Geometrické transformace pomocí matic

Pavel Strachota

FJFI ČVUT v Praze

2. dubna 2010

Obsah

Obsah

Úvod

- časté a důležité operace v počítačové grafice: **geometrické transformace**
- aplikované na objekty ve 2D, resp. 3D
- **invariance** objektů (úseček, křivek) vzhledem k transformacím: stačí transformovat řídící body (vektory)

Transformace

- posunutí (translace)
- rotace
- změna měřítka (škálování)
- zkosení
- složené transformace - např. promítání

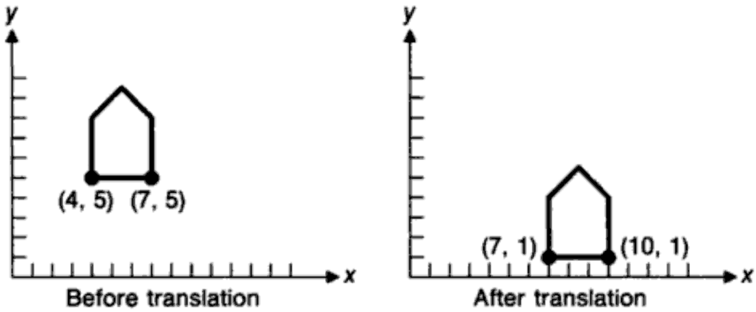
Úmluva

- původní bod $\boldsymbol{P}$ má souřadnice $\boldsymbol{P} = (x, y)^{\mathrm{T}}$ ve 2D, resp. $\boldsymbol{P} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$ ve 3D
- transformovaný bod $\boldsymbol{P}'$ má souřadnice $\boldsymbol{P}' = (x', y')^{\mathrm{T}}$ ve 2D, resp. $\boldsymbol{P}' = (x', y', z')^{\mathrm{T}}$ ve 3D

Obsah

Translace

- $x' = x + d_x$, $y' = y + d_y$
- vektor posunutí $\boldsymbol{d} = (d_x, d_y)^{\mathrm{T}}$
- $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{d}$

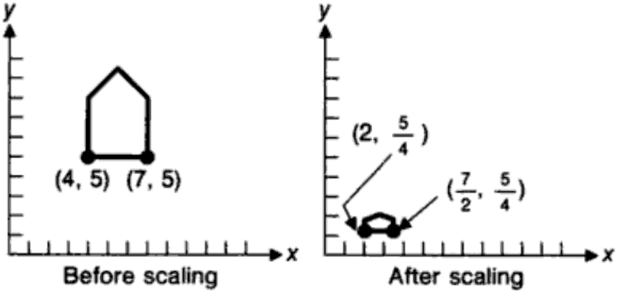


Změna měřítka

- změna měřítka ve směru osy x, resp. y dána faktory s_x, s_y
- škálování vzhledem k počátku souř. soustavy

$$x' = s_x x, \; y = s_y y$$

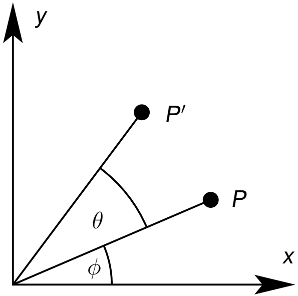
- matice škálování $\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{S}\boldsymbol{P}$



Rotace 1/2

- rotace kolem počátku souřadné soustavy o úhel θ proti směru hodinových ručiček
- původní bod P má souřadnice

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = (x, y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$$



- po rotaci dostaneme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}'^{\mathrm{T}} &= (r\cos(\phi+\theta), r\sin(\phi+\theta)) \\ &= (r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta, r\sin\phi\cos\theta + r\cos\phi\sin\theta) \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta, y\cos\theta + x\sin\theta)\,. \end{aligned}$$

Rotace 2/2

- matice rotace

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- maticový tvar transformace

