

# Procedurální modelování

Pavel Strachota

FJFI ČVUT v Praze

19. března 2015

# Obsah

- 1 Fraktální geometrie
- 2 Modelování rostlin a ekosystémů
- 3 Systémy částic

# Úvod - způsoby vytváření 3D modelů

- ruční zadání geom. popisu
- poloautomaticky - pomocí 3D modelovacího softwaru (častý hierarchický návrh: operace s jednoduššími objekty - extrude, reg. booleovské operace,...)
- automaticky - transformace dat do geometrické podoby pomocí jednoduchých pravidel (např. zobr. molekul chemických sloučenin)
- naskenování pomocí 3D skeneru, resp. rekonstrukce z více fotografií, *shape from shading*
- automaticky pomocí *procedurálního modelování*

# Procedurální modelování

- automatizace modelování velmi složitých objektů
- generování objektu z jeho jednoduchých komponent podle daných pravidel, závislých na parametrech
- model stromu
  - komponenty: list, větev
  - pravidla: geometrie rozvětvení
  - parametry: hustota listů, max. tloušťka větve s listy apod.
- přidáním dalších pravidel pro umístění stromů, resp. různých typů stromů lze modelovat celý les apod.

# Obsah

- 1 Fraktální geometrie
- 2 Modelování rostlin a ekosystémů
- 3 Systémy částic

## Fraktály a soběpodobnost 1/2

- fraktál obecně - nekonečně složitá, tzv. *soběpodobná* množina (resp. útvar)
- množina  $A$  je *přesně soběpodobná*, jestliže je sjednocením konečného počtu transformovaných kopií sebe sama:

$$A = \bigcup_{n=1}^N \varphi_n(A),$$

kde  $\varphi_n$  jsou posunutí a rotace kombinované se změnou měřítka s koef.  $S_n \in [0, 1]$ . Navíc

$$0 < \sum_{n=1}^N S_n < 1$$

(tzv. průměrná kontraktivita)

## Fraktály a soběpodobnost 2/2

- *statistická soběpodobnost* -  $A$  a  $\varphi_n(A)$  mají stejné statistické charakteristiky (jsou statisticky nerozlišitelné), avšak  $\varphi_n$  nejsou jen translace a rotace
  - Př. kámen a hora
- soběpodobnost  $\approx$  invariance vůči změně měřítka
- fraktál = soběpodobná, *vysoce členitá* množina (sama soběpodobnost nestačí - i čtverec je soběpodobný)
- míru členitosti definuje *fraktální dimenze*

## Fraktální dimenze

- uvažujme jen prostor  $\mathbb{R}^3$
- mějme objekt  $A$ , jehož topologická dimenze je  $d$  ( $d = 1$  pro křivku,  $2$  pro plochu,  $3$  pro těleso)
- jeho míra  $\mu_d(A)$ : (délka pro  $d = 1$ , plocha pro  $d = 2$ , objem pro  $d = 3$  - vše počítáme v  $\mathbb{R}^3$ )
- pro „jednoduché“ objekty platí

$$\mu_d(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^d N(\epsilon),$$

kde  $N(\epsilon)$  je počet disjunktních prostorových buněk o straně  $\epsilon$ , které jsou potřeba na pokrytí  $A$

- pro fraktály je však tato limita nekonečná. Ovšem  $\exists D$ ,  $3 \geq D > d$ , že

$$0 < \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^D N(\epsilon) < +\infty.$$

$D$  ... fraktální dimenze (tzv. Minkowského-Bouligandova definice)

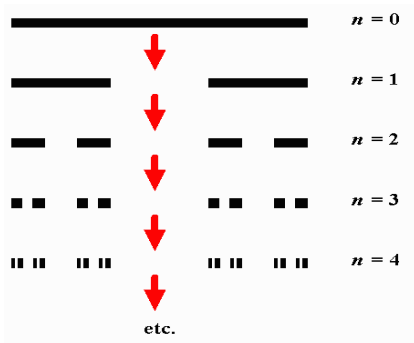


## Vlastnosti fraktálů

$$A = \bigcup_{n=1}^n \varphi_n(A)$$

- *deterministický* - přesně soběpodobný
- *nedeterministický* - statisticky soběpodobný
- *lineární* -  $\varphi_n$  jsou lineární transformace
- *nelineární*
- fraktály se modelují pomocí rekurze
- *kvazisoběpodobné fraktály* - konečná hloubka rekurze
- přírodní objekty jsou často fraktální povahy, lze u nich odhadnout  $D$  - generování krajiny

## Cantorovo diskontinuum



- výpočet fraktální dimenze deterministického fraktálu  $A$ :

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}},$$

kde  $N(\epsilon)$  je počet množin  $A$  zmenšených s měřítkem  $\epsilon$ , které pokrývají  $A$ . Zde  $D = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.63$ . (viz další příklad)

