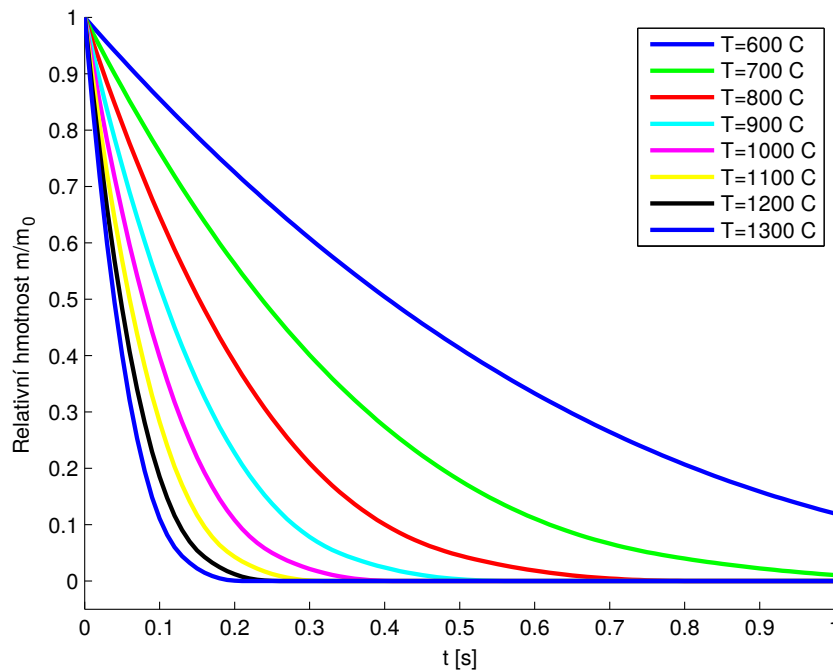


a LHV_{coal} je naměřeno pro konkrétní typ uhlí.

V případě biomasy využíváme experimentální data (jako např. [?, ?]) pro sférické částice borového dřeva o počátečním poloměru 1 mm o úbytku hmotnosti částice biomasy v závislosti na čase. Opět potřebujeme získat závislost ve tvaru

$$\frac{dm}{dt} = f(m). \quad (7.18)$$

Postupujeme dle následující procedury:



Obrázek 7.7: Vyhořivací křivky pevně vázaného uhlíku v částicích uhlí a jejich závislost na teplotě.

1. Vyhořivací křivky jsou obvykle prezentovány jako relativní úbytek hmotnosti

$$m_{\text{rel}}(t) = \frac{m(t)}{m(0)} \quad (7.19)$$

pro danou počáteční hmotnost částice $m(0)$. Naměřenou závislost proložíme hladkou polynomiální křivkou.

2. Numericky aproximujeme derivaci

$$g(t) := \frac{dm_{\text{rel}}}{dt}. \quad (7.20)$$

3. Z podstaty popisovaného jevu je funkce $m_{\text{rel}} = m_{\text{rel}}(t)$ ostře klesající, a je proto možné najít (resp. numericky aproximovat) inverzní funkci $t = t(m_{\text{rel}})$. Dosazením do (7.20) dostáváme

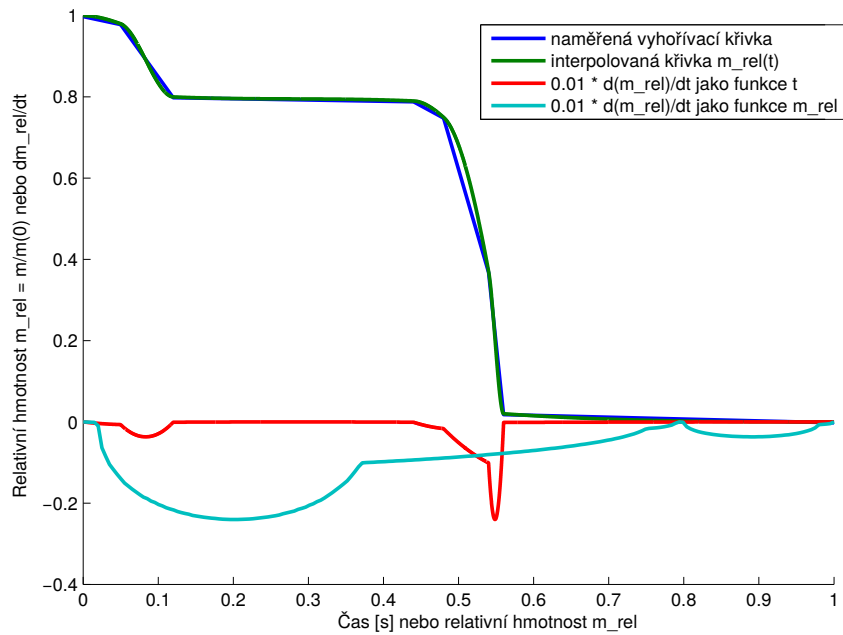
$$\frac{dm_{\text{rel}}}{dt} = g(t(m_{\text{rel}})) =: h(m_{\text{rel}}).$$