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{P}$$

Maticová reprezentace 2D transformací

Motivace

- potřeba jednotného zápisu transformací
  - jednoduché **skládání** transformací
  - efektivní implementace
- rotace, škálování - lineární transformace, násobení maticí
- translace - má jiný tvar
- sjednocení popisu transformací: přechod do **homogenních souřadnic**
- potom každá **afinní** transformace = maticové násobení

Homogenní souřadnice 1/3

- přidáme třetí souřadnici W
- bod $\boldsymbol{P} = (x, y)^{\mathrm{T}}$ má **homogenní souřadnice**

$$\boldsymbol{P} \equiv [xW, yW, W]^{\mathrm{T}} = [X, Y, W]^{\mathrm{T}} \ \forall W \neq 0.$$

- každý bod $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^2$ je tedy reprezentován *přímkou* v prostoru (X, Y, W)
- dvě trojice homogenních souřadnic $[X_1, Y_1, W_1]$, $[X_2, Y_2, W_2]$ reprezentují stejný bod, právě když

$$[X_1, Y_1, W_1] = [\alpha X_2, \alpha Y_2, \alpha W_2] \ \ \alpha \neq 0$$

- bod $[0, 0, 0]$ není povolen
- body kde $W = 0$ se nazývají *body v nekonečnu*

Homogenní souřadnice 2/3

- *homogenizovaný* bod (pro bod $[X, Y, W]$, $W \neq 0$) je bod o souřadnicích
$$\left[\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}, 1\right] = [x, y, 1],$$
jeho první 2 složky jsou kartézské souřadnice
- homogenizované body tvoří rovinu v prostoru (X, Y, W)

Homogenní souřadnice 3/3

- **sčítání** bodů zadaných v homogenních souřadnicích

$$\begin{aligned} & [X_1, Y_1, W_1] + [X_2, Y_2, W_2] \\ = \quad & [X_1 W_2 + X_2 W_1, Y_1 W_2 + Y_2 W_1, W_1 W_2] \end{aligned}$$

- **násobení skalárem**

$$\alpha [X, Y, W] = [\alpha X, \alpha Y, W]$$

(a nikoliv $[\alpha X, \alpha Y, \alpha W]$, což je jen jiný zápis pro původní bod $[X, Y, W]$)

Translace v homogenních souřadnicích 1/2

- pro posunutí o $\boldsymbol{d} = (d_x, d_y)^{\mathrm{T}}$ násobíme bod $\boldsymbol{P} = [x, y, 1]^{\mathrm{T}}$ maticí

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- dostaneme

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{D}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Translace v homogenních souřadnicích 2/2

- pro **obecný** bod $\boldsymbol{P} = [xW, yW, W]^{\mathrm{T}}$, $W \notin \{0, 1\}$ máme

$$\boldsymbol{DP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} xW \\ yW \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xW + d_x W \\ yW + d_y W \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x + d_x)\, W \\ (y + d_y)\, W \\ W \end{bmatrix}$$

takže dostáváme opět správný výsledek.

- ***úkol***: ověřte *aditivitu* posunutí, tj.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x^1 \\ 0 & 1 & d_y^1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{posunutí o } \boldsymbol{d}^1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x^2 \\ 0 & 1 & d_y^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{posunutí o } \boldsymbol{d}^2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x^1 + d_x^2 \\ 0 & 1 & d_y^1 + d_y^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{posunutí o } \boldsymbol{d}^1 + \boldsymbol{d}^2} .$$

Změna měřítka v homogenních souřadnicích

- změna měřítka s_x-krát, resp. s_y-krát ve směru osy x, resp. y je dána maticí

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- pro homogenizovaný bod dostaneme

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{SP} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x x \\ s_y y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- ***úkol***: ověřte *multiplikativnost* škálování, tj.

$$\begin{pmatrix} s_x^1 & 0 & 0 \\ 0 & s_y^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & s_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x^1 s_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & s_y^1 s_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rotace v homogenních souřadnicích

- rotace bodu $\boldsymbol{P}$ podle počátku souř. soustavy o úhel θ proti směru hodinových ručiček je dána maticí

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- pro homogenizovaný bod dostaneme