## Sierpinského trojúhelník 1/2



- rekurzivní vyjímání  $\Delta$  vzniklého ze spojnic středů stran.
- rozbor - následující body platí  $\forall n \in \mathbb{N}$ 
  - V  $n$ -té iteraci máme  $3^n$  trojúhelníků, každý trojúhelník je  $2^n$ -krát zmenšený původní  $\Delta$
  - ve výsledném fraktálu z každého z  $3^n$  trojúhelníků vznikne  $2^n$ -krát zmenšený celý fraktál
  - původní fraktál tedy pokrývá právě  $3^n$  zmenšenin jeho samého v měřítku  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3^n}{\log 2^n} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.59$$

## Sierpinského trojúhelník 1/2



- rekurzivní vyjímání  $\Delta$  vzniklého ze spojnic středů stran.
- rozbor - následující body platí  $\forall n \in \mathbb{N}$ 
  - V  $n$ -té iteraci máme  $3^n$  trojúhelníků, každý trojúhelník je  $2^n$ -krát zmenšený původní  $\Delta$
  - ve výsledném fraktálu z každého z  $3^n$  trojúhelníků vznikne  $2^n$ -krát zmenšený celý fraktál
  - původní fraktál tedy pokrývá právě  $3^n$  zmenšenin jeho samého v měřítku  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3^n}{\log 2^n} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.59$$

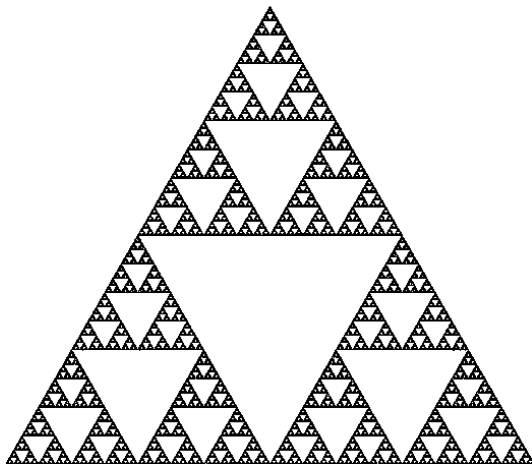
## Sierpinského trojúhelník 1/2



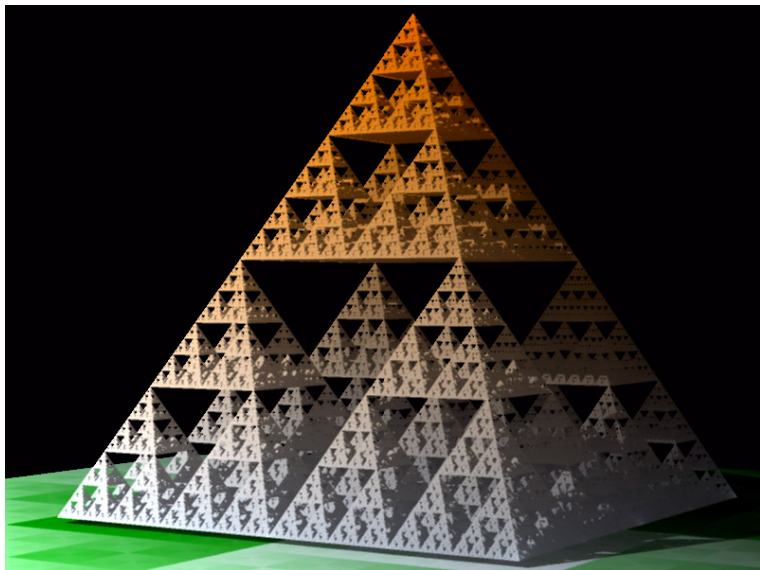
- rekurzivní vyjímání  $\Delta$  vzniklého ze spojnic středů stran.
- rozbor - následující body platí  $\forall n \in \mathbb{N}$ 
  - V  $n$ -té iteraci máme  $3^n$  trojúhelníků, každý trojúhelník je  $2^n$ -krát zmenšený původní  $\Delta$
  - ve výsledném fraktálu z každého z  $3^n$  trojúhelníků vznikne  $2^n$ -krát zmenšený celý fraktál
  - původní fraktál tedy pokrývá právě  $3^n$  zmenšenin jeho samého v měřítku  $(\frac{1}{2})^n$

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3^n}{\log 2^n} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.59$$