4. Nakonec se vrátíme k absolutním hmotnostem. Dle (7.19)

$$\frac{dm}{dt} = m(0) \frac{dm_{\text{rel}}}{dt} = m(0) h\left(\frac{m}{m(0)}\right) =: f(m). \quad (7.21)$$

Hodnoty f pro $m \in [0, m(0)]$ mohou být vzorkovány do tabulky, v níž lze během simulace vyhledávat. Celý proces je znázorněn na obrázku 7.8. Vyhořivací křivka zde má dva „schody“, které odpovídají rychlému uvolnění a vyhoření těkavých složek a pomalejšímu hoření pevného uhlíku. Není třeba tedy modelovat vyhořívání obou součástí paliva samostatně.

Dále je třeba dořešit:



Obrázek 7.8: Konstrukce funkce f dané vztahem (7.21) z naměřené vyhořivací křivky.

1. Co se stane, pokud $m > m(0)$. Nejjednodušší je položit $m = m(0)$.
2. Musí být modelována závislost na teplotě a koncentraci kyslíku. Můžeme použít například model

$$\frac{dm}{dt} = f(m) F(T, Y_{O_2}), \quad (7.22)$$

kde

$$F(T, Y_{O_2}) = \frac{Y_{O_2}^\beta e^{-E/(RT)}}{Y_{O_2,0}^\beta e^{-E/(RT_0)}}.$$

Konstanty β a E lze nafitovat ze znalosti vyhořivacích křivek při různých teplotách, resp. koncentracích. Výsledný tvar vyhořivací křivky v závislosti na teplotě může být jako na obrázku 7.9

Protože devolatilizace biomasy se v rámci jejího spalování nemodeluje, máme pouze

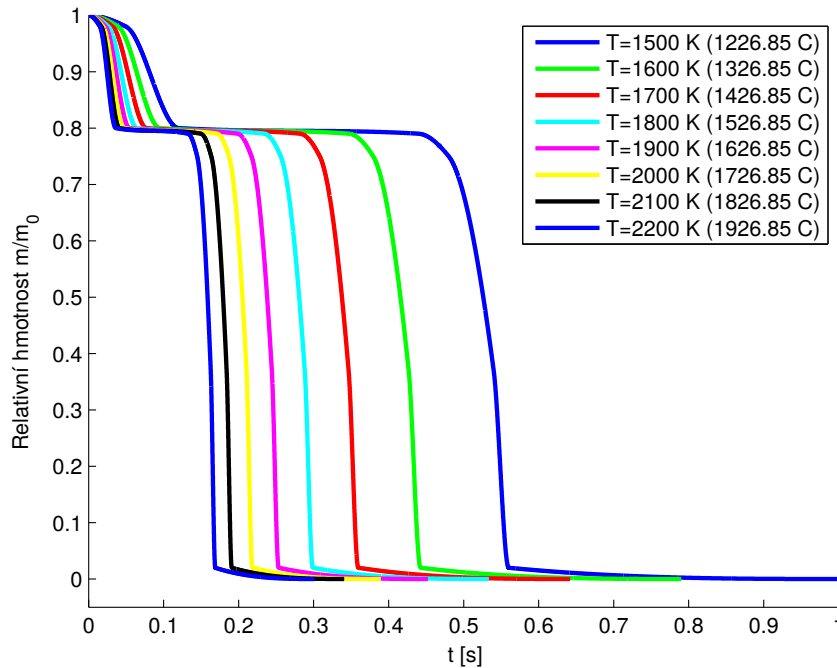
$$h_{bms} = LHV_{bms}.$$

7.5.5 Zbývající konstanty a výrazy

Tato část shrnuje definice zbývajících konstant a výrazů:

$$R_{coal}^{char} = R_{char}, \quad R_{coal}^{vol} = R_{vol}, \quad R_{bms}^{char} = (1 - vol_{bms}) R_{bms}, \quad R_{bms}^{vol} = vol_{bms} R_{bms},$$

$$\begin{aligned} a_g &= \varepsilon_g(Y_{H_2O}, Y_{CO_2}, T_{wall}) \\ &= 1 - \exp(-\sqrt{0.1(p_{H_2O} + p_{CO_2})L(8 + 160p_{H_2O})(1 - 3.8 \cdot 10^{-4}T_{wall})}) \end{aligned}$$



Obrázek 7.9: Závislost tvaru vyhořivacích křivek biomasy na teplotě.

$$\begin{aligned}
 p_{\text{H}_2\text{O}} &= p \cdot [\text{H}_2\text{O}] \cdot 10^{-6}, & p_{\text{CO}_2} &= p \cdot [\text{CO}_2] \cdot 10^{-6}, & L &= 3.5 \frac{V_{\text{furnace}}}{S_{\text{furnace}}}, \\
 \text{Sc}_t &= 0.7, & \text{Pr}_t &= 0.85, & \gamma &= 1.4, & \sigma_k &= 1.0, & \sigma_\varepsilon &= 1.3, & \sigma_s &= 1.5, \\
 \mathbf{g} &= (0, -9.81, 0), & C_{1\varepsilon} &= 1.44, & C_{2\varepsilon} &= 1.92, & C_\mu &= 0.09, & \sigma &= 5.67 \cdot 10^{-8}, \\
 A_{\text{BET}} &= 25000, & p_{\text{NO}} &= p \cdot [\text{NO}] \cdot 10^{-6}, & c_s &= c_s(n), & X_{\text{O}_2}^a &= X_{\text{O}_2}^a([\text{O}_2]) \\
 n_r &= 1.7, & \alpha &= 0.5 & \beta &= 0.5 & \delta_1 &= 0.5 & \delta_2 &= \delta_3 = 0.25
 \end{aligned}$$

7.5.6 Okrajové podmínky

Okrajové podmínky jsou definovány následujícím způsobem:

7.5.6.1 Okrajové podmínky na stěnách

- **no-slip** okrajová podmínka

$$V_1 = V_2 = 0,$$

- nulová Neumannova okrajová podmínka pro extrapolaci skalárních veličin

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \rho = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \rho Y_* = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \rho_{\text{char}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \rho_{\text{vol}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} n = 0,$$

- okrajová podmínka pro turbulentní kintetickou energii a její disipaci

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\rho k) = 0,$$

$$\varepsilon = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial \mathbf{n}} \right)^2,$$

- konvektivní přestup tepla do stěn s předpokladem konstantní teploty stěn

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\rho T) = A_{\text{conv}} \cdot (T - T_{\text{wall}}). \quad (7.23)$$

7.5.6.2 Okrajové podmínky na hořácích

Nastavení okrajových podmínek na hořácích je následující:

- hořáky:
 - hmotnostní tok paliva, teplota směsi
 - jeden z údajů:
 - * rychlost primárního vzduchu a koeficient přebytku vzduchu (excess air coefficient)
 - * průtok čerstvého vzduchu,
- okrajové podmínky $k - \varepsilon$ modelu turbulence

$$\rho k = \rho_{\text{in}} \frac{3}{2} (|\mathbf{V}_{\text{in}}| I_{\text{in}})^2, \quad \rho \varepsilon = \rho_{\text{in}} \frac{C_{\mu}^{\frac{3}{4}} k^{\frac{3}{2}}}{0.007 D_h}$$

kde I_{in} představuje intenzitu turbulentní kinetické energie

$$I_{\text{in}} = 0.16 \left(\frac{\rho_{\text{in}} |\mathbf{V}_{\text{in}}| D_h}{\mu} \right)^{-\frac{1}{8}}.$$

- Trysky sekundárního a dohořivacího vzduchu jsou realizovány jako hořáky s nulovým průtokem paliva.

