

Matematické pozadí důkazu Shannonova-Nyquistova teoremu

Pavel Strachota

19. února 2015

Poznámka. Pro jednoduchost budou všechny pojmy vysvětlovány na jednorozměrném případu.

1 Fourierovy řady

V obecném Hilbertově prostoru H s úplným ortogonálním¹ souborem $X = (\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lze každý vektor \mathbf{v} vyjádřit jako

$$\mathbf{v} = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \mathbf{x}_k \quad \text{kde } \alpha_k = \frac{\langle \mathbf{v} | \mathbf{x}_k \rangle}{\|\mathbf{x}_k\|^2}. \quad (1.1)$$

Číslo α_k se nazývá k -tý Fourierův koeficient vektoru \mathbf{v} v bázi X a daná řada se nazývá Fourierova řada vektoru \mathbf{v} .

Trigonometrické Fourierovy řady

Uvažujme interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a označme $l = b - a$. Jako OG bázi Hilbertova prostoru $L_2((a, b))$ lze volit soubor funkcí $(\cos \frac{2\pi n x}{l})_{n \in \mathbb{N}_0} \cup (\sin \frac{2\pi n x}{l})_{n \in \mathbb{N}}$. Podle (1.1) je Fourierovou řadou funkce $f \in L_2((a, b))$ řada

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{2\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{l} \quad (1.2)$$

kde Fourierovy koeficienty mají hodnotu

$$a_n = \frac{2}{l} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n x}{l} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_n = \frac{2}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi n x}{l} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fourierovy řady a Fourierovy koeficienty lze zapsat i v exponenciálním tvaru

Fourierova řada v exponenciálním tvaru

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(-\frac{2\pi i n x}{l}\right), \quad (1.3)$$

¹Jde v podstatě o ortogonální bázi H . Platí $(\forall \mathbf{v} \in H, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}) (\exists n \in \mathbb{N}) (\langle \mathbf{v} | \mathbf{x}_n \rangle \neq 0)$. Detaily viz MAA3 nebo VYMA.

kde

Fourierovy koeficienty

$$c_n = \frac{2}{l} \int_a^b f(x) \exp\left(\frac{2\pi i n x}{l}\right) dx \quad (1.4)$$

Lze se přesvědčit, že oba tvary (1.2) a (1.3) jsou skutečně ekvivalentní. Použitím Eulerova vzorce dostáváme

$$c_n = \frac{2}{l} \int_a^b f(x) \left(\cos \frac{2\pi n x}{l} dx + i \sin \frac{2\pi n x}{l} \right) dx, \quad (1.5)$$

takže $c_0 = a_0$ a pro $n > 0$ máme $c_n = a_n + i b_n$ a $c_{-n} = a_n - i b_n$. Po dosazení pak postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(-\frac{2\pi i n x}{l}\right) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_n + i b_n) \left(\cos \frac{2\pi n x}{l} dx - i \sin \frac{2\pi n x}{l} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + i b_n) \left(\cos \frac{2\pi n x}{l} dx - i \sin \frac{2\pi n x}{l} \right) + (a_n - i b_n) \left(\cos \frac{2\pi n x}{l} dx + i \sin \frac{2\pi n x}{l} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{2\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{l}. \end{aligned}$$

Fourierova řada funkce f konverguje na celém \mathbb{R} k tzv. *normalizovanému periodickému prodloužení* \tilde{f} , pro které platí

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\lim_{t \rightarrow a+} f(t) + \lim_{t \rightarrow b-} f(t)) & x = a, \\ \frac{1}{2} (\lim_{t \rightarrow t+} f(t) + \lim_{t \rightarrow x-} f(t)) & x \in (a, b), \\ \tilde{f}(x - l) & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.6)$$

2 Fourierova transformace

Fourierovým obrazem funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rozumíme funkci $F = \mathcal{F}[f]$, která splňuje pro každé $u \in \mathbb{R}$

Fourierův obraz

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i u x} dx \quad (2.1)$$

(srovnej s (1.3)). Inverzní Fourierovou transformací funkce F rozumíme funkci $\mathcal{F}^{-1}[F]$, která splňuje

Fourierův vzor

$$\mathcal{F}^{-1}[F](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{+2\pi i u x} du. \quad (2.2)$$

Za určitých okolností platí

$$\mathcal{F}^{-1}[F] = f,$$

ale obecně tomu tak není.