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ y\cos\theta + x\sin\theta \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- ***úkol***: ověřte *aditivitu* rotace, tj.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\gamma) & -\sin(\theta+\gamma) & 0 \\ \sin(\theta+\gamma) & \cos(\theta+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Afinní transformace a transformace tuhého tělesa

- *afinní* transformace zachovává rovnoběžnost přímek, obecně nezachovává délky ani úhly
- obecně ve 2D je dána vztahem $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{d}$, kde $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^2$ je lib. matice, v homogenních souřadnicích je dána lib. maticí ve tvaru

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & d_x \\ a_{21} & a_{22} & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- lib. složení rotací, translací a škálování je afinní
- pokud je matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ortogonální, transformace zachovává úhly i délky a nazývá se také *transformace tuhého tělesa* (*rigid body trasformation*). Vznikne složením rotací a posunutí.

Afinní transformace a obecné afinní zobrazení

- afinní prostor E obsahuje body, rozdíl dvou bodů je vektor
- zobrazení $f : E \mapsto E$ je afinní, když existuje lin. zobrazení $\mathcal{F}$ tak, že

$$f(\boldsymbol{P}) - f(\boldsymbol{Q}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}) \ \forall \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q} \in E.$$

- zobrazení ve tvaru $f(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{AP} + \boldsymbol{d}$ afinní je, zde $\mathcal{F} = \boldsymbol{A}$.
- afinní zobrazení zachovává rovnoběžnost:
  - úsečka $\overline{\boldsymbol{PQ}} \parallel \overline{\boldsymbol{CD}}$ pokud $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P} = \alpha(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C})$
  - potom ale

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{Q}) - f(\boldsymbol{P}) &= \mathcal{F}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}) = \mathcal{F}(\alpha(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C})) \\ &= \alpha\mathcal{F}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}) = \alpha(f(\boldsymbol{D}) - f(\boldsymbol{C})), \end{aligned}$$

  takže $\overline{f(\boldsymbol{P})\, f(\boldsymbol{Q})} \parallel \overline{f(\boldsymbol{C})\, f(\boldsymbol{D})}$.

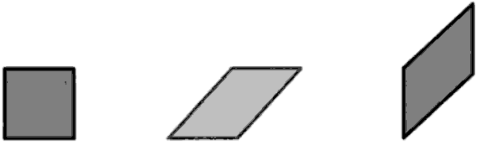
Zkosení

- angl. *shear transformation*
- zkosení podél osy x (x' lineárně závisí na y) přísluší transformační matice

$$\boldsymbol{H}_x = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- podobně pro zkosení podél osy y (y' závisí na x) máme

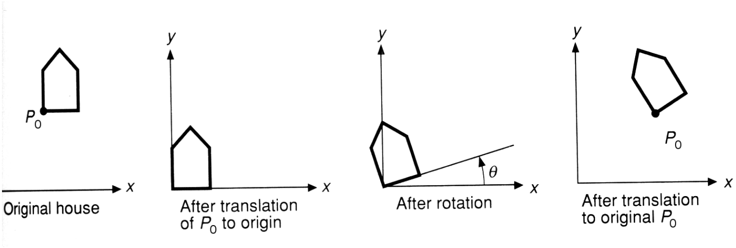
$$\boldsymbol{H}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Skládání transformací

Rotace kolem obecného bodu

- složitější transformace lze snadno získat složením základních transformací
- např. rotace kolem daného bodu $\boldsymbol{P}_0$
  1. posunutí, aby $\boldsymbol{P}_0$ byl v počátku
  2. rotace kolem počátku souř. soustavy
  3. posunutí zpět



Rotace kolem obecného bodu

Matice transformace

- předpokládejme $\boldsymbol{P}_0 = (x_0, y_0)^{\mathrm{T}} = [x_0, y_0, 1]^{\mathrm{T}}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{P}_0}(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & & x_0 \\ & 1 & y_0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & -x_0 \\ & 1 & -y_0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_0(1-\cos\theta) + y_0\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_0(1-\cos\theta) - x_0\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