7.5.6.3 Recirkulace spalin

V systému přípravy paliva se tzv. *primární* směs skládá z

- recirkulovaných spalin, které zahřívají rozemleté práškové palivo
- čistého vzduchu, jehož přidáním je teplota směsi snížena pod bod vzplanutí paliva

Je známo, že výsledná směs obsahuje asi 10% kyslíku. Tohoto kritéria je použito k výpočtu poměru čistého vzduchu a recirkulovaného plynu na hořácích. Chemické složení recirkulovaného plynu neodpovídá aktuálním hodnotám na výstupu ze spalovací komory, protože by to znamenalo modelovat i recirkulační potrubí, a nebo realizovat nějaký nelokální přenos informace. Místo toho je toto složení předepsáno pevně na základě předchozích simulací.

7.5.6.4 Okrajové podmínky na výstupu

Odvod spalin je tzv. nucený, tj. na výstupu je ventilátor, který spaliny pohání. Je to proto, že ve spalovací komoře musí být o něco nižší než atmosférický tlak, jinak by docházelo k úniku spalin všemi netěsnostmi v systému. Okrajová podmínka je toto zohledňuje předepsáním pevného hodnoty tlaku, která je dána výkonem ventilátoru.

7.5.7 Počáteční podmínky

Počáteční podmínky předpokládají, že ve spalovací komoře je čistý vzduch předehřátý na teplotu dostatečnou ke vznícení paliva. Konkrétní nastavení je následující:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_{\text{ini}} = 360.77819 \cdot T_{\text{ini}}^{-1.00336}, \\ \rho Y_* &= \rho_{\text{ini}} Y_{*,\text{ini}}, \\ \rho_{\text{char}} &= 0, \quad \rho_{\text{vol}} = 0, \quad n = 0, \\ \rho V_1 &= \rho_{\text{ini}} V_{1,\text{ini}}, \\ \rho V_2 &= \rho_{\text{ini}} V_{2,\text{ini}}, \\ \rho T &= \rho_{\text{ini}} T_{\text{ini}}, \\ \rho k &= \rho_{\text{ini}} \cdot 1.5 \left(I_{\text{ini}} \sqrt{V_{1,\text{ini}}^2 + V_{2,\text{ini}}^2} \right)^2, \\ \rho \varepsilon &= \rho_{\text{ini}} C_{\mu}^{0.75} \frac{k_{\text{ini}}^{1.5}}{0.07 D_h}.\end{aligned}$$

Poznámka. Při skutečném provozu je každá odstávka drahá a je snaha provozovat zařízení bez přerušení co nejdéle. Po odstávce zajišťují předehřátí spalovací komory plynové hořáky. Po samotném startu se však teplota ve spalovací komoře ustaluje ještě řadu hodin. Protože my modelujeme jen samotnou spalovací komoru a teplotu stěn předepisujeme konstantní (a odpovídající ustálenému stavu), doba do dosažení ustáleného stavu trvá jen několik sekund fyzikálního času.

7.5.8 Modelování přestupu tepla

Bilanci produkce a spotřeby tepla je nutné modelovat zvláště pečlivě, neboť na teplotě zásadně závisí rychlosti všech chemických reakcí, a tedy i složení spalin, produkce škodlivin, efektivita přestupu tepla atd. V modelu jsou zahrnuty následující přístupy:

- Vedení tepla je dáno standardně Fourierovým zákonem (3.48), tj. $q_c = -\nabla \cdot (\lambda \nabla T)$.
- *Konvektivní* přestup tepla na stěnách je vyčíslen algoritmicky. Koeficient A_{conv} (7.23) je funkcí
 - teploty spalin T ,
 - Reynoldsova čísla $Re = L \frac{\|\mathbf{V}\| \rho}{\mu}$, kde L je charakteristický rozměr (šířka stěny),
 - tepelné vodivosti plynu λ ,
 - měrné tepelné kapacity plynu c_p ,
 - tepelné vodivosti oceli (materiálu stěny) $\lambda_{\text{wall}} = 44 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ při teplotě 300°C ,
 - měrné tepelné kapacity oceli $c_{p,\text{wall}} = 460 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- *Radiační* přestup tepla $q_{rg} + q_{rw}$ v (7.6) se skládá ze dvou částí. Radiace typu *plyn–plyn* je dána Rosselandovým modelem

$$q_{rg} = -\nabla \cdot (16\sigma \Gamma n_r^2 T^3 \nabla T)$$

kde $n_r = 1.7$ je index lomu spalin (opticky husté prostředí) a dále

$$\Gamma = \frac{1}{3(1.5 + \varepsilon(T))}.$$

Radiace typu *plyn–stěna* je dána

$$q_{rw} = \xi \sigma \cdot (\varepsilon(T) T^4 - \varepsilon(T_{\text{wall}}) T_{\text{wall}}^4).$$

kde $\xi = (1 + 0.9) \cdot 0.5$ je korekční parametru a emisivita (tj. i absorptivita) ε spalin se vyhodnotí na základě emisivity jeho složek H_2O and CO_2 , s možným rozšířením o emisivitu *popela a plamene*. ε dále závisí na střední délce paprsku

$$L = 3.5 \frac{V}{\xi A}$$

kde V je objem spalovací komory a A je celková plocha stěn. Protože stěny jsou zvlněné kvůli várnícím, které za nimi probíhají, je vzorec doplněn o faktor zvlnění ζ , který reprezentuje zvětšení reálné plochy stěn.

- Důležité vlastnosti materiálů (tepelná kapacita, tepelná vodivost, viskozita atd.) jsou závislé na teplotě. Obvykle jsou k dispozici korelace vyjadřující závislost těchto veličin na teplotě pro jednotlivé chemické složky spalin. Z nich je pak vypočítána teoretická hodnota pro směs dle poměrného zastoupení jednotlivých komponent.

7.6 Vícefázové proudění, fluidizace

V této kapitole formulujeme eulerovský model pro dvoufázové proudění vzduchu a sypkého pevného materiálu. V komoře, v níž je zespona přes tzv. *distributor* vháněn dostatečnou rychlostí vzduch, dojde ke vznosu pevných částic a výsledná směs se chová jako tekutina, která se nazývá *fluidní lože*. Hmotnostní podíl pevných částic na jednotku objemu se uvažuje jako spojitá veličina, a proto se pro jejich pohyb dají formulovat zákony zachování analogické Navierovým-Stokesovým rovnicím.

Fluidizace mj. se používá pro pneumatický transport sypkých materiálů nebo ve fluidních kotlích [Bas06]. V závislosti na průtoku vzduchu v nich lze rozlišit

- bublající fluidní lože, kdy pevné částice se vznosou jen do určité výšky ve spalovací komoře a opět padají zpět,
- cirkulující fluidní lože, kdy je vznos dostatečný k tomu, aby částice opustily spalovací komoru a přes separátor (cyklon) se vracejí zpět.