Schwartzův prostor \mathcal{S} a věta o inverzi

Prostorem \mathcal{S} nazýváme třídu všech funkcí $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, které v $\pm\infty$ klesají rychleji než libovolná mocnina $x^{-n} \forall n \in \mathbb{N}$, a totéž platí pro všechny jejich derivace. Příkladem takové funkce může být např.

$$\varphi(x) = e^{-x^2}.$$

Třída \mathcal{S} je vektorový prostor, který je navíc uzavřený vůči násobení polynomem a derivaci. Lze ukázat, že pro všechny prvky $\varphi \in \mathcal{S}$ platí rovněž $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}$ a je splněna Fourierova inverzní formule

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f. \quad (2.3)$$

Poissonův sumační vzorec (pro funkce)

Uvažujme funkci $f \in \mathcal{S}$, která je nenulová pouze na intervalu (a, b) délky $l = b - a$. Její normalizované periodické prodloužení má potom zřejmě tvar

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x - kl). \quad (2.4)$$

Pro $\forall x \in \mathbb{R}$ je hodnota tohoto prodloužení rovna součtu Fourierovy řady funkce f , tj.

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(-\frac{2\pi i n x}{l}\right), \quad (2.5)$$

kde pro Fourierovy koeficienty platí podle (1.5) a (2.1)

$$c_n = \frac{2}{l} \int_a^b f(x) \exp\left(\frac{2\pi i n x}{l}\right) dx = \frac{2}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\left(\frac{2\pi i n x}{l}\right) dx = \frac{2}{l} F\left(-\frac{n}{l}\right).$$

kde $F = \mathcal{F}[f]$. Srovnáním (2.4) s (2.5) je vidět, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x - kl) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(-\frac{n}{l}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i n x}{l}\right)$$

a konkrétně pro $x = 0$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-kl) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(-\frac{n}{l}\right).$$

Po formální substituci sčítacích indexů $k \leftrightarrow -n$ vlevo a $n \leftrightarrow -n$ vpravo dostáváme

Poissonův sumační vzorec

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nl) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{n}{l}\right). \quad (2.6)$$

3 Konvoluce

Nechť $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Konvolucí funkcí f, g rozumíme funkci $f * g$ definovanou jako

Konvoluce funkcí

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt \quad (3.1)$$

Jestliže má funkce g omezený support, hovoříme o ní často jako o konvolučním jádru. Předpokládejme, že

$$\text{supp } g = (-a, a).$$

Potom lze psát

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-z) g(z) dz = \int_{-a}^{+a} f(x-z) g(z) dz = \int_{x-a}^{x+a} f(t) g(x-t) dt.$$

Z posledních dvou vztahů je vidět, hodnota $(f * g)(x)$ je v podstatě váženým průměrem hodnot funkce f na okolí bodu x .

Konvoluční teorém

Konvoluce a Fourierova transformace spolu velmi úzce souvisí. Nechť $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Potom:

1. Fourierův obraz, resp. vzor konvoluce funkcí je součin Fourierových obrazů, resp. vzorů funkcí

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]. \quad (3.2)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f * g] = \mathcal{F}^{-1}[f] \cdot \mathcal{F}^{-1}[g]. \quad (3.3)$$

2. Fourierův obraz, resp. vzor součinu funkcí je konvoluce Fourierových obrazů, resp. vzorů funkcí

$$\mathcal{F}[fg] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]. \quad (3.4)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[fg] = \mathcal{F}^{-1}[f] * \mathcal{F}^{-1}[g]. \quad (3.5)$$

Např. první tvrzení lze dokázat společným přímým výpočtem:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\pm 1}[f * g](u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt \right) e^{\pm 2\pi i u x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{\pm 2\pi i u t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x-t) e^{\pm 2\pi i u (x-t)} dx \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{\pm 2\pi i u t} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{\pm 2\pi i u x} dx = F(u) G(u) = (\mathcal{F}^{\pm 1}[f] \cdot \mathcal{F}^{\pm 1}[g])(u). \end{aligned}$$

Druhé tvrzení plyne z prvního za předpokladu, že pro f, g platí Fourierova inverzní formule (2.3).