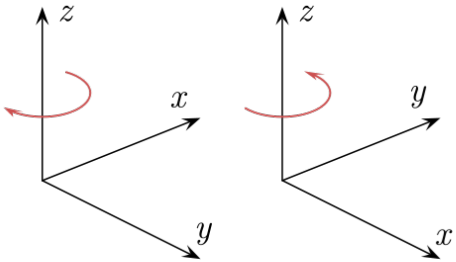
Zrcadlení

- další jednoduchá afinní transformace
- zrcadlení podle osy x
- zrcadlení podle osy y
- zrcadlení podle počátku souřadnicové soustavy
- zrcadlení podle přímky $y = x$
- ***úkol***: sestavte příslušné matice transformací

Obsah

Transformace ve 3D

- **homogenní souřadnice** analogicky jako ve 2D, nyní máme $\boldsymbol{P} = (x, y, z)^{\mathrm{T}} = [X, Y, Z, W]^{\mathrm{T}}$
- *levotočivý*, resp. *pravotočivý* souřadný systém: při pohledu z kladného směru osy z do počátku je rotace od kladné poloosy x ke kladné poloose y **po**, resp. **proti** směru hodinových ručiček



Matice transformací v homogenních souřadnicích 1/3

- posunutí

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- změna měřítka

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice transformací v homogenních souřadnicích 2/3

- rotace kolem osy z

$$\boldsymbol{R}_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- rotace kolem osy x

$$\boldsymbol{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- rotace kolem osy y

$$\boldsymbol{R}_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice transformací v homogenních souřadnicích 3/3

- škálování např. podél osy z s úhlem α vzhledem k souřadnici x a úhlem β vzhledem k souřadnici y

$$\boldsymbol{H}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tan\alpha & 0 \\ 0 & 1 & \tan\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Afinní transformace ve 3D

- podobně jako ve $2D$ je každá transformace tvaru

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{d} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}$$

afinní. Pokud je navíc matice $\boldsymbol{A}$ ortogonální, transformace zachovává úhly a délky

Změna souřadného systému

- každá transformace (s regulární maticí - což jsou zde všechny) je vlastně změna souřadného systému
- naopak, každou změnu souřadného systému lze vyjádřit maticí (přechodu)
- transformace složitá v jednom souř. systému může být primitivní v jiném
- **rotace kolem obecné osy** l (se směrovým vektorem $\boldsymbol{l}$) - složená transformace
  1. přechod ze standardní báze $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ do báze $(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$, kde $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ leží v rovině kolmé na l
  2. rotace podle souřadnicové osy $\boldsymbol{l}$
  3. přechod zpět do standardní báze

Transformace normál

- rovina zadána normálovým vektorem $\boldsymbol{n} = [A, B, C, D]^{\mathrm{T}}$
- bod $\boldsymbol{P} = [x, y, z, 1]^{\mathrm{T}}$ leží v dané rovině (**ne nutně procházející počátkem**), právě když

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P} = Ax + By + Cz \underbrace{+D}_{\text{posunutí}} = 0$$

- po transformaci maticí $\boldsymbol{T}$ získáme body $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{T}\boldsymbol{P}$ ležící v rovině s normálovým vektorem $\boldsymbol{n}'$
  $\implies$ jak získat $\boldsymbol{n}'$?
- předpokládejme, že $\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{n}$, kde $\boldsymbol{Q}$ je neznámá matice. Musí platit

$$0 = \boldsymbol{n}' \cdot \boldsymbol{P}' = \boldsymbol{n}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}.$$

- to bude splněno, pokud $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}$, tj. $\boldsymbol{Q} = \left(\boldsymbol{T}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.

Literatura

- J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner, J. F. Hughes: *Computer Graphics: Principles and Practice*, Addison Wesley, 1997.
- L. Vrána: *Matematická analýza III - diferenciální počet* (skripta FJFI). Vydavatelství ČVUT, 1990.
- Žára, Beneš, Sochor, Felkel: *Moderní počítačová grafika*. Computer Press, 2005.