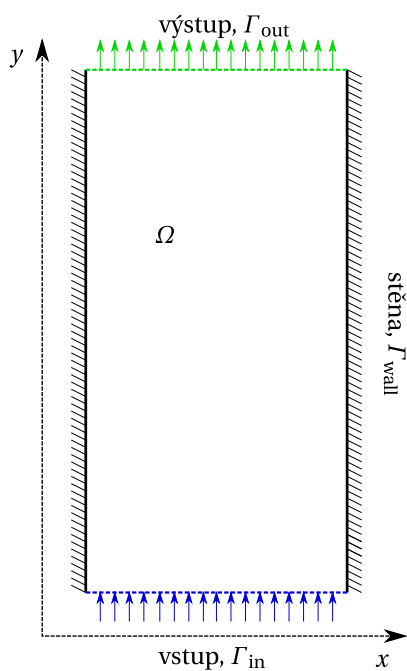
Pneumatický transport nastává při dalším zvyšování průtoku plynu. Fluidizační médium nemusí být obecně jen plyn, ale i kapalina.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kde $d \in \{2, 3\}$ je oblast reprezentující *fluidizační komoru* a $\mathcal{J} = (0, t_{\max})$ je časový interval. Pro obě fáze (dolní index g označuje plyn a s označuje pevnou fázi) uvažujeme Navierovy-Stokesovy rovnice ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho_g \varepsilon_g \\ \rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g \\ \rho_s \varepsilon_s \\ \rho_s \varepsilon_s \mathbf{V}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla \cdot (\rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g) \\ \nabla \cdot (\rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g \otimes \mathbf{V}_g) \\ \nabla \cdot (\rho_s \varepsilon_s \mathbf{V}_s) \\ \nabla \cdot (\rho_s \varepsilon_s \mathbf{V}_s \otimes \mathbf{V}_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon_g \nabla P_g + \nabla \cdot (\varepsilon_g \mathbb{T}_g) \\ 0 \\ -G(\varepsilon_g) \nabla \varepsilon_s - \varepsilon_s \nabla P_g + \nabla \cdot (\varepsilon_s \mathbb{T}_s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_g \mathbf{g} + \beta_{gs} (\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_g) \\ 0 \\ (\rho_s - \rho_g) \mathbf{g} + \beta_{gs} (\mathbf{V}_g - \mathbf{V}_s) \end{pmatrix}, \quad (7.24)$$

v $\mathcal{J} \times \Omega$, kde jednotlivé neznámé veličiny jsou shrnuty v tabulce 7.1. Člen $G(\varepsilon_g) \nabla \varepsilon_s$ hraje roli analogickou teoretickém gradientu tlaku pevné fáze ∇P_s a zamezuje přílišnému shluknutí pevných částic. Každý sypký materiál totiž i v klidu obsahuje značný podíl volného prostoru mezi částicemi (*voidage*, *void fraction*) $\varepsilon_{g,\min}$ a k němu příslušný maximální objemový zlomek pevné fáze (*packing limit*)

$$\varepsilon_{s,\max} = 1 - \varepsilon_{g,\min}.$$



Obrázek 7.10: Simple example of the problem setup

Veličina	Jednotka	Obor hodnot	Popis
P_g	Pa	\mathbb{R}	tlak plynné fáze
T	K	\mathbb{R}^+	teplota (konstantní)
ρ_g	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	\mathbb{R}^+	hustota plynné fáze
\mathbf{V}_g	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	\mathbb{R}^d	rychlost plynné fáze
ε_g	-	$[0, 1]$	objemový zlomek plynné fáze
ρ_s	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	\mathbb{R}^+	hustota pevné fáze (konstantní)
\mathbf{V}_s	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	\mathbb{R}^d	rychlost pevné fáze
ε_s	-	$[0, 1]$	objemový zlomek pevné fáze

Tabulka 7.1: Seznam veličin popisujících dvoufázové proudění při fluidizaci.

Funkce G se nazývá *modul stlačitelnosti* a má dle [Gid94] empiricky určený tvar

$$G(\varepsilon_g) = 10^{-8.76\varepsilon_g + 5.43}. \quad (7.25)$$

Koeficient β_{gs} reprezentuje přenos hybnosti mezi oběma fázemi, tzv. *drag*. Tvar β_{gs} použitý v (7.24) je opět dle [Gid94]

$$\beta_{gs} = \begin{cases} 150 \frac{\varepsilon_s^2 \mu_g}{(\varepsilon_g d_s \Phi_s)^2} + 1.75 \frac{|V_g - V_s| \rho_g \varepsilon_s}{\varepsilon_g d_s \Phi_s} & \varepsilon_s > 0.2, \\ \frac{4}{3} C_d \frac{|V_g - V_s| \rho_g \varepsilon_s}{d_s \Phi_s} & \varepsilon_s \leq 0.2, \end{cases} \quad (7.26)$$

$$C_d = \begin{cases} \frac{24}{Re_s} (1 + 0.15 Re_s^{0.687}) & Re_s \leq 1000, \\ 0.44 & Re_s > 1000, \end{cases} \quad (7.27)$$

$$Re_s = \frac{|V_g - V_s| d_s \rho_g \varepsilon_g}{\mu_g}. \quad (7.28)$$

Symbol \mathbf{g} označuje gravitační zrychlení, d_s je průměr částic a Φ_s jejich sféricita.