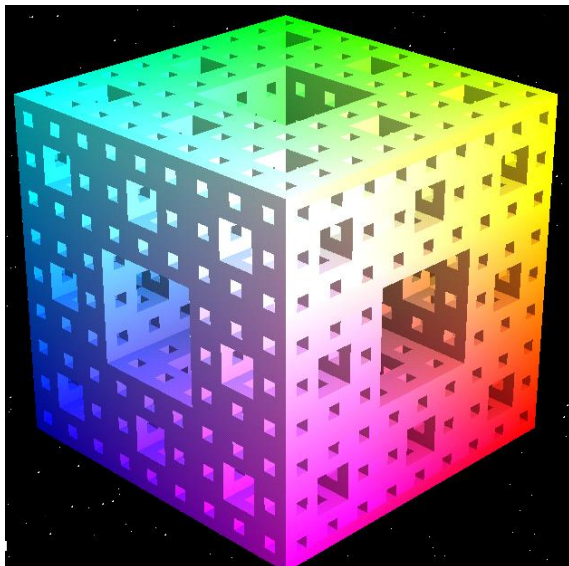
## Sierpinského trojúhelník 2/2



# Sierpinského pyramida

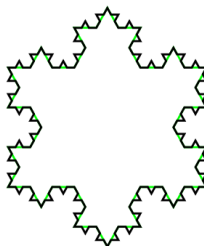
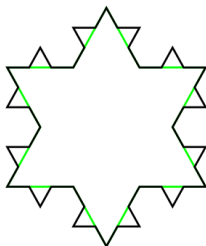
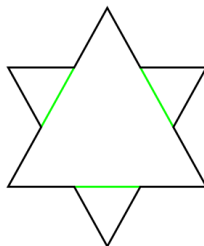
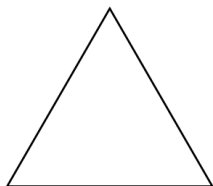


# Mengerova houba





# Kochova vločka



# Mandelbrotova množina

- množina

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq \infty \right\},$$

kde

$$\begin{aligned} z_0 &= c, \\ z_{n+1} &= z_n^2 + c. \end{aligned}$$

- nelze zkonstruovat dle definice - lze využít fakt, že

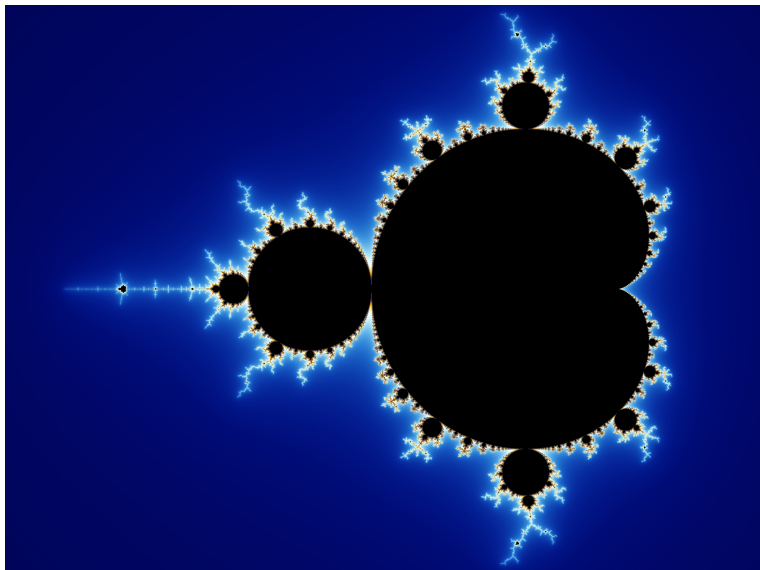
$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(|z_{n_0}| > 2) \implies ((\forall n > n_0)(|z_n| > 2) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty)$$

- konečný počet iterací  $N$

- pokud  $|z_N| < 2 \implies c \in M$
- pokud již pro nějaké  $n \leq N$  je  $|z_n| > 2 \implies c \notin M$

- body  $c = x + yi \in \mathbb{C}$  se vykreslují do roviny  $xy$ .  $n$  se použije jako index do palety barev.

# Obraz Mandelbrotovy množiny



## Juliova množina

- množina

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq \infty \right\},$$

kde

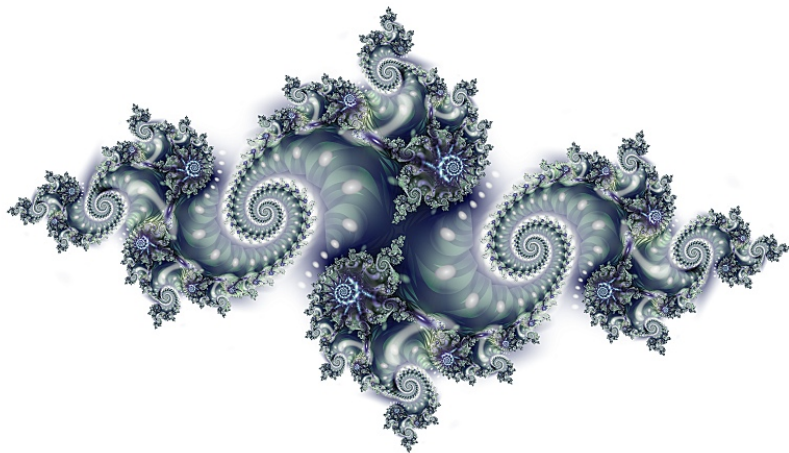
$$\begin{aligned} z_0 &= z, \\ z_{n+1} &= z_n^2 + c. \end{aligned}$$

- nyní je  $c$  parametr  $\implies$  nekonečně mnoho různých Juliovy množin
- vykreslování analogicky jako u Mandelbrotovy množiny
- např.