4 Distribuce

Uvažujme prostor $\mathcal{D} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ nekonečněkrát diferencovatelných funkcí s kompaktním supportem. Duálním prostoru \mathcal{D}' všech lineárních funkcionalů na \mathcal{D} říkáme *prostor distribucí* (zobecněných funkcí). Aplikaci distribuce $T \in \mathcal{D}'$ na tzv. *testovací funkci* $\varphi \in \mathcal{D}$ značíme

$$\langle T | \varphi \rangle.$$

Řekneme, že distribuce T je *regulární*, jestliže existuje funkce $f \in L_2(\mathbb{R})$ tak, že

$$\langle T | \varphi \rangle = \langle f | \varphi \rangle,$$

kde

$$\langle f | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

je skalární součin na $L_2(\mathbb{R})$. Diracova δ -„funkce“ je ve skutečnosti distribuce s vlastností

$$\langle \delta | \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Nejedná se o regulární distribuci, ale formálně se často píše

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \text{ a tedy i } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Operace s distribucemi

Operace s distribucemi lze definovat tak, aby pro regulární distribuce odpovídaly operacím s příslušnými funkcemi. Kromě operací na vektorovém prostoru \mathcal{D}'

$$\begin{aligned} \langle T + S | \varphi \rangle &= \langle T | \varphi \rangle + \langle S | \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \\ \langle \alpha T | \varphi \rangle &= \alpha \langle T | \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

lze zavést:

1. Operaci posunutí. Jestliže *operátor posunutí* τ_h funguje na funkce jako

$$(\tau_h f)(x) = f(x - h), \tag{4.1}$$

potom pro distribuce jej lze definovat pomocí vztahu

$$\langle \tau_h T | \varphi \rangle = \langle T | \tau_{-h} \varphi \rangle. \tag{4.2}$$

Je-li T regulární a odpovídá funkci f , tak potom platí

$$\langle \tau_h T | \varphi \rangle = \langle T | \tau_{-h} \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x + h) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - h) \varphi(x) dx = \langle \tau_h f | \varphi \rangle,$$

tj. distribuce $\tau_h T$ je rovněž regulární a odpovídá funkci $\tau_h f$, což bychom očekávali.

2. Násobení distribuce funkcí g lze definovat

$$\langle gT | \varphi \rangle = \langle T | g\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

3. *Derivaci* distribuce definujeme $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ jako

$$\langle T' | \varphi \rangle = -\langle T | \varphi' \rangle.$$

Potom totiž pro regulární distribuce definované funkcí f alespoň třídy $C^1(\mathbb{R})$ dostáváme

$$\langle T' | \varphi \rangle = -\langle T | \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx = \langle f' | \varphi \rangle,$$

tj. distribuce T' je rovněž regulární a odpovídá funkci f' . Okrajový člen v per-partes vypadne, neboť φ má omezený support. Distribuce mají na rozdíl od funkcí vždy všechny derivace, což umožňuje velmi efektivně použít teorii distribucí v teorii (parciálních) diferenciálních rovnic.

Temperované distribuce a jejich Fourierova transformace

Temperované distribuce jsou lineární funkcionály definované na Schwartzově prostoru \mathcal{S} . Protože evidentně $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, je každá temperovaná distribuce definována $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ a je tedy i distribucí. Existují však distribuce, které nejsou temperované. Proto platí $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$. Temperované distribuce nemají obecně všechny derivace.