Vztah

$$\varepsilon_g + \varepsilon_s = 1, \quad (7.29)$$

a stavová rovnice ideálního plynu

$$P = \rho R_{\text{spec}} T. \quad (6.5)$$

uzavírají systém. Teplota T je uvažována konstantní a stejná pro obě fáze.

7.6.1 Počáteční podmínky

Počáteční podmínky jsou dány jako

$$\begin{aligned} P_g(0, \mathbf{x}) &= P_{g,\text{ini}}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{V}_g(0, \mathbf{x}) &= \mathbf{V}_{g,\text{ini}}(\mathbf{x}), \\ \varepsilon_s(0, \mathbf{x}) &= \varepsilon_{s,\text{ini}}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{V}_s(0, \mathbf{x}) &= \mathbf{V}_{s,\text{ini}}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (7.30)$$

z čehož se dopočítají ostatní veličiny jako

$$\begin{aligned} \rho_g(0, \mathbf{x}) &= \frac{P_{g,\text{ini}}(\mathbf{x})}{R_{\text{spec}} T}, \\ \varepsilon_g(0, \mathbf{x}) &= 1 - \varepsilon_{s,\text{ini}}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (7.31)$$

7.6.2 Okrajové podmínky

Uvažujeme tři typy okrajových podmínek na hranici rozdělené na vstup Γ_{in} , výstup Γ_{out} a stěnu Γ_{wall} , kde $\partial\Omega = \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_{\text{out}} \cup \Gamma_{\text{wall}}$.

- Na stěně (pro $\mathbf{x} \in \Gamma_{\text{wall}}$) uvažujeme no-slip okrajové podmínky pro obě rychlosti, tj.

$$\mathbf{V}_s(t, \mathbf{x}) = \mathbf{V}_g(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \forall t \in \mathcal{I}, \quad (7.32)$$

a nulové Neumannovy okrajové podmínky pro ρ_g a ε_s , tj.

$$\frac{\partial \rho_g(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \varepsilon_s(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \forall t \in \mathcal{I}, \quad (7.33)$$

kde \mathbf{n} je vektor vnější normály k $\partial\Omega$.

- Na vstupu (pro $\mathbf{x} \in \Gamma_{\text{in}}$) je předepsána rychlost obou fází a objemový zlomek pevné fáze

$$\mathbf{V}_g(t, \mathbf{x}) = \mathbf{V}_{g,\text{in}}(t, \mathbf{x}), \quad (7.34)$$

$$\mathbf{V}_s(t, \mathbf{x}) = \mathbf{V}_{s,\text{in}}(t, \mathbf{x}), \quad (7.35)$$

$$\varepsilon_s(t, \mathbf{x}) = \varepsilon_{s,\text{in}}(t, \mathbf{x}). \quad (7.36)$$

Dále se uvažuje nulová Neumannova podmínka pro hustotu plynu

$$\frac{\partial \rho_g(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (7.37)$$

- Na výstupu (pro $\mathbf{x} \in \Gamma_{\text{out}}$) je předepsán tlak plynu

$$P_g(t, \mathbf{x}) = P_{g,\text{out}}(t, \mathbf{x}). \quad (7.38)$$

Pro ostatní veličiny platí nulová Neumannova podmínka, tj.

$$\frac{\partial \mathbf{V}_g(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \mathbf{V}_s(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0}, \quad (7.39)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_s(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (7.40)$$

7.7 Proudění s volnou hranicí, fázové přechody

- proudění s volnou hranicí
 - *volume of fluid* metoda
- fázové přechody, Stefanova úloha
- phase-field formulace
- fázové přechody s prouděním
- *fluid-structure interaction*