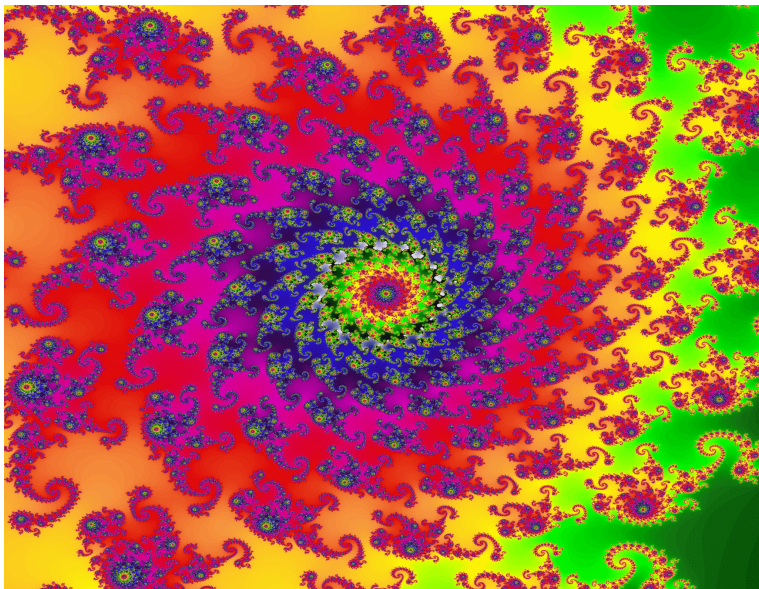
$$c = 0.353 + 0.288i,$$

$$c = -0.012 + 0.74i$$

# Obraz Juliovy množiny



# Obraz Juliovy množiny - zvětšení



## Přesouvání středního bodu

- generování náhodného fraktálního terénu
- princip v 1D - rekurzivní dělení úsečky (původně podél osy  $x$ ) na poloviny a posouvání středního bodu ve směru  $y$  o náhodné číslo
- někdy se nazývá *fraktální interpolace* (výsledná křivka interpoluje krajní body)
- segment  $[x_i, y_i] - [x_{i+1}, y_{i+1}] \implies$  vygeneruje se nový bod

$$x_{i+\frac{1}{2}} = (x_i + x_{i+1})/2,$$

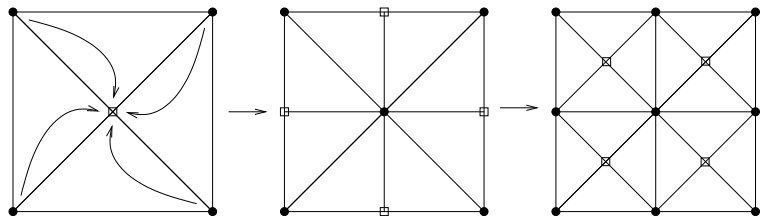
$$y_{i+\frac{1}{2}} = (y_i + y_{i+1})/2 + \delta_i P(x_{i+1} - x_i).$$

- $P$  určuje velikost perturbace v závislosti na délce úsečky a  $\delta_i \in (0, 1)$  je náhodné číslo
- kritérium pro zastavení rekurze
  - pevná hloubka
  - délka úsečky

# Přesouvání středního bodu pro generování povrchu

(Diamond Square algorithm)

- generování terénu
- algoritmus aplikujeme na trojúhelník, resp. čtyřúhelník - souřadnice bodů  $[x, y, f(x, y)]$  - z-ová souřadnice je výška
- trojúhelník: středy stran přesuneme ve směru osy z a spojíme je  $\implies$  vzniknou 4 trojúhelníky
- čtyřúhelník - střídají se 2 typy iterací
  - 1 nový bod ve středu čtverce - průměr 4 rohů (včetně souřadnice z, kterou pak posuneme)
  - 2 nové body ve středech stran