Protože pro každou $\varphi \in \mathcal{S}$ platí rovněž $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}$, je možné definovat Fourierovu transformaci temperované distribuce T jako temperovanou distribuci $\mathcal{F}[T]$, splňující vztah

Fourierova transformace temperované distribuce

$$\langle \mathcal{F}[T] | \varphi \rangle = \langle T | \mathcal{F}[\varphi] \rangle. \quad (4.3)$$

Je-li distribuce T regulární a definovaná funkcí f , potom pro každou $\varphi \in \mathcal{S}$ platí

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[T] | \varphi \rangle &= \langle T | \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \mathcal{F}[\varphi](u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i u x} dx \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \varphi(x) e^{-2\pi i u x} dx du = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2\pi i u x} du \right) \varphi(x) dx = \langle \mathcal{F}[f] | \varphi \rangle, \end{aligned}$$

tj. distribuce $\mathcal{F}[T]$ je rovněž regulární a je definovaná funkcí $\mathcal{F}[f]$.

Příklad. Fourierovou transformací δ -distribuce je identita, tj. regulární distribuce definovaná funkcí $f(x) = 1$. Platí totiž

$$\langle \mathcal{F}[\delta] | \varphi \rangle = \langle \delta | \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \mathcal{F}[\varphi](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i \cdot 0 \cdot x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \langle 1 | \varphi \rangle.$$

Fourierova transformace Diracova hřebenu

Tzv. *Diracův hřeben*

$$s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{nh} \delta, \quad (4.4)$$

je součet δ -distribucí rozmístěných „vedle sebe“ s pravidelným krokem h . Potom $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ s konečným supportem dostáváme z definice

$$\langle \mathcal{F}[s] | \varphi \rangle = \langle s | \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \tau_{nh} \delta | \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \delta | \tau_{-nh} \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\varphi](-nh). \quad (4.5)$$

Po záměně $n \leftrightarrow -n$ a podle Poissonova sumačního vzorce (2.6) dále získáme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\varphi](-nh) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\varphi](nh) = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{n}{h}\right).$$

Poslední sumu lze přepsat zpět z definice distribuce

$$\frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{n}{h}\right) = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(-\frac{n}{h}\right) = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \delta | \tau_{-\frac{n}{h}} \varphi \rangle = \left\langle \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{\frac{n}{h}} \delta \middle| \varphi \right\rangle. \quad (4.6)$$

Srovnáním levé strany (4.5) s pravou stranou (4.6) docházíme k rovnosti

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{nh} \delta\right] = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{\frac{n}{h}} \delta. \quad (4.7)$$

Konvoluce temperované distribuce s funkcí

Konvoluci temperované distribuce T s funkcí (konvolučním jádrem) g definujeme jako temperovanou distribuci $T * g$, která splňuje $\forall \varphi \in \mathcal{S}$

$$\langle T * g | \varphi \rangle = \langle T | \varphi * \tilde{g} \rangle$$

kde $\tilde{g}(x) = g(-x)$. Jestliže je temperovaná distribuce regulární a definovaná funkcí f , potom

$$\begin{aligned} \langle T * g | \varphi \rangle &= \langle T | \varphi * \tilde{g} \rangle = \langle f | \varphi * \tilde{g} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (\varphi * \tilde{g})(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) g(t-x) dt \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(t-x) dx \right) \varphi(t) dt = \langle f * g | \varphi \rangle, \end{aligned}$$

tj. distribuce $f * T$ je rovněž regulární a je definovaná funkcí $f * g$.

V dalším textu několikrát využijeme konvoluci s posunutou δ -distribucí

$$\langle (\tau_h \delta) * g | \varphi \rangle = \langle \tau_h \delta | \varphi * \tilde{g} \rangle = \langle \delta | \tau_{-h} (\varphi * \tilde{g}) \rangle = (\varphi * \tilde{g})(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) g(t-h) dt = \langle \tau_h g | \varphi \rangle, \quad (4.8)$$

tj. platí rovnost distribucí

$$(\tau_h \delta) * g = \tau_h g. \quad (4.9)$$

Z definičního vztahu rovněž získáme *konvoluční teorém pro distribuce*

$$\mathcal{F}[T * g] = \mathcal{F}[T] \cdot \mathcal{F}[g], \quad (4.10)$$

resp.

$$\mathcal{F}[Tg] = \mathcal{F}[T] * \mathcal{F}[g], \quad (4.11)$$

neboť např. v případě (4.11) platí

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[Tg] | \varphi \rangle &= \langle Tg | \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle T | g \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}[T] | \mathcal{F}^{-1}[g \mathcal{F}[\varphi]] \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}[T] | \mathcal{F}^{-1}[g] * \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}[T] | \widetilde{\mathcal{F}[g]} * \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}[T] * \mathcal{F}[g] | \varphi \rangle.\end{aligned}$$