Literatura

- [AB06] C. D. Aliprantis and K. C. Border, *Infinite dimensional analysis: A hitchhiker's guide*, 3rd ed., Springer, 2006.
- [Ari62] R. Aris, *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*, Dover Publications, 1962.
- [Bas06] P. Basu, *Combustion and gasification in fluidized beds*, CRC Press, 2006.
- [BEH08] J. Blank, P. Exner, and M. Havlíček, *Hilbert space operators in quantum physics*, 2nd ed., Springer, 2008.
- [Bla15] J. Blazek, *Computational fluid dynamics: Principles and applications*, 3rd ed., Elsevier, 2015.
- [Bre10] H. Brezis, *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2010.
- [BSM⁺13a] M. Beneš, P. Strachota, J. Mach, H. D. Hoang, and V. Havlena, *Coal and biomass particle burnout models for use in pulverized coal and fluidized bed combustion simulations*, Tech. report, Czech Technical University in Prague, 2013.
- [BSM⁺13b] M. Beneš, P. Strachota, J. Mach, H. D. Hoang, V. Havlena, T. Oberhuber, R. Fučík, P. Bauer, V. Žabka, V. Klement, and R. Máca, *Simulation of biomass co-firing and pollutant development in an industrial pulverized coal boiler with air staging control*, Tech. report, Czech Technical University in Prague, 2013.
- [Bur15] G. Buresti, *A note on stokes' hypothesis*, Acta Mech. **226** (2015), 3555–3559.
- [CB15] Y. A. Cengel and M. A. Boles, *Thermodynamics: An engineering approach*, 8th ed., McGraw-Hill Education, 2015.
- [Con90] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1990.
- [Eva98] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 18, American Mathematical Society, 1998.
- [FN17] E. Feireisl and A. Novotný, *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids*, Birkhäuser (Springer International Publishing), 2017.

- [Gad95] M. Gad-el-Hak, *Questions in fluid mechanics: Stokes' hypothesis for a Newtonian, isotropic fluid*, J. Fluids Eng. **117** (1995), no. 1, 3–5.
- [Gid94] D. Gidaspow, *Multiphase flow and fluidization: Continuum and kinetic theory description*, Academic Press, 1994.
- [GS87] P. M. Gresho and R. L. Sani, *On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations*, Int. J. Numer. Methods Fluids **7** (1987), 1111–1145.
- [Gur81] M. E. Gurtin, *An introduction to continuum mechanics*, Academic Press, 1981.
- [Haz13] A. Hazel, *Continuum mechanics (lecture notes)*, Manchester University, 2013.
- [Kin23] J. Kinnunen, *Sobolev spaces*, Aalto University, 2023.
- [KJF77] A. Kufner, O. John, and S. Fučík, *Function spaces*, Academia Prague, 1977.
- [Mar11] Z. Martinec, *Continuum mechanics*, MFF UK, 2011.
- [Maz85] V. Maz'ja, *Sobolev spaces*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1985.
- [MMD16] F. Moukalled, L. Mangani, and M. Darwish, *The finite volume method in computational fluid dynamics: An advanced introduction with openfoam and matlab*, Springer, 2016.
- [Neu06a] J. Neustupa, *Matematické metody v dynamice kontinua*, Přednášky FS ČVUT, 2006.
- [Neu06b] J. Neustupa, *Navierovy–Stokesovy rovnice: regularita nebo blow-up?*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **51** (2006), 187–197.
- [NS04] A. Novotný and I. Straškraba, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, no. 27, Oxford University Press, 2004.
- [Pok20a] M. Pokorný, *Navier–stokesovy rovnice*, Kurz MFF UK, únor 2020.
- [Pok20b] M. Pokorný, *Suitable weak solutions to the Navier–Stokes equations and some applications*, Tech. report, MFF UK, 2020.
- [RG14] A. I. Ruban and J. S. B. Gajjar, *Fluid dynamics part 1: Classical fluid dynamics*, Oxford University Press, 2014.
- [Rud19] M. S. Ruderman, *Fluid dynamics and linear elasticity: A first course in continuum mechanics*, Springer, 2019.
- [Sch66] L. Schwartz, *Mathematics for the physical sciences*, Addison-Wesley, 1966.
- [Tru92] C. A. Truesdell, *Cauchy and the modern mechanics of continua*, Revue d'histoire des sciences **45** (1992), 5–24.