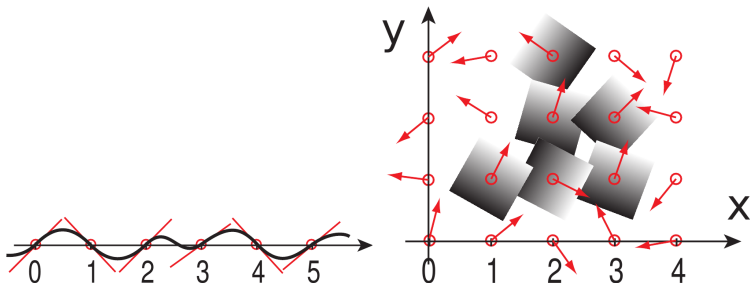




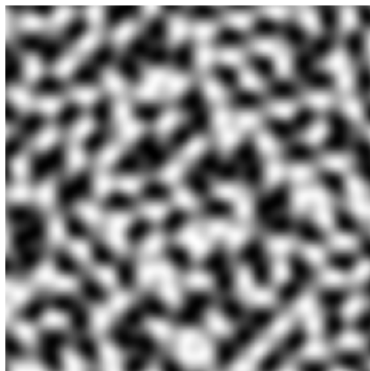
## Gradientní šum 1/2

- **Perlin noise, simplex noise**

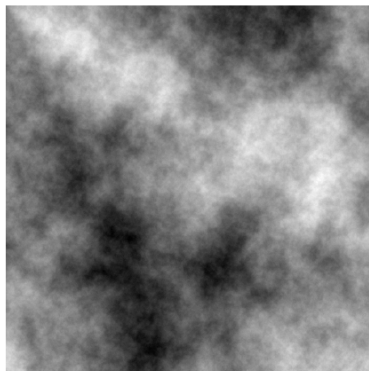
- 1 vygeneruje se mřížka uzlů, kde  $f(\mathbf{x}) = 0$
- 2 v těchto bodech se vygenerují náhodné gradienty  $f$
- 3 v bodech mezi body mřížky se funkce vhodně interpoluje, aby byla dostatečně hladká  $f$



## Gradientní šum 2/2



simplex noise



Brownian motion

# Generování krajin a dalších objektů

- generování modelů planet - metoda náhodných chyb
  - koule jako hustá síť trojúhelníků
  - iterativně se rozdělí na 2 části (nestejně velké)
  - „polokouli“ se přiřadí změna barvy o náhodné číslo s normálním rozdělením (max. hodnota klesá s počtem iterací)
- generování oblaků
  - průmět z-ové souřadnice fraktální plochy do prostoru barev
- kámen
  - přesouvání středního bodu aplikované na stěny kvádrů

# Generování krajiny - Terragen



# Generování krajiny - Terragen



# Generování krajiny - Terragen



# Generování krajiny - Terragen



# Generování krajiny - Terragen





# Obsah

- 1 Fraktální geometrie
- 2 Modelování rostlin a ekosystémů
- 3 Systémy částic

## Modelování pomocí gramatik

- vhodné pro modelování rostlin
- *gramatika* - množina slov, které mohou vzniknout rekurzivní aplikací přepisovacích pravidel na řetězce ze znaků abecedy
- *abeceda*

$$\{A, B, (, ), [, ]\}$$

- přepisovací pravidla (**DOL systém**)

$$A \rightarrow AA$$

$$B \rightarrow A[B]AA(B)$$

- iterace vycházející ze symbolu  $B$ :

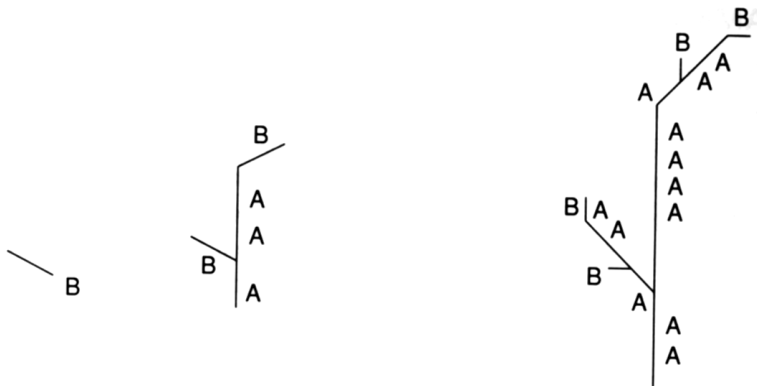
0.  $B$

1.  $A[B]AA(B)$

2.  $AA[A[B]AA(B)]AAAA(A[B]AA(B))$

# Modelování rostliny pomocí gramatiky

- závorkový formalismus: řetězec uzavřený v ( ) ... pravá větev, analogicky [ ] ... levá větev



## Přiblížení reálnému tvaru rostliny

- gramatiku lze upravit, aby byly výsledky věrohodnější
  - věk rostliny (iterace = růst, ale zároveň stárnutí): více znaků vyjadřujících totéž (stonek, list, květ...), ale v různé fázi růstu

$$A \rightarrow B$$
$$B \rightarrow C$$
$$C \rightarrow D$$

$\implies$  znaky  $A, B, C, D$  např. vyjadřují list, ale podléhají různým přepisovacím pravidlům.