V prvním řádku úprav byly využity definice Fourierovy transformace distribuce (4.3), součinu distribuce s funkcí a opět (4.3) spolu s Fourierovou inverzní formulí (2.3) na \mathcal{S} . Ve druhém řádku byl využit konvoluční teorém (3.5), vztah

$$\mathcal{F}^{-1}[g](u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{2\pi i u x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-2\pi i(-u)x} dx = \mathcal{F}[g](-u) = \widetilde{\mathcal{F}[g]}(u)$$

a nakonec opět definice Fourierovy transformace (4.3).

5 Shannonův-Nyquistův vzorkovací teorém

Shannonův teorém se zabývá kritériem pro dokonalou rekonstrukci spojitého signálu z jeho vzorků. Nejprve je nutné formalizovat, co rozumíme pod pojmem signál a jeho vzorkování.

Model diskrétního signálu

Uvažujme jednorozměrná data (signál) definovaná pomocí funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Tento signál zaznamená digitální zařízení (*sampler*) v intervalech s pravidelným rozestupem (periodou) h . Vzorkováním signálu tedy rozumíme zúžení funkce f na početnou množinu diskrétních (izolovaných) hodnot

$$\mathcal{H}_h = \{nh | n \in \mathbb{Z}\}, \quad h > 0,$$

tj. $f|_{\mathcal{H}_h}$. Lze navíc zavést označení n -tého vzorku

$$f_n = f(nh).$$

Sestrojme nyní (temperovanou) distribuci $f_d = f \cdot s$, kde

$$s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{nh} \delta$$

je Diracův hřeben (4.4). Tato distribuce je (z hlediska informace) ekvivalentní s vzorkováním $f|_{\mathcal{H}_h}$, tj. distribuce f_d je určena jednoznačně vzorkováním $f|_{\mathcal{H}_h}$ a naopak. Skutečně, pro libovolnou $\varphi \in \mathcal{S}$ platí

$$\begin{aligned}\langle f_d | \varphi \rangle &= \left\langle f \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{nh} \delta \middle| \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{nh} \delta \middle| f \varphi \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \tau_{nh} \delta | f \varphi \rangle \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \delta | \tau_{-nh}(f \varphi) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\tau_{-nh}(f \varphi))(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (f \varphi)(nh) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \varphi(nh),\end{aligned}$$

tj. $f|_{\mathcal{H}_h}$ definuje jednoznačně f_n a naopak, z tvaru f_n lze získat hodnotu libovolného k -tého vzorku f_k speciální volbou testovací funkce φ , například

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = nh, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Distribuci f_d budeme také říkat *diskrétní signál*.

Rekonstrukce signálu - interpolace

Rekonstrukcí signálu rozumíme nalezení funkce $f_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definované pouze pomocí vzorků f_n , resp. diskrétního signálu f_d . To lze jistě provést mnoha způsoby, ale my se budeme snažit najít takový způsob a takové předpoklady, které nám zaručí rovnost $f_r = f$, tj. rekonstruovaný signál bude přesně roven původnímu signálu, který byl vzorkován.

Zvolme nejprve libovolné konvoluční jádro g a vypočítejme $f_d * g$. Jedná se o distribuci, která pro každé $\varphi \in \mathcal{S}$ splňuje

$$\begin{aligned} \langle f_d * g | \varphi \rangle &= \left\langle \left(f \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{nh} \delta \right) * g \middle| \varphi \right\rangle = \left\langle f \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{nh} \delta \middle| \varphi * \tilde{g} \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n (\varphi * \tilde{g})(nh) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) g(t - nh) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n g(t - nh) \varphi(t) dt = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \tau_{nh} g \middle| \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Poslední výraz už je skalární součin na $L_2(\mathbb{R})$. Distribuce $f_d * g$ je tedy regulární a je definována funkcí

$$f_r = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \tau_{nh} g,$$

tj.

$$f_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n g(x - nh).$$

Lze si např. rozmyslet, že pokud zvolíme

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{h} & \text{pro } |x| \leq h, \\ 0 & \text{pro } |x| > h, \end{cases}$$

výsledná funkce f_r vznikne lineární interpolací vzorků f_n . Konvoluce diskrétního signálu f_d s různými konvolučními jádry tedy představuje různé způsoby interpolace vzorků f_n . Proto se někdy konvoluci říká *obecná interpolace*.

Nyquistova mez

S pomocí teorie shrnuté výše je snadné odvodit spektrum diskrétního signálu f_d . Pro Fourierův obraz diskrétního signálu platí podle konvolučního teorému (4.11)

$$F_d := \mathcal{F}[f_d] = \mathcal{F}[f \cdot s] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[s].$$

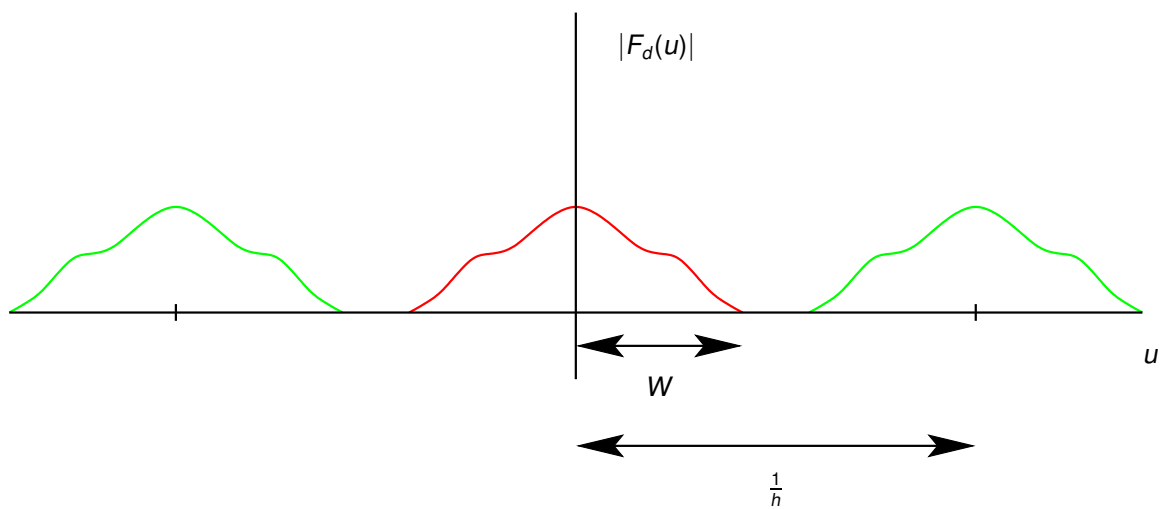
Pro Fourierův obraz Diracova hřebenu s jsme již dříve odvodili vztah (4.7), tj.

$$\mathcal{F}[s] = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{\frac{n}{h}} \delta.$$

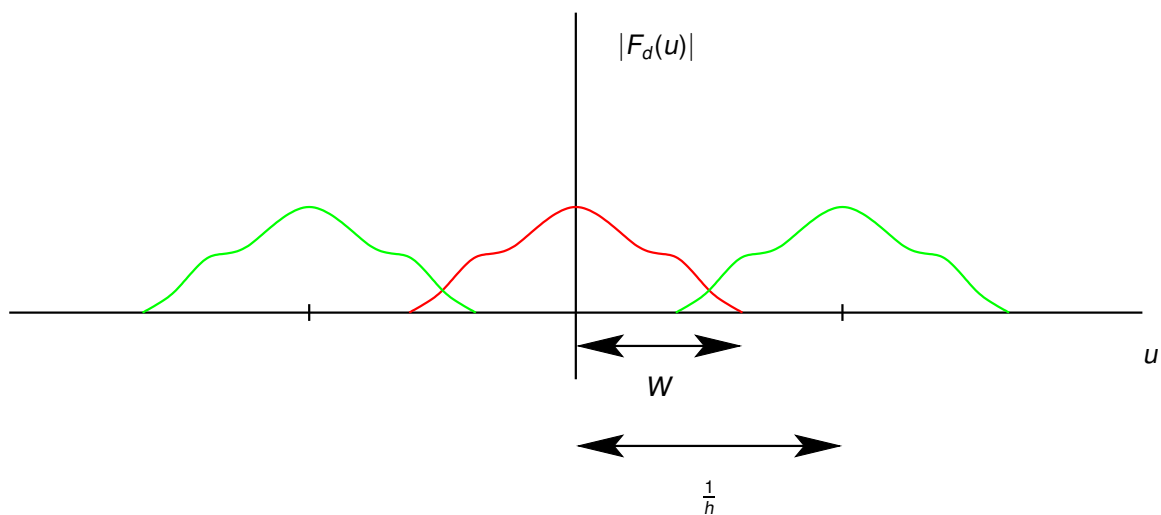
Po dosazení a při označení $F = \mathcal{F}[f]$ dostáváme díky (4.9)