- proces interpretace slova (=skutečného vykreslení rostliny) lze obohatit o mnoho aspektů
  - topologie - větev vpravo, vlevo, ...
  - geometrie - délky a velikosti, úhel úponu listu, úhel větvení, tloušťka stonku, ...
  - barvy a textury

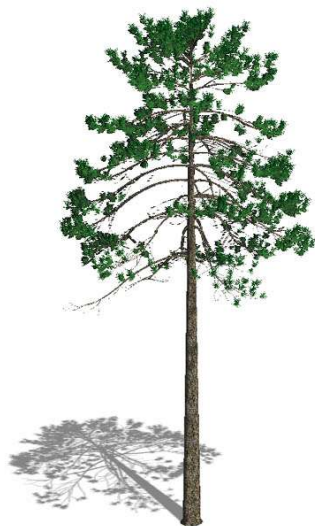
# Raffyeův model

- simulace růstu pomocí biologických parametrů
- na vrcholu stonku pupen - může:
  - vykvést
  - spát po určitou dobu
  - rozvětvit se
- podobně další pravidla
- akce řízeny pravděpodobnostmi

# Simulace růstu v ekosystému

- růst stimulován parametry prostředí - světlo, živiny, voda, parametry půdy, ...
- náhodný výběr větvení, resp. směru růstu více či méně ovlivněn
  - pnutí rostlin po zdi, otáčení za světlem
- virtuální ekosystémy - simulace života
  - interakce rostlin - při kolizi tzv. ekologických okolí (v nichž rostou nezávisle) silnější rostlina zahubí slabší
  - zjednodušení pro modelování - ve velkém ekosystému se exempláře stejné rostliny opakují

# Modelování rostlin - příklady



# Modelování rostlin - příklady





# Modelování rostlin - příklady



# Modelování ekosystémů - příklady



# Modelování ekosystémů - příklady



# Modelování ekosystémů - příklady



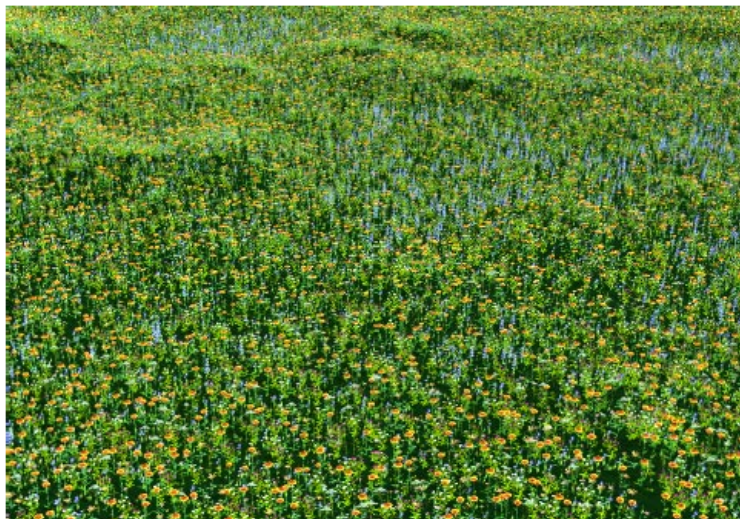
# Modelování ekosystémů - příklady



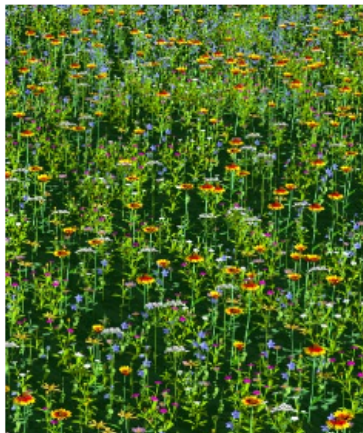
# Modelování ekosystémů - příklady



# Modelování ekosystému - úroveň zvětšení

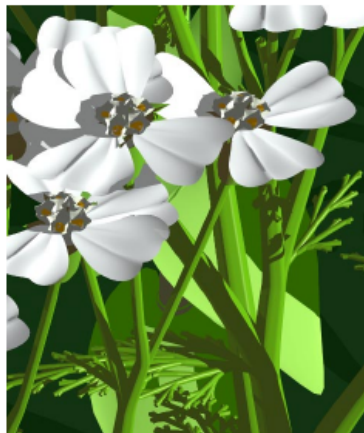


# Modelování ekosystému - úroveň zvětšení





# Modelování ekosystému - úroveň zvětšení



# Obsah

- 1 Fraktální geometrie
- 2 Modelování rostlin a ekosystémů
- 3 Systémy částic**

# Modelování pomocí systémů částic

- modelování jevů, které nelze popsat pomocí pevného tělesa - oheň, ohňostroj, kouř, tráva, vodopád
- systém částic = pevných bodů (z hlediska modelování), které mají hmotnost, polohu, rychlost
- částice na sebe působí
  - silové působení - deterministický pohyb, řešení ODR
  - působení pravděpodobnostní (nedeterministické) - pohyb, ale i vznik či zánik částic atd. podle určitých pravidel (prskavka, voda stříkající z hadice apod.)
- modelování: určení polohy v čase, ale také (pro zobrazení) barvy, tvaru

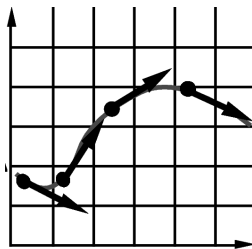
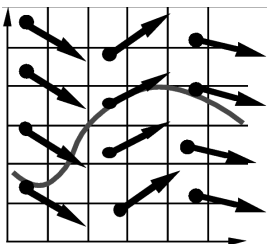
## Úlohy s počáteční podmínkou

- tzv. počáteční úloha pro systém obyčejných diferenciálních rovnic (ODR) 1. řádu pro vektor  $\mathbf{x}$  (stav systému):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2)$$

- funkce  $\mathbf{f}$  v rovnici (1) - směrnice funkce  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  v bodě  $\mathbf{x}$  a čase  $t$   
 $\implies \mathbf{f}$  je vektorové pole v prostoru  $(\mathbf{x}, t)$ , po jehož proudnicích (*integrálních křivkách*) se pohybuje řešení  $\mathbf{x}(t)$



## Příklad úlohy s poč. podmínkou

- úloha dvou těles - 2 částice o hmotnostech  $m_1$ ,  $m_2$ , vzájemné gravitační působení

- $\mathbf{x} = \left( \underbrace{x_1, y_1, z_1}_{\mathbf{r}_1}, \underbrace{x_2, y_2, z_2}_{\mathbf{r}_2}, \underbrace{v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}}_{\mathbf{v}_1}, \underbrace{v_{x2}, v_{y2}, v_{z2}}_{\mathbf{v}_2} \right)$

- system rovnic:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{v}_2$$

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = \kappa \frac{m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = \kappa \frac{m_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

+ počáteční podmínky:  $\mathbf{r}_i(0) = \mathbf{r}_{i0}$ ,  $\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{v}_{i0}$  ( $i \in \{1, 2\}$ )

# Numerické řešení systému ODR

## Eulerova metoda

- diskretizace časového intervalu
- nejjednodušší, tzv. **Eulerova metoda**:

$$\dot{\mathbf{x}}(t_n) \approx \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{\Delta t}$$

kde  $t_n = n\Delta t$ .  $\implies$  řešíme

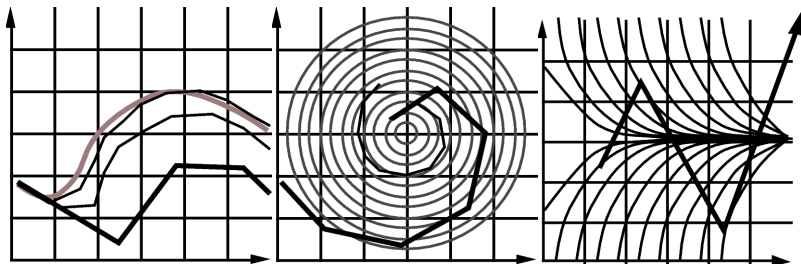
$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{\Delta t} &= \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n) \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \Delta t \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n)\end{aligned}$$

- je tzv. prvního řádu v čase, tj. chyba řešení  $\mathbf{x}(t_n) - \mathbf{x}_n = O(\Delta t)$
- je podmíněně stabilní - v závislosti na povaze pravé strany může konvergovat jen pro hodně malé  $\Delta t$

# Numerické řešení systému ODR

## Nestabilita Eulerovy metody

- Eulerova metoda aproximuje původní integrální křivku lomenou čarou
- nestability pro velké  $\Delta t$ : např. rovnice  $\dot{x} = -kx$ : pro  $\Delta t > \frac{2}{k}$  osciluje a diverguje do  $\infty$



# Numerické řešení systému ODR

## Metody vyššího řádu - Runge-Kuttovy metody

- lze sestavit metodu libovolného řádu přesnosti (pro výpočetní náročnost se obvykle používá max. 4. řád)
- vícenásobné vyhodnocování pravé strany
- schéma:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \cdot \sum_{i=1}^s \beta_i \mathbf{K}_i$$