$$F_d = F * \left(\frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{\frac{n}{h}} \delta \right) = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{\frac{n}{h}} F.$$

Jinými slovy, spektrum diskrétního signálu vznikne sečtením spekter původního signálu posunutých o násobky $\frac{1}{h}$, tj. o *vzorkovací frekvenci*. Původní signál f bude možné přesně rekonstruovat právě tehdy, když se podaří rekonstruovat jeho spektrum. To však půjde jen tehdy, když vzorkovací frekvence $\frac{1}{h}$ bude větší než dvojnásobek maximální frekvence W obsažené ve spektru f (obrázky 5.1 a 5.2). Této hodnotě se říká Nyquistova mez. Máme tedy



Obrázek 5.1: Dostatečná vzorkovací frekvence.



Obrázek 5.2: Nedostatečná vzorkovací frekvence - dochází k překrytí spekter.

Shannonův–Nyquistův vzorkovací teorém

$$\frac{1}{h} \geq 2W. \quad (5.1)$$

Ideální interpolant

Je zřejmé, jak při dostatečné vzorkovací frekvenci izolovat původní spektrum F ze spektra diskrétního signálu F_d . Stačí vynásobit F_d funkcí

$$G(u) = \begin{cases} h & \text{pro } u < \frac{1}{2h}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

To znamená, že

$$F = G \cdot F_d.$$

Provedeme-li inverzní Fourierovu transformaci, získáme díky konvolučnímu teorému (4.10)

$$f = \mathcal{F}^{-1}(G \cdot F_d) = \mathcal{F}^{-1}[G] * f_d.$$

Provádíme tedy konvoluci diskrétního signálu s konvolučním jádrem $g = \mathcal{F}^{-1}[G]$. Jeho tvar umíme vypočítat:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) e^{2\pi i u x} du = h \int_{-\frac{1}{2h}}^{\frac{1}{2h}} e^{2\pi i u x} du = \left[\frac{h}{2\pi i x} e^{2\pi i u x} \right]_{-\frac{1}{2h}}^{\frac{1}{2h}} \\ &= \frac{h}{\pi x} \frac{\sinh\left(\frac{\pi x}{h} i\right)}{i} = \frac{h}{\pi x} \sin\left(\frac{\pi x}{h}\right) = \text{sinc}\left(\frac{\pi x}{h}\right), \end{aligned} \quad (5.2)$$

přičemž definujeme

$$\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}.$$

Jak již bylo řečeno, konvoluce libovolné funkce g s diskrétním signálem představuje jistý druh interpolace. S pomocí funkce g definované pomocí (5.2) však interpolací získáme přímo původní signál f . Proto se funkci (5.2) říká *ideální interpolant*.

Reference

- [1] L. Schwartz. *Mathematics for the Physical Sciences*, Addison-Wesley (French original: *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, 1966).
- [2] R. Strichartz. *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*. CRC Press, 1994.
- [3] F. G. Friedlander, M. Joshi. *Introduction to the Theory of Distributions*, Cambridge University Press, 1998.
- [4] R. N. Bracewell. *The Fourier Transform and its Applications*. McGraw Hill, 2000.