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{f} \left( t_n + \gamma_i \Delta t, \mathbf{x}_n + \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \mathbf{K}_j \right),$$

kde  $\gamma_1 = 0$ , tj.  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n)$

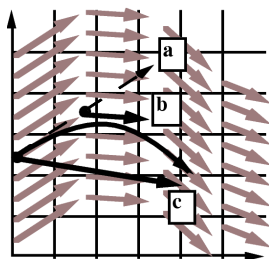
- volba koeficientů: podmínka shody  $0., 1., \dots, p.$  derivace přírůstku  $\Delta t \cdot \sum_{i=1}^s \beta_i \mathbf{K}_i$  a skutečného přírůstku  $\mathbf{x}(t_{n+1}) - \mathbf{x}(t_n)$  podle  $\Delta t$  (Tayl. rozvoj)  $\implies$  řád  $O(p+1)$ , kde  $p \leq s$



# Numerické řešení systému ODR

## Vlastnosti Runge-Kuttových metod

- pro  $s = 1$  dostáváme Eulerovu metodu
- srovnání RK metody 2. řádu (tzv. *midpoint* metoda) s Eulerovou metodou:



- volba koeficientů nejednoznačná - pro každý řád (2., 3., 4., ...) existuje několik populárních variant
- lze modifikovat na automatickou volbu  $\Delta t$  podle průběhu řešení (  $\implies$  zaručí stabilitu)

# Numerické řešení systému ODR

## Populární RK metody

- 2. řád - tzv. *midpoint* metoda

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Delta t \underbrace{\mathbf{f}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2} \underbrace{\mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n)}_{\mathbf{K}_1}\right)}_{\mathbf{K}_2}$$

- 4. řád (tzv. standardní RK metoda)

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2} \cdot \mathbf{K}_1\right)$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{2} \cdot \mathbf{K}_2\right)$$

$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{f}(t_n + \Delta t, \mathbf{x}_n + \Delta t \cdot \mathbf{K}_3)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4)$$

# Numerické řešení systému ODR

## Implicitní Eulerova metoda

- provedeme náhradu

$$\dot{\mathbf{x}}(t_n) \approx \frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}}{\Delta t}$$

⇒ řešíme

$$\frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}}{\Delta t} = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n)$$

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} + \Delta t \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n)$$

- soustava obecně nelineárních rovnic. Linearizace:

$$\mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n) \approx \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_{n-1}) + \partial_x \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_{n-1})(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1})$$

- Po dosazení a úpravě systém lin. rovnic:

$$\underbrace{(I - \Delta t \partial_x \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_{n-1}))}_{\mathbf{A}} \underbrace{(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1})}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\Delta t \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_{n-1})}_{\mathbf{b}}$$

- nepodmíněně stabilní

# Síly mezi částicemi

- unární - jediná síla působí na všechny částice
  - gravitace
  - třecí (odporové) síly  $\mathbf{F} = -k\dot{\mathbf{r}}$
- $n$ -ární síly - síly mezi částicemi navzájem
  - binární - např. Hookův zákon pro pružinu
- prostorové působení sil
  - lokální - zjednodušuje výpočet sil, (rozdělení prostoru do buněk)
  - prostorově neomezené

# Kolize a kontakt

- kolize částic navzájem, odraz částice od roviny
- odezva na kolizi - rozdělení rychlosti na normálovou a tečnou složku
  - pružný odraz od roviny - negace normálové složky
  - nepružný odraz - násobení normálové složky číslem  $-c$ ,  $c \in (0, 1)$
  - pružná kolize částic: ZZE, ZZH
- pohyb po povrchu (kontakt)
  - třecí síla závislá na síle, která částici tlačí k povrchu

## Modelování látek

- látka popsána trojúhelníkovou sítí částic
- vlastnosti látek: mezi částicemi pružiny s různou pevností
- kolize látky s okolními objekty a částicemi: zkoumání kolize pro každý trojúhelník zvlášť (náročné)
- výsledkem opět soustava ODR

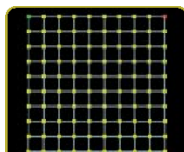


FIGURE 1A. A simple cloth grid.

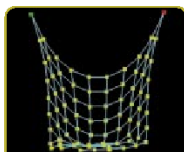


FIGURE 1B. Stretched cloth grid.

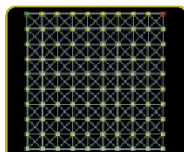


FIGURE 2A. Added Shear Springs.

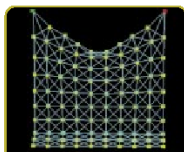


FIGURE 2B. A better Cloth model.

# Reference



P. Prusinkiewicz, A. Lindenmayer: *The Algorithmic Beauty of Plants*. Springer-Verlag, 1990.